文章编号：1000-4750(2012)03-0021-06

基于 SAND 列式的桁架结构优化问题序列线性规划算法

杜剑明，张维声，郭 旭

(工业装备结构分析国家重点实验室，大连理工大学力学系，大连 116023)

摘 要：该文提出了一种基于协同分析和设计列式(即 SAND 列式，Simultaneous Analysis and Design)和序列线性规划(Sequential Linear Programming)技术的桁架结构优化新方法。与传统列式下将隐式响应函数(如位移、应力等)于设计变量(如杆件截面积等)处作线性展开的做法不同，以桁架结构为例，该文在 SAND 列式下，采用杆件截面积和结构节点位移同时作为设计/分析变量，仅对杆件协调条件这一显式双线性函数予以线性近似并构造 LP 子问题。通过求解一系列 LP 子问题，可以得到优化问题的近似最优解。与传统优化列式下的 SLP 方法相比，该文方法不仅设计变量运动极限的选取相对容易，而且线性近似的误差可以精确估计。数值算例表明，采用该文算法可以快速、稳定地得到优化问题的近似最优解。

关键词：结构优化；SAND 列式；序列线性规划；协调条件；运动极限

中图分类号：TU318; O221 **文献标志码**：A

SEQUENTIAL LINEAR PROGRAMMING ALGORITHM BASED ON THE SAND FORMULA FOR TRUSS OPTIMIZATION

DU Jian-ming , ZHANG Wei-sheng , GUO Xu

(State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment Faculty of Vehicle Engineering and Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116023, China)

Abstract: In this paper, a SLP (Sequential linear Programming) algorithm based on SAND (Simultaneous Analysis and Design) formula is proposed. It is different from the traditional practice of a linear expansion of implicit response functions (e.g. displacement, stress etc.) at the designed variable (e.g. cross sectional area of bar members). Taking a truss structure as an example, using SAND formula, with both bar cross sectional areas and node displacements as the design variables, a linear approximation to the compatibility conditions using explicit bilinear function is made and an LP sub-problem is constructed. By solving a series of LP sub-problems, a best approximat solution for this optimization problem can be obtained. Comparing to the SLP algorithm under traditional optimization formula, this method has 2 advantages: The choice of the move limit of the designed variable is easier; the error involved in the linear approximation can be accurately estimated. Worked examples demonstrate that this algorithm is able to obtain the approximate optimized solution to the optimization problem in a fast yet stable manner.

key words: structure optimization; SAND formula; sequential linear programming; compatibility condition; move limit

---

收稿日期：2010-06-01；修改日期：2010-12-21

基金项目：国家自然科学基金项目(10925209)；973 计划项目(2010CB832703)

通讯作者：郭 旭(1971－)，男，沈阳人，教授，博士，博导，从事结构优化、纳米力学研究(E-mail: guoxu@dlut.edu.cn).

作者简介：杜剑明(1980－)，男，大连人，博士，从事结构优化研究(E-mail: dujmdl@sina.com)；

张维声(1982－)，男，大连人，博士，从事结构优化研究(E-mail: dr.vincent.zhang@gmail.com).

由于资源、能源的日益短缺，以减轻结构重量、较少资源使用为目标的结构优化技术日益受到广泛重视。为了解决结构优化问题人们发展了各种优化算法，这些算法大致可以分为准则法(OC)和数学规划法(MP)两大类。准则法首先通过人为确定或理性推导得到最优解需满足的必要条件，然后以其为准则构造迭代算法寻求最优解。规划类算法数学基础相对严密，它利用目标以及约束函数的灵敏度信息确定下山方向，并采用各类一维搜索技术确定前进步长。由于优化问题中的应力和位移等响应量往往是设计变量的隐式非线性函数，因此通常需要求解一个非线性规划问题。在数学规划类解法中，序列线性规划法(SLP)由于实现简单、能够求解规模较大的优化问题因而获得了广泛应用。序列线性规划的基本思想是：在当前设计点 $\boldsymbol{A}^{(k)}$ (k 标识迭代次数)处对非线性的性态约束函数做线性展开得到一个线性规划问题 $PL^{(k)}$ 。如果上述线性规划问题有解并记其为 $\boldsymbol{A}^{(k+1)}$ ，则继续在 $\boldsymbol{A}^{(k+1)}$ 处构造线性规划问题 $PL^{(k+1)}$ 并求解。重复上述过程直至收敛。

上述序列线性规划算法虽然获得了许多成功的应用，但也存在一些有待改进的问题。譬如在某些情况下，即使原优化问题有解，线性化之后的优化问题也可能无解。序列线性规划所得最优解的可行性往往也不能保证。在 SLP 方法中，运动极限的选取对优化过程有很大影响。过小的运动极限往往导致收敛缓慢，而过大的运动极限会使 LP 问题的解偏离原问题的可行域。另外，由于每个约束函数的非线性程度不同，有时可能为了保证少数几个约束函数的线性近似程度而被迫选取很小的运动极限，这将大大降低了优化效率。

针对桁架结构应力以及位移约束下的尺寸优化问题，本文提出了一种基于 SAND 列式(Simultaneous Analysis and Design)[1−2]和 SLP 技术的结构优化新方法。与传统列式下将隐式响应函数(如位移、应力等)于设计变量(如杆件截面积等)处作线性展开的做法不同，以桁架结构为例，本文在 SAND 列式下，把杆件截面积和结构节点位移同时作为设计/分析变量，仅对杆件协调条件这一显式双线性函数予以线性近似，通过构造并求解一系列 LP 子问题得到近似最优解。与传统优化列式下的 SLP 方法相比，本文方法不仅设计变量运动极限的选取相对容易，而且还可以精确估计线性近似的误差。数值算例表明，采用本文算法可以快速、稳定地得到优化问题的最优解。

1 传统优化列式下的序列线性规划法

以桁架结构在应力以及位移约束下重量极小的尺寸优化问题为例，传统列式以杆件横截面积作为设计变量，把位移应力等作为设计变量的隐式函数，得到问题的如下数学描述：

P

find $\boldsymbol{A}$

min $\sum_{i=1}^{n^m}\rho_i l_i A_i$

s.t.

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{u}_j(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{p}_j,\quad j=1,\cdots,n^l \tag{1}$$

$$\sigma_{ij}(\boldsymbol{A})=E_i\boldsymbol{r}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_j/l_i,\ \ i=1,\cdots,n^m,\ j=1,\cdots,n^l \tag{2}$$

$$\sigma_i^l\leqslant\sigma_{ij}\leqslant\sigma_i^u,\quad i=1,\cdots,n^m,\ j=1,\cdots,n^l \tag{3}$$

$$u_k^l\leqslant u_k\leqslant u_k^u,\quad k=1,\cdots,n^d \tag{4}$$

$$A_i^l\leqslant A_i\leqslant A_i^u,\quad i=1,\cdots,n^m \tag{5}$$

在上述列式 P 中： n^m 、 n^l 和 n^d 分别为结构中的杆件总数，工况数以及位移约束的个数； $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{A})$ 为结构的总刚度矩阵； $\boldsymbol{u}_j(\boldsymbol{A})$ 和 $\boldsymbol{p}_j$ 分别为对应于工况 j 的节点位移向量和外荷载; $\sigma_{ij}(\boldsymbol{A})$ 为 j 工况下 i 杆的应力； $\boldsymbol{r}_i$ 、 l_i 和 E_i 分别是 i 杆的方向余弦、长度以及弹性模量； σ_i^l 和 σ_i^u 分别为 i 杆许用应力的上限、下限； u_k^l 和 u_k^l 为第 k 个位移约束的上限、下限。

在当前设计点 $\boldsymbol{A}^{(k)}$ (k 标识迭代次数)处对非线性的性态约束函数作线性展开，可得如下的线性规划问题：

$PL^{(k)}$

find $\boldsymbol{A}$

min $\sum_{i=1}^{n^m}\rho_i l_i A_i$

s.t.

$$\sigma_i^l\leqslant\sigma_{ij}(\boldsymbol{A}^{(k)})+\sum_{i=1}^{n^m}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial A_p}\Big|_{A=A_0}(A_p-A_p^{(k)})\leqslant\ \sigma_i^u,$$

$$i=1,\cdots,n^m,\ j=1,\cdots,n^l \tag{6}$$

$$u_k^l\leqslant u_k(\boldsymbol{A}^{(k)})+\sum_{i=1}^{n^m}\frac{\partial u_k}{\partial A_p}\Big|_{A=A_0}(A_p-A_p^{(k)})\leqslant u_k^u,$$

$$k=1,\cdots,n^d \tag{7}$$

$$\max(A_i^{(k)}-\Delta A_i^{(k)},A_i^l)\leqslant A_i\leqslant\min(A_i^{(k)}+\Delta A_i^{(k)},A_i^u),$$

$$i=1,\cdots,n^m \tag{8}$$

这里 $\Delta A_i^{(k)}$ 是为了保证线性化精度对设计变量 A_i 所施加的运动极限。

2 基于SAND列式的序列线性规划法

为了解决前文所述传统列式下SLP算法的某些困难，本文提出了一种在SAND列式(Simultaneous Analysis and Design)下利用SLP技术求解应力以及位移约束下重量极小化问题的新方法。问题P(为方便计仅考虑单工况情形)的SAND列式可以表示为：

$P-SAND$

find $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{f}$

min $\sum_{i=1}^{n^m}\rho_i l_i A_i$

s.t.

$$\boldsymbol{Bf}=\boldsymbol{p} \tag{9}$$

$$f_i=E_iA_i\boldsymbol{r_i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}/l_i,\quad i=1,\cdots,n^m \tag{10}$$

$$\sigma_i^l\leqslant\sigma_i\leqslant\ \sigma_i^u,\quad i=1,\cdots,n^m \tag{11}$$

$$u_k^l\leqslant u_k\leqslant u_k^u,\quad k=1,\cdots,n^d \tag{12}$$

$$A_i^l\leqslant A_i\leqslant A_i^u,\quad i=1,\cdots,n^m \tag{13}$$

在上述优化列式中，原来作为杆件截面积$\boldsymbol{A}$的隐式函数的结构响应量位移$\boldsymbol{u}$和杆件内力$\boldsymbol{f}$也被当作设计变量纳入优化列式。相应地，把结构的整体平衡方程式(9)和杆件的内力-伸长协调条件式(10)作为等式约束条件引入优化列式。与仅仅采用横截面积作为设计变量的传统列式相比，在SAND列式中无需通过求解平衡方程获得位移、应力等响应量，而且由于此问题不再含有隐式的约束函数，灵敏度分析也大为简化。

观察优化问题$P-SAND$，我们发现其非线性仅仅来源于式(10)中的协调条件。式(10)是面积和位移的双线性函数。在$\boldsymbol{A}^{(k)}$和$\boldsymbol{u}^{(k)}$处对式(10)进行变换，有：

$$f_i=E_i(A_i^{(k)}\boldsymbol{r}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}^{(k)}+A_i^{(k)}\boldsymbol{r}_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^{(k)})+(A_i-A_i^{(k)})\boldsymbol{r}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}^{(k)}+\Delta A\boldsymbol{r}_i^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{u})/l_i \tag{14}$$

忽略式(14)中的二次项$\Delta A_i\boldsymbol{r}_i^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{u}$可得：

$$f_i\approx f_i^L=E_i(A_i^{(k)}\boldsymbol{r}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}^{(k)}+A_i^{(k)}\boldsymbol{r}_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^{(k)})+(A_i-A_i^{(k)})\boldsymbol{r}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}^{(k)})/l_i \tag{15}$$

值得注意的是：如果在当前点$\boldsymbol{A}^{(k)}$和$\boldsymbol{u}^{(k)}$处使运动极限$\Delta\boldsymbol{A}$和$\Delta\boldsymbol{u}$的取值适当小，则式(15)将是协调条件的一个很好的线性近似。特别地，如果令$\overline{\Delta A}=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n^m}|\Delta A_i|$，$\overline{\Delta u}=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n^d}|\Delta u_k|$，则有：

$$|(f_i-f_i^L)l_i/E_i|\leqslant 6\overline{\Delta A}\overline{\Delta u},\qquad\forall\, i=1,\cdots,n^m \tag{16}$$

即式(15)对协调条件的近似程度对所有杆件来说是一致的。在传统列式中，式(6)和式(7)对不同响应函数的近似程度取决于各自的二阶导数，但这些二阶导数的值往往是未知的，因此一些作者发展了各种各样的技术来确定合适的运动极限[3－7]。而由上述讨论可知，在本文提出的基于SAND列式的SLP算法中，运动极限的选取相对容易，特别是线性近似的误差是完全可以精确估计的。

将式(15)代入式(9)可得：

$$\boldsymbol{Bf}\approx\boldsymbol{Bf}^L=\sum_{i=1}^{n^m}\boldsymbol{r_i}f_i^L=\sum_{i=1}^{n^m}A_i^{(k)}E_i\boldsymbol{r_i}\boldsymbol{r_i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}/l_i+\sum_{i=1}^{n^m}A_iE_i\boldsymbol{r_i}\boldsymbol{r_i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}^{(k)}/l_i-\sum_{i=1}^{n^m}A_i^{(k)}E_i\boldsymbol{r_i}\boldsymbol{r_i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}^{(k)}/l_i \tag{17}$$

记

$$\sum_{i=1}^{n^m}A_i^{(k)}E_i\boldsymbol{r_i}\boldsymbol{r_i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}^{(k)}/l_i=\boldsymbol{p}^{(k)},$$

$$\sum_{i=1}^{n^m}A_i^{(k)}E_i\boldsymbol{r_i}\boldsymbol{r_i}^{\mathrm{T}}/l_i=\boldsymbol{K}(\boldsymbol{A}^{(k)}),$$

$$\sum_{i=1}^{n^m}E_i\boldsymbol{r_i}\boldsymbol{r_i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}^{(k)}/l_i=\boldsymbol{s_i}^{(k)},$$

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}^{(k)})=[\boldsymbol{s}_1^{(k)}\ \cdots\ \boldsymbol{s}_{n^m}^{(k)}]。$$

可得在当前点$\boldsymbol{A}^{(k)}$和$\boldsymbol{u}^{(k)}$处，优化问题$P-SAND$的线性近似为：

$P-SAND-LP^{(k)}$

find $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{u}$

min $\sum_{i=1}^{n^m}\rho_i l_i A_i$

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{A}^{(k)})\boldsymbol{u}+\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}^{(k)})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}^{(k)} \tag{18}$$

$$\sigma_i^l\leqslant E_i\boldsymbol{r_i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}/l_i\leqslant\sigma_i^u,\quad i=1,\cdots,n^m \tag{19}$$

$$\max(u_i^{(k)}-\Delta u_i,u_i^l)\leqslant u_i\leqslant\min(u_i^{(k)}+\Delta u_i,u_i^u),\quad i=1,\cdots,n^d \tag{20}$$

$$\max(A_i^{(k)}-\Delta A_i,A_i^l)\leqslant A_i\leqslant\min(A_i^{(k)}+\Delta A_i,A_i^u),\quad i=1,\cdots,n^m \tag{21}$$

这里ΔA_i和Δu_i分别是A_i和u_i的运动极限。求解上述以$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{u}$为变量的线性规划问题并所得到的最优解处再次作线性展开，循环往复直至收敛。

3 数值算例

本节将通过多个算例证明本文算法的有效性。为提高优化求解过程的稳定性，在实际计算中首先对初始设计采用射线步处理将其拉回至可行区域。本节中的所有算例均取自文献[8－9]，其中参数采用了英制。为了在数字上直观地和参考文献算例进行比较，这里并不采用单位换算，而是利用量纲分析和相似原理，把文献算例参数无量纲化后再赋予国际单位cm、kg等。

3.1 10 杆平面杆桁架算例

如图 1 所示的 10 杆平面桁架，可参见文献[8]第 66 页，单位换成国际单位制。为了便于与文献[8,10－13]中的结果进行比较，这里材料弹性模量取为 1GPa，密度取为 10^5kg/m^3，全部杆件的许用应力均取为±2.5MPa。研究了 2 个单工况情况：1) P_1=1kN，P_2=0；2) P_1=1.5kN，P_2=0.5kN。一共计算了 4 个问题：问题 1 和问题 3 分别是第 1)种载荷情况下没有位移约束和有位移约束的解，问题 2 和问题 4 分别是第 2)中载荷情况下没有位移约束和有位移约束的解。各可动点 y 方向的位移允许值均为±0.2cm。各杆截面积的下限值均为 0.1cm^2，初始设计均为 10cm^2。为了加快收敛速度并保证最优解的严格可行性，在前 10 次迭代中取每个位移变量和每个截面积变量的运动极限分别为 0.2 和 4.0，然后令截面积的运动极限每次减半直至 0.05。

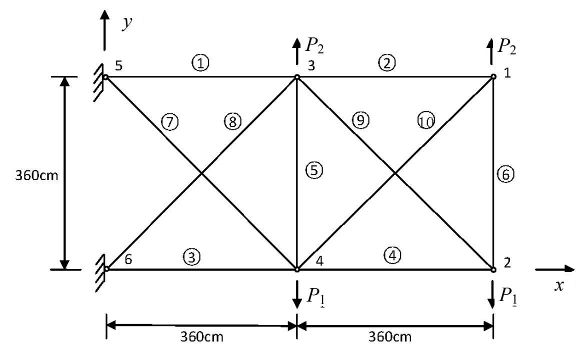
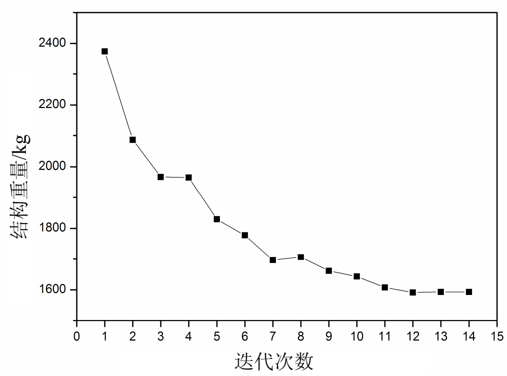


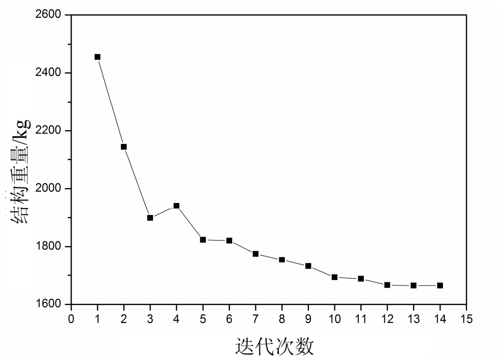
图 1 10 杆平面桁架

Fig.1 Ten bar truss structure

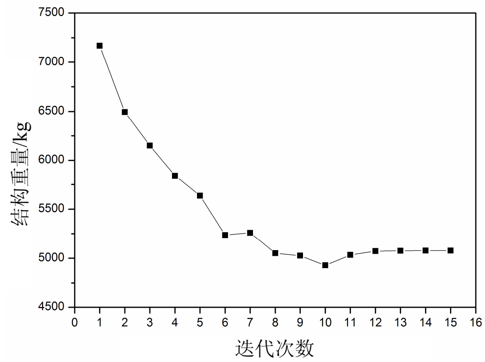
对于本例题，经 17 次左右迭代分别得到 4 个问题的近似最优解 1593.2kg(第 1 种工况应力约束)、1664.5kg(第 2 种工况应力约束)、5076.7kg(第 1 种工况应力+位移约束)、4676.9kg(第 2 种工况应力+位移约束)。图 2(a)~图 2(d)分别给出了对应的迭代历史。由图 2 可见收敛过程相当平稳。



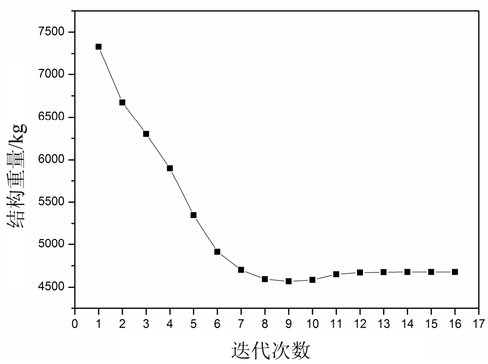
(a) 工况 1 应力约束问题迭代历史



(b) 工况 2 应力约束问题迭代历史



(c) 工况 1 应力约束+位移约束问题迭代历史



(d) 工况 2 应力约束+位移约束问题迭代历史

图 2 10 杆桁架结构各工况下的迭代历史

Fig.2 Iteration history of 10-bar truss in different cases

3.2 25 杆空间桁架算例

如图 3 所示的 25 杆空间桁架，考虑同时作用的两种荷载工况和应力、位移约束。材料弹性模量取为 1GPa，密度 10^5kg/m^3，由对称性，将 25 杆分为 8 类。杆件分组情况和许用应力，以及两个载荷工况详见文献[8]第 70 页。位移约束是节点 1 和节点 2 在 x 方向、y 方向的位移均不超过±0.35cm。各杆截面积的下限值均为 0.01cm^2，初始设计均为 1cm^2。为了加快收敛速度并保证最优解的严格可行性，在前 10 次迭代中取每个位移变量和每个截面积变量的运动极限分别为 0.01 和 0.3，然后令截面积的运动极限每次减半直至 0.05。经 15 次迭代得到近似最

优解 545.13kg。

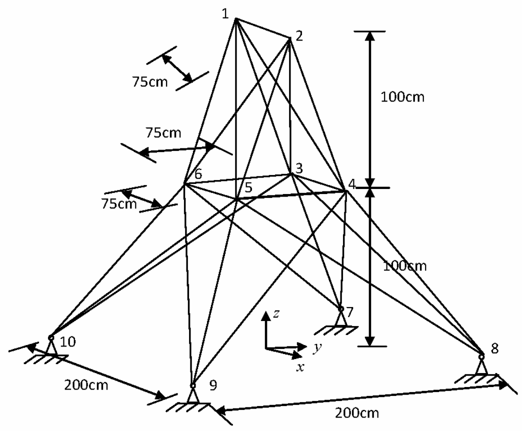
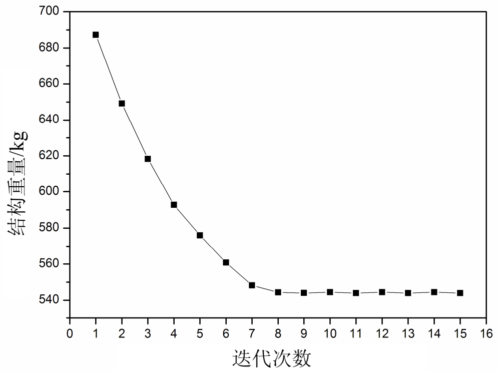


图 3　25 杆空间桁架

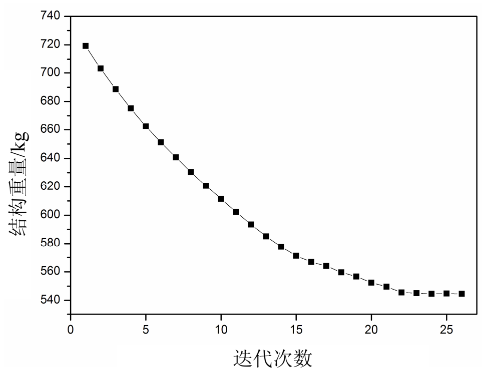
Fig.3　Twenty-five bar truss structure

迭代历史如图 4(a)所示，收敛过程相当平稳。

如果每个位移变量和每个截面积变量的运动极限始终分别取为 0.01 和 0.1，则经 26 次迭代收敛到近似最优解 544.97lkg。迭代历史如图 4(b)所示，收敛过程亦相当平稳。由此可见本文算法对所选择的运动极限并不敏感。



(a) 25 杆桁架优化问题迭代历史(运动极限 1)



(b) 25 杆桁架优化问题迭代历史(运动极限 2)

图 4　25 杆桁架结构不同运动极限下的迭代历史

Fig.4　Iteration history of 25-bar truss in different move limits

3.3　200 杆平面杆桁架算例

如图 5 所示的 200 杆空间桁架，考虑同时作用的两种荷载工况和应力、位移约束。具体的计算参数可见文献[9]。

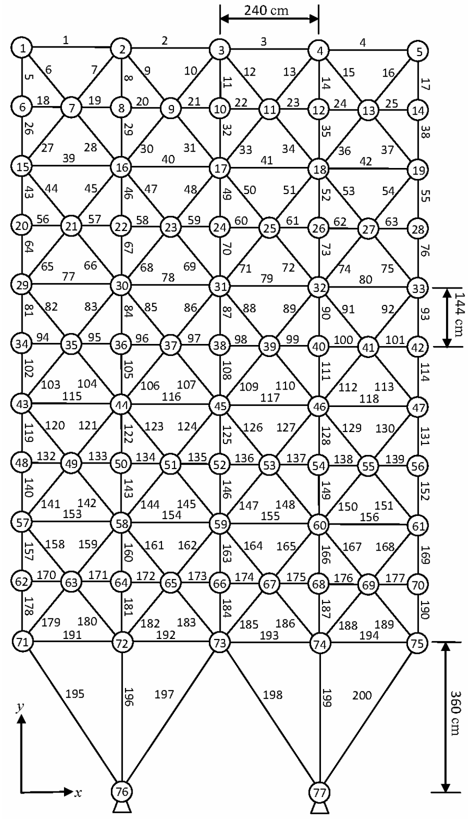
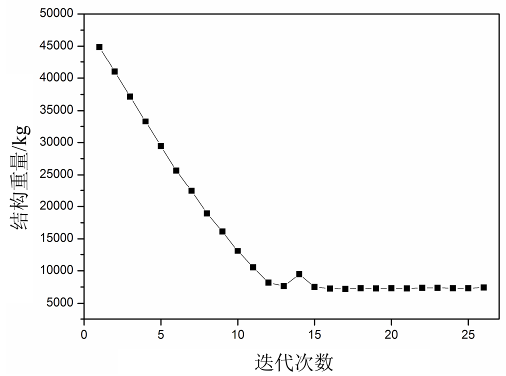


图 5　200 杆平面桁架

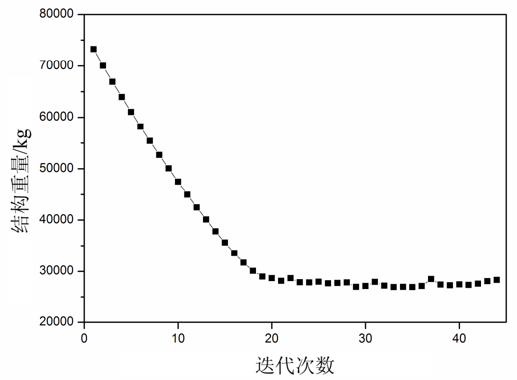
Fig.5　Two-hundred bar truss structure

在只考虑应力约束的情况，采用由射线步得到的面积和位移作为初始设计，每个位移变量和每个截面积变量的运动极限分别取为 0.2 和 0.4，经过 60 次迭代后，令截面积的运动极限每次减少 10%直至 0.01。经过 26 次迭代，得到近似最优解 7422kg。迭代历史如图 6(a)所示，收敛过程相当平稳。

对于加有位移约束和应力约束的情形，采用与无位移约束相同的运动极限，经 44 次迭代得到近似最优解 28329kg。迭代历史如图 6(b)所示，收敛过程相当平稳。



(a) 200 杆桁架应力约束优化问题迭代历史



(b) 200 杆桁架应力+位移约束优化问题迭代历史

图 6　200 杆桁架结构不同约束条件下的迭代历史

Fig.6　Iteration history of 200-bar truss in different constraints

4　结论

针对结构尺寸优化问题，本文提出了一种基于SAND 列式的序列线性规划法。通过对双线性的协调条件予以线性近似，构造了以尺寸参数 $\boldsymbol{A}$ 和位移 $\boldsymbol{u}$ 为设计变量的 SLP 问题。本文方法的特点在于线性近似的误差完全可以精确地估计，而且这种估计对每个协调约束函数都是一致的。因此，只要根据误差估计合适地选取运动极限，就可以保证在迭代过程中获得的每一个最优解都是近似可行的。较之传统列式下的 SLP 算法，虽然本文提出的方法中设计变量有所增加，但由于无需进行结构响应以及灵敏度分析，相应的计算工作量大大减少。有关传统列式和 SAND 列式计算量的分析对比可参见文献[14]。本文的讨论虽然仅针对桁架结构展开，但所提出的方法也同样适用于线弹性、小变形假定下框架结构以及经过有限元离散之后的连续体结构优化。另外，约束条件式(18)和式(19)中的矩阵都具有高度稀疏的结构，因此采用 LP 问题的稀疏算法求解可以进一步降低存储量、提高效率。另外值得指出的是，采用本文所提出的算法，还可以有效解决桁架结构应力约束下拓扑优化中存在的所谓“奇异最优解”问题。

参考文献：

[1] Haftka R.T. Simultaneous analysis and design [J]. AIAA Journal, 1985, 23: 1099－1103.

[2] Kirsch U, Rozvany G I N. Alternative formulations of structural optimization [J]. Structural Optimization, 1994, 7(1/2): 32－41.

[3] Lamberti L, Pappalettere C. Comparison of the numerical efficiency of different sequential linear programming based algorithms for structural optimization problems [J]. Computers and Structures, 2000, 76: 713－728.

[4] Lamberti L, Pappalettere C. Improved sequential linear programming formulation for structural weight minimization [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2004, 193: 3493－3521.

[5] Lamberti L, Pappalettere C. Move limits definition in structural optimization with sequential linear programming. Part 1: Optimization algorithm [J]. Computers and Structures, 2003, 81: 197－213.

[6] Lamberti L, Pappalettere C. Move limits definition in structural optimization with sequential linear programming. Part II: Numerical examples [J]. Computers and Structures, 2003, 81: 215－238.

[7] Yu Chen T. Calculation of the move limits for the sequential linear programming method [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1993, 36: 2661－79.

[8] 钱令希. 工程结构优化设计[M]. 北京: 水利电力出版社, 1983.
Qian Lingxi. Optimal design of engineering structures [M]. Beijing: China Water Power Press, 1983. (in Chinese)

[9] 豪格 E J, 阿罗拉 J S. 实用最优设计: 机械系统与结构系统[M]. 北京: 科学出版社, 1985.
Haug E J, Arora J S. Applid optimal design: Mechanical and structural systems [M]. Beijing: Science Press, 1985. (in Chinese)

[10] Schmit L A, Farshi B. Some approximation concepts for structural synthesis [J]. AIAA Journal, 1974, 12(2): 231－233.

[11] Schmit L A, Miura H. Approximation concepts for efficient structural synthesis [R]. Washington: NASA Contractor Report, NASA-CR-2552, 1976.

[12] Venkayya V B. Design of optimum structures [J]. Computers and Structures, 1971, 1(1/2): 265－239.

[13] Gellatly R A, Berke L. Optimal structural design [R]. Ohio: USAF Technical Report, AFFDL-TR-70-165, 1971.

[14] Wang Q, Arora J S. Alternative formulations for structural optimization: An evaluation by using trusses [J]. AIAA Journal, 2005, 43: 2202－2209.