

文章编号: 1000-4750(2013)Suppl-0363-04

中厚板轧后冷却正规阶段温度场变分解

章顺虎, 赵德文, 刘南君, 高彩茹

(东北大学轧制技术及连轧自动化国家重点实验室, 沈阳 110819)

摘 要: 该文从导热微分方程和定解条件出发, 设定了预先满足边界条件的试函数, 并结合拉格朗日乘子法, 构建了里兹温度场泛函的广义表达式, 经泛函变分, 首次获得了中厚板轧后冷却正规阶段温度场的变分解, 该解为板厚 δ , 换热系数 α , 比热 c_p , 冷却时间 t , 热传导率 λ , 钢板密度 ρ , 开冷温度 T_0 , 水温 T_f 的函数。该解与分离变量法获得的解析解比较表明, 该解对分离变量法获得的解析解具有较高的逼近程度, 两者最大误差不超过 7°C 。该文导出的平均温度出现在 $x=0.577\delta$ 的位置上, 心表温差随着冷却时间的增加而减少。该文中变分法未报道。

关键词: 温度场; 变分法; 中厚板; 试函数; 泛函

中图分类号: TG331 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2012.03.S044

VARIATIONAL SOLUTION OF CONTINUOUS COOLING TEMPERATURE FIELD FOR PLATE AFTER ROLLING DURING FULLY DEVELOPED REGIME

ZHANG Shun-hu, ZHAO De-wen, LIU Nan-jun, GAO Cai-ru

(State Key Laboratory of Rolling and Automation, Northeastern University, Shenyang 110819, China)

Abstract: From the heat conduction, differential equations and definite conditions, a trial function which satisfies boundary condition in advance is set. With the Lagrange multiplier method, the generalized expression of Ritz temperature field functional is first established. The variational solution of temperature field for a plate after rolling during fully developed regime is then first obtained by functional variation. It is a function of plate thick δ , heat transfer coefficient α , specific heat c_p , cooling time t , thermal conductivity λ , plate density ρ , starting cooling temperature T_0 , and water temperature T_f . The comparison between the variational results and those analytical results by the separation variable method shows that the present results have high forecast precision and the maximum error between them is no more than 7%. It is also deduced that the average temperature occurs at the location of $x=0.577\delta$, and the temperature difference between plate surface and centre along the thick direction decreases as the cooling time increases. The method in the present paper has not been reported yet.

Key words: temperature field; variational method; plate; trial function; functional

在厚板冷却过程中, 钢板表面温度比心部温度下降快得多, 厚度方向的温度梯度会造成钢板组织性能不均, 影响钢板的综合性能。因此建立厚板在轧后冷却过程中温度场的解析模型, 对优化控冷设备的工艺参数以及控制厚板的各项性能有着重要

的意义^[1-2]。

对轧后冷却温度场的研究, 尽管 Ritz 在 1965 年就已给出了不稳定温度场的泛函表达式, 但碍于试函数构造的困难性, 泛函对应的变分解未见报道^[3], 目前的研究主要集中在有限元数值模

收稿日期: 2012-03-11; 修改日期: 2013-01-10

基金项目: 中央高校基本科研业务费项目(N110607002); 国家自然科学基金项目(51074052)

通讯作者: 章顺虎(1986—), 男, 安徽马鞍山人, 博士生, 从事现代材料成形力学的研究(E-mail: zhangshunhusci@yahoo.cn).

作者简介: 赵德文(1946—), 男, 辽宁沈阳人, 教授, 博导, 从事现代材料成形力学的研究(E-mail: zhaodw@ral.neu.edu.cn).

刘南君(1990—), 男, 四川攀枝花, 本科生, 从事现代材料成形力学的研究(E-mail: 563654070@qq.com);

高彩茹(1965—), 女, 辽宁沈阳人, 副教授, 博士, 从事金属组织性能控制研究(E-mail: cairugao@ral.neu.edu.cn).

拟上^[4-6]。

基于以上考虑, 本文利用拉格朗日乘子法构建了无初值约束的一维广义温度场泛函, 应用变分原理获得了中厚板轧后冷却正规阶段温度场的解析解。

1 基本方程

在进行泛函的变分解前, 需作出如下假设:

1) 钢板厚度为 2δ , 特征长度为 δ 。

2) 物性参数热传导率 λ 、密度 ρ 、比热 c_p 、对流换热系数 α 、导热系数 $a=\lambda/(\rho c_p)$ 以及水温 T_f 均为常数, 无内热源。

3) 开冷温度 T_0 均匀分布, 当空冷 $t_c=0.2\delta^2/a$ 、水冷 $t_c=0.3\delta^2/a$ 时, 后温度场进入正规阶段^[7]。

对于中厚板, 其长度和宽度远大于厚度, 故可简化为一维问题^[8], 并且考虑到中厚板的对称性, 只需对 $x \geq 0$ 的半块平板进行分析, 如图 1 所示。

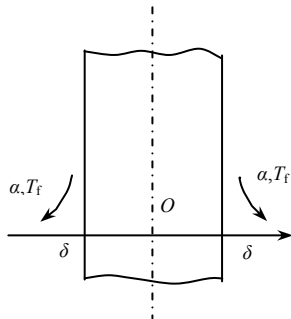


图 1 中厚板冷却过程坐标系

Fig.1 Coordinate of plate cooling process

中厚板的一维导热微分方程及其初边值条件如下。

导热微分方程:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, 0 < x < \delta, t > 0 \quad (1)$$

初值条件:

$$T(x, 0) = T_0 \quad (2)$$

边值条件:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} = 0 \\ -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=\delta} = \alpha [T(\delta, t) - T_f] \end{cases} \quad (3)$$

2 温度场泛函分析

在本文中, 用 Ritz 法进行泛函分析前, 可设定

预先满足边值条件式(3)的试函数:

$$T = C(T_0 - T_f)(1 - C_0 x^2)e^{Kt} + T_f \quad (4)$$

式中: $K = -\mu_1^2 a / \delta^2$ 为冷却率; μ_1 为本征值, 可通过二分法确定。

瞬态温度场基本方程与具有初边值约束的 Ritz 泛函是一一对应的, 为突破设定的试函数同时满足初边值条件的困难, 本文借助拉格朗日乘子法化有初边值约束的泛函为无初值条件约束的泛函。因此, 在 Ritz 泛函^[3]的基础上, 增加一个与初值条件式(2)等价的乘子项, 构建出的广义温度场泛函及其边界条件如下:

$$I = \int_0^\delta \left[\frac{\lambda}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + c_p \rho \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) T \right] dx + \varepsilon \int_0^\delta \frac{1}{2} [T(x, 0) - T_0]^2 dx \quad (5)$$

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} = 0 \\ -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=(1-\varepsilon)\delta-\delta} = \alpha [T(\delta, t) - T_f] \end{cases} \quad (6)$$

式(5)中 $T(x, 0)$ 为初始温度分布, 由试函数式(4)确定, ε 为初值条件修正因子, $T(x, 0)$ 和 ε 分别为:

$$T(x, 0) = C(T_0 - T_f)(1 - C_0 x^2) + T_f \quad (7)$$

$$\varepsilon = A_1 \left(\frac{A_2 + A_3}{A_4 - A_5} \right) + B_1 \left(\frac{B_2}{B_3 - B_4} \right) \quad (8)$$

其中:

$$\begin{aligned} A_1 &= 4 \sin \mu_1; A_2 = 10\lambda C_0^2 e^{2Kt} \delta^3; \\ A_3 &= c_p \rho K e^{2Kt} (15\delta - 10\delta^3 C_0 + 3\delta^5 C_0^2); \\ A_4 &= 5(3 - \delta^2 C_0)(\mu_1 + \sin \mu_1 \cos \mu_1); \\ A_5 &= 2 \sin \mu_1 (15\delta - 10\delta^3 C_0 + 3\delta^5 C_0^2); \\ B_1 &= 5c_p \rho K T_f e^{Kt} \delta / (T_0 - T_f); \\ B_2 &= (3 - \delta^2 C_0)(\mu_1 + \sin \mu_1 \cos \mu_1); \\ B_3 &= 5(3 - \delta^2 C_0)(\mu_1 + \sin \mu_1 \cos \mu_1); \\ B_4 &= 2 \sin \mu_1 (15\delta - 10\delta^3 C_0 + 3\delta^5 C_0^2)。 \end{aligned}$$

由式(4)可得:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial x} = -2CC_0(T_0 - T_f)e^{Kt}x \\ \frac{\partial T}{\partial t} = CK(T_0 - T_f)(1 - C_0 x^2)e^{Kt} \end{cases} \quad (9)$$

将式(4)、式(7)和式(9)代入式(5)可得:

$$I = \frac{2}{3} \lambda C_0^2 (T_0 - T_f)^2 e^{2Kt} \delta^3 C^2 +$$

$$c_p \rho K (T_0 - T_f)^2 e^{2Kt} \left(\delta - \frac{2}{3} \delta^3 C_0 + \frac{\delta^5}{5} C_0^2 \right) C^2 + c_p \rho K T_f (T_0 - T_f) e^{Kt} \left(\delta - \frac{1}{3} \delta^3 C_0 \right) C + \frac{\varepsilon}{2} (T_0 - T_f)^2 \cdot \left[\left(\delta - \frac{2C_0}{3} \delta^3 + \frac{C_0^2}{5} \delta^5 \right) C^2 - 2 \left(\delta - \frac{C_0}{3} \delta^3 \right) + \delta \right] \quad (10)$$

由泛函极值条件 $\partial I / \partial C = 0$ 可得:

$$C = g_1 / (g_2 + g_3) \quad (11)$$

其中:

$$g_1 = 5(3 - \delta^2 C_0) [(T_0 - T_f) \varepsilon - c_p \rho K T_f e^{Kt} \delta];$$

$$g_2 = 20\lambda C_0^2 (T_0 - T_f) e^{2Kt} \delta^3;$$

$$g_3 = (T_0 - T_f) (15\delta - 10\delta^3 C_0 + 3\delta^5 C_0^2) (2c_p \rho K e^{2Kt} + \varepsilon).$$

将式(11)代入式(4)得温度场变分解为:

$$T = \frac{2 \sin \mu_1 (T_0 - T_f)}{\mu_1 + \sin \mu_1 \cos \mu_1} (1 - C_0 x^2) e^{Kt} + T_f \quad (12)$$

由式(12)可得任意时刻平均温度 T_m 为:

$$T_m = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta T dx = \frac{2 \sin \mu_1 (T_0 - T_f)}{\mu_1 + \sin \mu_1 \cos \mu_1} \left(1 - \frac{C_0}{3} \delta^2 \right) e^{Kt} + T_f \quad (13)$$

当终冷温度 T_{m0} 一定时, 由式(13)可得所需冷却时间

t_1 和平均冷却速率 v_m 分别为:

$$t_1 = \frac{1}{K} \ln \frac{3(\mu_1 + \sin \mu_1 \cos \mu_1)(T_{m0} - T_f)}{2 \sin \mu_1 (T_0 - T_f) (3 - C_0 \delta^2)} \quad (14)$$

$$T_m = \frac{K(T_0 - T_{m0})}{\ln \left[\frac{3(\mu_1 + \sin \mu_1 \cos \mu_1)(T_{m0} - T_f)}{2 \sin \mu_1 (T_0 - T_f) (3 - C_0 \delta^2)} \right]} \quad (15)$$

由式(12)和式(13)可得平均温度对应的位置为:

$$x = \frac{\delta}{\sqrt{3}} = 0.577\delta \quad (16)$$

这一结果恰落在文献[9]指出的范围之内, 即平均温度只能出现在 $0.560664 \sim 0.57735\delta$ 范围。平均温度出现位置的确定对于平均温度的测量和控制具有重要意义。

由式(12)亦可导出心表温差 ΔT 为:

$$\Delta T = T(0, t) - T(\delta, t) = \frac{2 \sin \mu_1}{\mu_1 + \sin \mu_1 \cos \mu_1} (T_0 - T_f) C_0 \delta^2 e^{Kt} \quad (17)$$

心表温度对厚板组织性能具有显著影响, 控制不当将会影响产品的质量。心表温差 ΔT_0 预先设定后, 冷却到该设定值对应的冷却时间 t_2 为:

$$t_2 = \frac{1}{K} \ln \left[\frac{\Delta T_0 (\mu_1 + \sin \mu_1 \cos \mu_1)}{2 \sin \mu_1 (T_0 - T_f) C_0 \delta^2} \right] \quad (18)$$

3 例与讨论

某轧后钢板长宽高尺寸为 $14000\text{mm} \times 3000\text{mm} \times 20\text{mm}$, 冷却参数如表 1 所示。

表 1 钢板冷却参数
Table 1 Cooling parameters of rolled plate

初始温度/ (°C)	换热系数/ (W/(m ² ·°C))	比热/ (J/kg·°C)	热导率/ (W/(m ² ·°C))	钢板密度/ (kg/m ³)	冷却时间/s	水温/ (°C)
850	2000	653	26.4	7850	10	25

由表 1 参数可得正规阶段临界时间 $t_c = 5.83\text{s}$, 特征值 $\mu_1 = 0.77441$ 。将本文计算结果与于明采用分离变量法获得的精确解^[10]进行比较, 结果如图 2 所示。

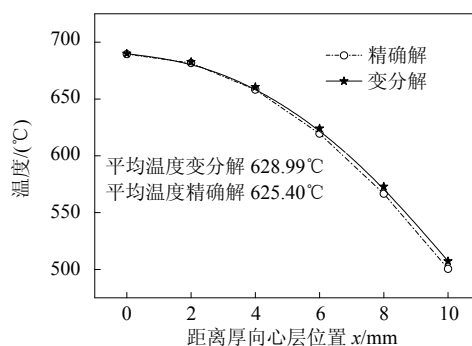


图 2 变分解与精确解结果比较

Fig.2 Comparison between variational and exact solutions

由图 2 可知, 变分解与精确解几乎重合, 变分解对精确解具有较高的逼近程度, 两者的最大误差不超过 7°C , 满足工程误差要求; 不论变分解还是精确解, 钢板温度由心部至表面逐渐降低, 且均呈现抛物线型变化规律。

图 3 为心表温差与时间的变化关系。

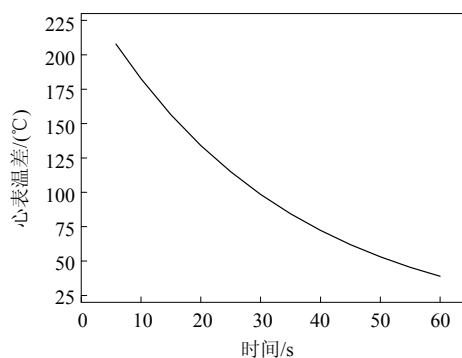


图 3 冷却时间与心表温差关系

Fig.3 Relationship between the cooling time and temperature difference of centre to surface

由图 3 可知, 心表温差随着冷却时间的增加逐渐降低。其中当心表温差为 50°C 时, 由式(18)可算出此时对应的冷却时间 $t_2 = 51.95\text{s}$ 。

4 结论

(1) 合乘子法,首次构建了厚板轧后冷却正规阶段瞬态温度场的广义泛函,并由变分法获得了温度场的解析解。与精确解比较表明,该解与精确解具有很好的一致性,两者误差不超过 7°C 。

(2) 文中推导了平均温度、平均温度出现位置、心表温差、平均冷却速率等解析公式。其中,平均温度出现在 $x=0.577\delta$ 的位置上。分析表明,心表温差随着冷却时间的增加而降低。

(3) 本文解析方法提供了解析瞬态温度场泛函的新思路,且对中厚板轧后冷却工艺的制定以及钢板组织性能的控制具有指导意义。

参考文献:

- [1] 郭晓波,钟莉莉,单晓伟. 厚钢板层流冷却过程中断面温度场有限元分析[J]. 鞍钢技术, 2007, 4: 12—14.
Guo Xiaobo, Zhong Lili, Shan Xiaowei. Analysis of section temperature field of heavy steel plate during laminar cooling by finite element method [J]. Angang Technology, 2007, 4: 12—14. (in Chinese)
- [2] 谭明皓,万俊. 钢板轧后冷却过程温度场仿真[J]. 沈阳工业大学, 2008, 30(5): 531—534.
Tan Minghao, Wan Jun. Thermal field simulation of steel plate runout table cooling process [J]. Journal of Shenyang University of Technology, 2008, 30(5): 531—534. (in Chinese)
- [3] 王国栋,赵德文. 现代材料成形力学[M]. 沈阳: 东北大学出版社, 2004: 44.
Wang Guodong, Zhao Dewen. Modern material forming mechanics [M]. Shenyang: Northeastern University Press, 2004: 44. (in Chinese)
- [4] Xiong Shangwu, Liu Xianghua, Wang Guodong. A three-dimensional finite simulation of the vertical-horizontal rolling process in the width reduction of slab [J]. Journal of Materials Processing Technology, 2000, 101(1/2/3): 146—151.
- [5] Maciej P, John G L. A study of thermal-mechanical modeling of hot flat rolling [J]. Journal of Materials Shaping Technology, 1989, 7(2): 117—126.
- [6] Serajzadeh S, Taheri A K, Mucciardi F. Prediction of temperature distribution in the hot rolling of slabs [J]. Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering, 2002, 10(2): 185—203.
- [7] Patankar S V, Liu C H, Sparrow E M. Fully developed flow and heat transfer in ducts having streamwise-periodic variations of cross-sectional area [J]. Journal of Heat Transfer, 1977, 99(2): 180—187.
- [8] Notsu T, Konishi M, Imai J. Optimal water cooling control for plate rolling [J]. International Journal of Innovative Computing, Information and Control, 2008, 4(12): 316—319.
- [9] 辛荣昌,陶文铨. 非稳态导热充分发展阶段的分析解[J]. 工程热物理论, 1993, 14(1): 80—83.
Xin Rongchang, Tao Wenquan. Analytical solution of unsteady heat conduction in fully developed regime [J]. Journal of Engineering Thermophysics, 1993, 14(1): 80—83. (in Chinese)
- [10] 于明. 中厚板轧后冷却过程温度场解析解研究与应用[D]. 沈阳: 东北大学, 2008.
Yu Ming. Research and application of analytical solution for temperature field in accelerated cooling process of plate [D]. Shenyang: Northeastern University, 2008. (in Chinese)

(上接第 362 页)

- [9] 张秀华. 燃气爆炸冲击作用下钢框架抗爆性能试验研究与数值模拟[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2011: 23—38.
Zhang Xiuhua. Experimental research and numerical simulation on blast resistance performance of steel frames [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2011: 23—38. (in Chinese)
- [10] 叶宏,崔京浩,王志浩. 室内燃气爆炸机理、危害及减灾措施[C]. 第二届全国结构工程学术会议论文集(II). 北京: 《工程力学》杂志社, 1993.
Ye Hong, Cui Jinghao, Wang Zhihao. Indoor gas explosion mechanism, hazards and mitigation measures [C]. Proceedings of the 2nd National Conference on Structure Engineering (II). Beijing: Engineering Mechanics, 1993. (in Chinese)
- [11] LS-DYNA keyword user's manual [M]. California: Livermore Software Technology Corporation, 2006.
- [12] O'Daniel J L, Krauthammer T. Assessment of numerical simulation capabilities for medium structure interaction systems under explosive loads [J]. Computers and Structure, 1997, 63(5): 87.