文章编号: 1000-5641(2011)02-0010-07

具有正负系数的二阶中立型方程的振动性定理

杨甲山

(邵阳学院 理学与信息科学系, 湖南 邵阳 422004)

摘要: 利用Banach空间的不动点原理, 通过引入参数函数和Riccati变换, 获得了该类方程存在非振动解的新的准则, 并同时得到了该类方程振动的判别准则, 这些准则改善了对方程的条件限制, 所得结论推广并改进了现有文献中的一系列结果.

关键词: 正负系数; 中立型泛函数微分方程; 非线性; 振动和非振动; Riccati变换

中图分类号: O175.7 **文献标识码**: A **DOI**: 10.3969/j.issn.1000-5641.2011.02.002

Oscillation theorems of second order neutral differential equations with positive and negative coefficients

YANG Jia-shan

(*Department of Science and Information, Shaoyang University, Shaoyang Hunan 422004, China*)

Abstract: Using the fixed point theorem in Banach space, and by introducing parameter function and the generalized Riccati transformation, a new nonoscillation criteria for the equation was obtained. In addition, a sufficient condition for oscillation of the equation was proposed. These criteria can improve the restriction of the conditions for the equation. Some existed results in the literatures have been further improved and extended.

Key words: positive and negative coefficient; neutral functional differential equation; nonlinear; oscillation and nonoscillation; Riccati transformation

0 引言及问题的提出

关于中立型时滞微分方程的振动性和渐近性的研究, 在理论上和实际应用中都有着非常重要的意义. 因此, 在这一领域出现了许多研究成果[1−11]. 近年来, 在计算机科学研究中出现了一些同时具有正负系数的中立型时滞微分方程的数学模型, 使得这类方程的研究日益受到重视[1−10]. 但我们注意到具有正负系数的一阶中立型方程振动性的研究成果较多, 而具有正负系数的高阶的中立型方程的振动和非振动定理尚不多见. 本文考虑具有正负系数的二阶非线性中立型时滞泛函微分方程

$$[x(t)+P(t)x(t-\tau)]''+\sum_{i=1}^{m}Q_i(t)f_i\left(x(t-\sigma_i)\right)-\sum_{j=1}^{l}R_j(t)g_j\left(x(t-\delta_j)\right)=0(t\geqslant t_0), \qquad (1)$$

收稿日期: 2010-04

基金项目: 湖南省教育厅科研重点项目(09A082).

作者简介: 杨甲山, 男, 副教授, 研究方向为微分差分方程. E-mail: syxyyjs@tom.com.

其中$\tau>0$, $\sigma_i\geqslant 0$, $\delta_j\geqslant 0$, $t_0>0$为常数($i=1,2,\cdots,m$, $j=1,2,\cdots,l$,下同, 略); $m\geqslant 1, l\geqslant 1$为正整数; $P\in C([t_0,+\infty),\mathbf{R})$且$P(t)\neq 0$, Q_i, $R_j\in C([t_0,+\infty),\mathbf{R}^+)$; f_i, $g_j\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$且$xf_i(x)>0(x\neq 0)$, $xg_j(x)>0(x\neq 0)$.

关于方程(1)的特殊情形, 许多文献作过研究. 如文献[2-9]分别研究了如下具有正负系数的线性方程

$$[x(t)+px(t-\tau)]''+Q(t)x(t-\sigma)-R(t)x(t-\delta)=0, \tag{2}$$

及非线性方程

$$[x(t)+P(t)x(t-\tau)]''+Q(t)f(x(t-\sigma))-R(t)g(x(t-\delta))=0, \tag{3}$$

$$[r(t)(x(t)+P(t)x(t-\tau))']'+Q(t)f(x(t-\sigma))-R(t)g(x(t-\delta))=0 \tag{4}$$

的振动性, 在$\int_{t_0}^{+\infty}tQ(t)\mathrm{d}t<+\infty$, $\int_{t_0}^{+\infty}tR(t)\mathrm{d}t<+\infty$及"对$t\geqslant t_0$及任意常数$\alpha>0$均有$\alpha Q(t)-R(t)\geqslant 0$"成立的条件下得到了方程存在非振动解的结论; 文献[6]在"$R(t)$最终为负"的条件下给出了方程(4)振动的一个充分条件. 本文的目的是要改善对方程的这些条件限制, 利用Banach空间的不动点原理, 通过引入参数函数和Riccati变换, 并结合一些分析技巧, 建立方程(1)振动和非振动的若干新的准则, 所得定理推广并改进了现有文献中的一系列结论.

$x(t)$称为方程(1)的解, 如果它满足方程(1)且

$$x(t)\in C\left([t_{-1},+\infty],\mathbf{R}\right), x(t)+P(t)x(t-\tau)\in C^2\left([t_0,+\infty],\mathbf{R}\right),$$

这里$t_{-1}=\min\left\{t_0-\tau,\ t_0-\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\{\sigma_i\},\ t_0-\max\limits_{1\leqslant j\leqslant l}\{\delta_j\}\right\}$; 方程(1)的解称为是最终正解(或最终负解), 如果存在常数$\mu>t_0$, 使得当$t\geqslant\mu$时, $x(t)>0$(或$x(t)<0$); 方程(1)的一个非零解$x(t)$称为是振动的, 如果它既不最终为正也不最终为负, 否则称它是非振动的; 方程(1)称为是振动的, 如果它的所有非零解都是振动的. 为了方便, 在本文中假设关于t的不等式(如未说明的)是对一切充分大的实数t成立的. 并考虑如下假设:

(H_1) $f_i(0)=0, g_j(0)=0$; 且f_i, g_j均满足局部**Lipchitz**条件, 即对于某区域$\mathbf{D}$, 存在常数$L_{f_i}(\mathbf{D})>0$, $L_{g_j}(\mathbf{D})>0$, 使得对$\forall x\geqslant 0, y\geqslant 0$, 有

$$|f_i(x)-f_i(y)|\leqslant L_{f_i}(\mathbf{D})\,|x-y| \text{ 和 } |g_j(x)-g_j(y)|\leqslant L_{g_j}(\mathbf{D})\,|x-y|;$$

(H_2) $\int_{t_0}^{+\infty}t\left[\sum\limits_{i=1}^{m}Q_i(t)\right]\mathrm{d}t<+\infty, \int_{t_0}^{+\infty}t\left[\sum\limits_{j=1}^{l}R_j(t)\right]\mathrm{d}t<+\infty$;

(H_3) 存在正数$\alpha_i>0$, $\beta_j>0$, 使得$\frac{f_i(t)}{t}\geqslant\alpha_i$, $\frac{g_j(t)}{t}\leqslant\beta_j$;

(H_4) $\sigma_i\equiv\sigma\geqslant\delta_j, \sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_iQ_i(t)-\sum\limits_{j=1}^{l}\beta_jR_j(t-\sigma+\delta_j)\geqslant 0$.

1 方程的非振动准则

定理 1 设方程(1)满足条件(H_1)和(H_2), $0<\bar p<1$并且最终有$P(t)\geqslant 0$, 则方程(1)一定存在一个最终正解, 这里$\bar p=\limsup\limits_{t\to+\infty}\{P(t)\}$.

证 明 考虑**Banach**空间$\mathbf{B}=\{x=x(t)|x(t)\in C([t_0,+\infty),\mathbf{R})$且有界$\}$, $\mathbf{B}$上的范数定义为$||x||=\sup\limits_{t\geqslant t_0}|x|$. 定义$\mathbf{B}$的子集$\mathbf{B}_1=\{x\in\mathbf{B}: a_1\leqslant x(t)\leqslant A_1, t\geqslant t_0\}$, 则$\mathbf{B}_1$是$\mathbf{B}$的有界凸闭子集, 这里常数$A_1>a_1>0$, 并使得$1-\bar p<A_1<\frac{10(1-a_1-\bar p)}{1+9\bar p}$成立[6]. 由条件($H_2$)及

上式知, 可选择一个充分大的 $t_1 \geqslant t_0$, 使得 $t_1 \geqslant t_0+\mu(\mu=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant l}\{\tau,\sigma_i,\delta_j\})$, 并且当 $t \geqslant t_1$ 时有

$$0 \leqslant P(t) \leqslant \frac{1+9\bar{p}}{10}<1, \tag{5}$$

$$\int_{t_1}^{+\infty} u\left[\sum_{i=1}^{m} Q_i(u)+\sum_{j=1}^{l} R_j(u)\right] \mathrm{d}u<\frac{4(1-\bar{p})}{5L_1}, \tag{6}$$

$$\int_{t_1}^{+\infty} u \sum_{i=1}^{m} Q_i(u) \mathrm{d}u \leqslant \frac{\bar{p}-(1-A_1)}{L_1 A_1}, \tag{7}$$

$$\int_{t_1}^{+\infty} u \sum_{j=1}^{l} R_j(u) \mathrm{d}u \leqslant \frac{10(1-a_1-\bar{p})-(1+9\bar{p}) A_1}{10 L_1 A_1}, \tag{8}$$

这里 $L_1=\max\left\{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\left\{L_{f_i}(\mathbf{B}_1)\right\}, \max\limits_{1\leqslant j\leqslant l}\left\{L_{g_j}(\mathbf{B}_1)\right\}\right\}$. 定义算子 T_1： $\mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbf{B}$ 如下.

$$(T_1 x)(t)=\begin{cases} 1-\bar{p}-P(t) x(t-\tau)+t \displaystyle\int_t^{+\infty}\left[\sum_{i=1}^{m} Q_i(s) f_i(x(s-\sigma_i))-\sum_{j=1}^{l} R_j(s) g_j(x(s-\delta_j))\right] \mathrm{d}s \\ \quad +\displaystyle\int_{t_1}^{t} s\left[\sum_{i=1}^{m} Q_i(s) f_i(x(s-\sigma_i))-\sum_{j=1}^{l} R_j(s) g_j(x(s-\delta_j))\right] \mathrm{d}s, \quad t \geqslant t_1, \\ (T_1 x)(t_1), \qquad t_0 \leqslant t \leqslant t_1.\end{cases}$$

则显然T_1是连续的. 注意条件(H_1)和(7)式, 对 $\forall x \in \mathbf{B}_1$及 $t \geqslant t_1$, 我们有

$$\begin{aligned}(T_1 x)(t) & \leqslant 1-\bar{p}+t \int_t^{+\infty} \sum_{i=1}^{m} Q_i(s) f_i(x(s-\sigma_i)) \mathrm{d}s+\int_{t_1}^{t} s \sum_{j=1}^{l} Q_j(s) f_j(x(s-\sigma_j)) \mathrm{d}s \\ & \leqslant 1-\bar{p}+\int_{t_1}^{+\infty} s \sum_{i=1}^{m} Q_i(s) f_i(x(s-\sigma_i)) \mathrm{d}s \leqslant 1-\bar{p}+L_1 \int_{t_1}^{+\infty} s \sum_{i=1}^{m} Q_i(s) x(s-\sigma_i) \mathrm{d}s \\ & \leqslant 1-\bar{p}+L_1 A_1 \int_{t_1}^{+\infty} s \sum_{i=1}^{m} Q_i(s) \mathrm{d}s \leqslant 1-\bar{p}+L_1 A_1 \cdot \frac{\bar{p}-(1-A_1)}{L_1 A_1}=A_1 .\end{aligned}$$

另一方面, 由定理的条件及(5), (8)式, 可得

$$\begin{aligned}(T_1 x)(t) & \geqslant 1-\bar{p}-\frac{1+9\bar{p}}{10} A_1-t \int_t^{+\infty} \sum_{j=1}^{l} R_j(s) g_j(x(s-\delta_j)) \mathrm{d}s-\int_{t_1}^{t} s \sum_{j=1}^{l} R_j(s) g_j(x(s-\delta_j)) \mathrm{d}s \\ & \geqslant 1-\bar{p}-\frac{1+9\bar{p}}{10} A_1-\int_{t_1}^{+\infty} s \sum_{j=1}^{l} R_j(s) g_j(x(s-\delta_j)) \mathrm{d}s \\ & \geqslant 1-\bar{p}-\frac{1+9\bar{p}}{10} A_1-L_1 \int_{t_1}^{+\infty} s \sum_{j=1}^{l} R_j(s) x(s-\delta_j) \mathrm{d}s \\ & \geqslant 1-\bar{p}-\frac{1+9\bar{p}}{10} A_1-L_1 A_1 \int_{t_1}^{+\infty} s \sum_{j=1}^{l} R_j(s) \mathrm{d}s \\ & \geqslant 1-\bar{p}-\frac{1+9\bar{p}}{10} A_1-L_1 A_1 \frac{10(1-a_1-\bar{p})-(1+9\bar{p}) A_1}{10 L_1 A_1}=a_1,\end{aligned}$$

从而 $a_1 \leqslant T_1x \leqslant A_1$, 因此, $T_1\mathbf{B}_1 \subseteq \mathbf{B}_1$. 又对 $\forall x_1,\ x_2 \in \mathbf{B}_1$ 和 $t \geqslant t_1$, 注意到条件(H_1)及(5),(6)式, 得

$$
\begin{aligned}
&|(T_1x_1)(t)-(T_1x_2)(t)| \leqslant \frac{1+9\bar{p}}{10}\Big|x_1(t-\tau)-x_2(t-\tau)\Big| \\
&+t\left[\int_t^{+\infty}\sum_{i=1}^{m}Q_i(s)\,|f_i(x_1(s-\sigma_i))-f_i(x_2(s-\sigma_i))|\mathrm{d}s\right. \\
&\left.+\int_t^{+\infty}\sum_{j=1}^{l}R_j(s)\,|g_j(x_1(s-\delta_j))-g_j(x_2(s-\delta_j))|\right]\mathrm{d}s \\
&+\int_{t_1}^{t}s\sum_{i=1}^{m}Q_i(s)\,|f_i(x_1(s-\sigma_i))-f_i(x_2(s-\sigma_i))|\mathrm{d}s \\
&+\int_{t_1}^{t}s\sum_{j=1}^{l}R_j(s)\,|g_j(x_1(s-\delta_j))-g_j(x_2(s-\delta_j))|\mathrm{d}s \\
&\leqslant \frac{1+9\bar{p}}{10}\,\|x_1-x_2\|+L_1\int_t^{+\infty}s\left[\sum_{i=1}^{m}Q_i(s)+\sum_{j=1}^{l}R_j(s)\right]\cdot\|x_1-x_2\|\,\mathrm{d}s \\
&+L_1\int_{t_1}^{t}s\left[\sum_{i=1}^{m}Q_i(s)+\sum_{j=1}^{l}R_j(s)\right]\cdot\|x_1-x_2\|\,\mathrm{d}s \\
&\leqslant \frac{1+9\bar{p}}{10}\,\|x_1-x_2\|+L_1\,\|x_1-x_2\|\int_{t_1}^{+\infty}s\left[\sum_{i=1}^{m}Q_i(s)+\sum_{j=1}^{l}R_j(s)\right]\mathrm{d}s \\
&< \frac{1+9\bar{p}}{10}\,\|x_1-x_2\|+L_1\,\|x_1-x_2\|\cdot\frac{4(1-\bar{p})}{5L_1}=\frac{9+\bar{p}}{10}\,\|x_1-x_2\|\,.
\end{aligned}
$$

由于$0<\frac{9+\bar{p}}{10}<1$, 因此 T_1 是 $\mathbf{B}_1$ 上的压缩映射.

于是, 由 **Banach** 压缩映射原理知, T_1 在 $\mathbf{B}_1$ 上有唯一的不动点 $x^*=x^*(t)$, 显然此不动点 $x^*(t)$ 就是方程(1)的一个最终正解.定理证毕.

例 1　考虑具有正负系数的二阶中立型时滞微分方程

$$[x(t)+P(t)x(t-\tau)]''+Q(t)f(x(t-\sigma))-R(t)g(x(t-\delta))=0,\ t\geqslant t_0.$$

若取 $\tau=2,\sigma=\delta=2,t_0=3$, $P(t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{t}$, $Q(t)=\frac{4(t-2)}{t^4(t-1)}$, $R(t)=\frac{4(t-2)}{t^3(t-1)}$, $f(x)=x$, $g(x)=x$, 则易知此时方程满足定理1的条件, 故所给方程一定存在一个最终正解. 事实上, 不难验证, $x(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{t}$ 就是一个这样的解.

注 1　文献 [2-7] 在“对任意 $t\geqslant t_0$ 及任意常数 $\alpha>0$ 均有$\alpha Q(t)-R(t)\geqslant 0$”条件下, 给出具有正负系数的方程(2)-(4)存在非振动解的判别准则, 但本文定理1却均不需要这个条件, 例 1 所给的方程显然也不满足这个条件. 此外, 从定理 1 的证明过程可知, 方程(1)是否存在非振动解与 $\alpha Q(t)-R(t)\geqslant 0$ 是否成立并无必然联系.

2 方程振动的充分条件

下面给出方程(1)的振动准则. 记

$$y(t) = x(t)+P(t)x(t-\tau), \tag{9}$$

$$z(t) = y(t)+\sum_{j=1}^{l}\int_t^{+\infty}\left[\int_{s-\sigma+\delta_j}^{s}R_j(u)g_j\left(x(u-\delta_j)\right)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}s. \tag{10}$$

引理 1 假设条件 (H_3) 和 (H_4) 成立, $P(t)>0$, $x(t)$ 为方程(1)的一个最终正解,则

$$z(t)>0, z'(t)\geqslant 0, z''(t)\leqslant 0.$$

证 明 由于 $x(t)$ 为方程(1)的一个最终正解, 即存在$t_1\geqslant t_0$, 当 $t\geqslant t_1$ 时, 有

$$x(t)>0,\ x(t-\tau)>0,\ x(t-\sigma_i)>0,\ x(t-\delta_j)>0,$$

从而 $y(t)>0$, 进而 $z(t)>0(t\geqslant t_1)$.

由(9), (10)式及方程(1)可得

$$\begin{aligned} z'(t) &= y'(t)-\sum_{j=1}^{l}\int_{t-\sigma+\delta_j}^{t}R_j(u)g_j\left(x(u-\delta_j)\right)\mathrm{d}u, \\ z''(t) &= y''(t)-\sum_{j=1}^{l}R_j(t)g_j\left(x(t-\delta_j)\right)+\sum_{j=1}^{l}R_j(t-\sigma+\delta_j)g_j\left(x(t-\sigma)\right) \\ &= -\sum_{i=1}^{m}Q_i(t)f_i\left(x(t-\sigma_i)\right)+\sum_{j=1}^{l}R_j(t-\sigma+\delta_j)g_j\left(x(t-\sigma)\right), \end{aligned} \tag{11}$$

由(H_3) 和 (H_4), 即得

$$z''(t)\leqslant -\left[\sum_{i=1}^{m}\alpha_iQ_i(t)-\sum_{j=1}^{l}\beta_jR_j(t-\sigma+\delta_j)\right]x(t-\sigma)\leqslant 0. \tag{12}$$

下证 $z'(t)\geqslant 0\,(t\geqslant t_1)$. 事实上, 若存在 $t_2\geqslant t_1$, 使得 $z'(t_2)<0$, 则当 $t\geqslant t_2$时, 有 $z'(t)\leqslant z'(t_2)<0(t\geqslant t_2)$. 取定 $T\geqslant t_2$, 并对上述不等式从 T 到 t 积分$(t>T)$, 得

$$z(t)\leqslant z(T)+\int_T^t z'(t_2)\mathrm{d}s=z(T)+z'(t_2)(t-T).$$

令$t\to+\infty$, 则有$\lim\limits_{t\to+\infty}z(t)=-\infty$, 这与$z(t)>0$矛盾! 故$z'(t)\geqslant 0$. 引理证毕.

定理 2 假设条件(H_3) 和 (H_4) 成立, 记 $D=\{(t,s)|t\geqslant s\geqslant t_0\}$, 若$0<P(t)\leqslant 1$, 且存在函数 $H(t,s)\in C^1(D,\mathbf{R})$, $h(t,s)\in C(D,\mathbf{R})$ 及 $\varphi(t)\in C^1\left([t_0,+\infty),(0,+\infty)\right)$, 使得

(i) 当$t\geqslant t_0$时$H(t,t)=0$; 当$t>s\geqslant t_0$时$H(t,s)>0$;

(ii) 当$(t,s)\in D$时, $\dfrac{\partial H(t,s)}{\partial s}\leqslant 0$, 且$H(t,s)\dfrac{\varphi'(s)}{\varphi(s)}+\dfrac{\partial H(t,s)}{\partial s}=-h(t,s)\sqrt{H(t,s)}$;

(iii) $\lim\limits_{t\to+\infty}\sup\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}\varphi(s)\left\{H(t,s)\left[\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_iQ_i(s)-\sum\limits_{j=1}^{l}\beta_jR_j(s-\sigma+\delta_j)\right]\left[1-P(s-\sigma)\right]-\dfrac{1}{4}h^2(t,s)\right\}\mathrm{d}s=+\infty$, 则方程(1)是振动的.

证　明　不妨设 $x(t)$ 为方程(1)的一个最终正解(最终负解的情形类似可证), 即存在 $t_1 \geqslant t_0$, 当 $t \geqslant t_1$ 时, 有 $x(t) > 0$, $x(t-\tau) > 0$, $x(t-\sigma_i) > 0$, $x(t-\delta_j) > 0$. 于是由引理 1 及(11)式知, $y'(t) > 0 (t \geqslant t_1)$, 即 $y(t)$ 为单调递增函数.

由 $0 < P(t) \leqslant 1$ 及(9)式知, $y(t) \geqslant x(t) (t \geqslant t_1)$, 于是 $y(t) \leqslant x(t) + P(t)y(t-\tau) \leqslant x(t) + P(t)y(t)$, 从而有 $x(t) \geqslant [1-P(t)]\, y(t) \geqslant 0$, 将其代入(12)式, 得

$$z''(t) \leqslant -\left[\sum_{i=1}^{m}\alpha_i Q_i(t) - \sum_{j=1}^{l}\beta_j R_j(t-\sigma+\delta_j)\right][1-P(t-\sigma)]\, y(t-\sigma) \leqslant 0. \tag{13}$$

令 $V(t) = \varphi(t)\frac{z'(t)}{y(t-\sigma)}$, 则 $V(t) > 0 (t \geqslant t_1)$,

$$V'(t) = \varphi'(t)\frac{z'(t)}{y(t-\sigma)} + \varphi(t)\frac{z''(t)}{y(t-\sigma)} - \varphi(t)\frac{z'(t)y'(t-\sigma)}{y^2(t-\sigma)}, \tag{14}$$

由(11)式知, $y'(t) \geqslant z'(t) \geqslant 0$, $z''(t) \leqslant 0$, 于是由 (14), (13) 式可得

$$V'(t) \leqslant \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}V(t) - \varphi(t)\left[\sum_{i=1}^{m}\alpha_i Q_i(t) - \sum_{j=1}^{l}\beta_j R_j(t-\sigma+\delta_j)\right][1-P(t-\sigma)] - \frac{1}{\varphi(t)}V^2(t),$$

上式两边同乘以 $H(t,s)$ 并从 t_1 到 t 积分, 注意到定理的条件(i), (ii), 有

$$\begin{aligned}
&\int_{t_1}^{t} H(t,s)\varphi(s)\left[\sum_{i=1}^{m}\alpha_i Q_i(s) - \sum_{j=1}^{l}\beta_j R_j(s-\sigma+\delta_j)\right][1-P(s-\sigma)]\,\mathrm{d}s \\
&\quad\leqslant -\int_{t_1}^{t} H(t,s)V'(s)\mathrm{d}s + \int_{t_1}^{t} H(t,s)\frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)}V(s)\mathrm{d}s - \int_{t_1}^{t} H(t,s)\frac{V^2(s)}{\varphi(s)}\mathrm{d}s \\
&\quad= H(t,t_1)V(t_1) + \int_{t_1}^{t}\left[H(t,s)\frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} + \frac{\partial H(t,s)}{\partial s}\right]V(s)\mathrm{d}s - \int_{t_1}^{t} H(t,s)\frac{V^2(s)}{\varphi(s)}\mathrm{d}s \\
&\quad= H(t,t_1)V(t_1) - \int_{t_1}^{t} h(t,s)\sqrt{H(t,s)}V(s)\mathrm{d}s - \int_{t_1}^{t} H(t,s)\frac{V^2(s)}{\varphi(s)}\mathrm{d}s \\
&\quad= H(t,t_1)V(t_1) - \int_{t_1}^{t}\left[\sqrt{\frac{H(t,s)}{\varphi(s)}}V(s) + \frac{h(t,s)\sqrt{\varphi(s)}}{2}\right]^2\mathrm{d}s + \int_{t_1}^{t}\frac{1}{4}h^2(t,s)\varphi(s)\mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

注意到定理的条件(ii), 我们有

$$\int_{t_1}^{t}\left\{H(t,s)\varphi(s)\left[\sum_{i=1}^{m}\alpha_i Q_i(s) - \sum_{j=1}^{l}\beta_j R_j(s-\sigma+\delta_j)\right][1-P(s-\sigma)] - \frac{1}{4}h^2(t,s)\varphi(s)\right\}\mathrm{d}s$$

$$\leqslant H(t,t_1)V(t_1) - \int_{t_1}^{t}\left[\sqrt{\frac{H(t,s)}{\varphi(s)}}V(s) + \frac{h(t,s)\sqrt{\varphi(s)}}{2}\right]^2\mathrm{d}s \leqslant H(t,t_1)V(t_1) \leqslant H(t,t_0)V(t_1),$$

即

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_1}^{t}\left\{H(t,s)\varphi(s)\left[\sum_{i=1}^{m}\alpha_i Q_i(s) - \sum_{j=1}^{l}\beta_j R_j(s-\sigma+\delta_j)\right][1-P(s-\sigma)]\right. \\
&\left.-\frac{1}{4}h^2(t,s)\varphi(s)\right\}\mathrm{d}s \leqslant V(t_1),
\end{aligned}$$

从而

$$\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}\left\{H(t,s)\varphi(s)\left[\sum_{i=1}^{m}\alpha_iQ_i(s)-\sum_{j=1}^{l}\beta_jR_j(s-\sigma+\delta_j)\right][1-P(s-\sigma)]-\frac{1}{4}h^2(t,s)\varphi(s)\right\}\mathrm{d}s$$

$$=\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t_1}\left\{H(t,s)\varphi(s)\left[\sum_{i=1}^{m}\alpha_iQ_i(s)-\sum_{j=1}^{l}\beta_jR_j(s-\sigma+\delta_j)\right][1-P(s-\sigma)]-\frac{1}{4}h^2(t,s)\varphi(s)\right\}\mathrm{d}s$$

$$+\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_1}^{t}\left\{H(t,s)\varphi(s)\left[\sum_{i=1}^{m}\alpha_iQ_i(s)-\sum_{j=1}^{l}\beta_jR_j(s-\sigma+\delta_j)\right][1-P(s-\sigma)]-\frac{1}{4}h^2(t,s)\varphi(s)\right\}\mathrm{d}s$$

$$\leqslant V(t_1)+\int_{t_0}^{t_1}\varphi(s)\left[\sum_{i=1}^{m}\alpha_iQ_i(s)-\sum_{j=1}^{l}\beta_jR_j(s-\sigma+\delta_j)\right][1-P(s-\sigma)]\,\mathrm{d}s=C(C\text{为常数}),$$

对上式取上极限, 即得

$$\lim_{t\to+\infty}\sup\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}\left\{H(t,s)\varphi(s)\left[\sum_{i=1}^{m}\alpha_iQ_i(s)-\sum_{j=1}^{l}\beta_jR_j(s-\sigma+\delta_j)\right]\cdot[1-P(s-\sigma)]-\frac{1}{4}h^2(t,s)\varphi(s)\right\}\mathrm{d}s<+\infty,$$

这与定理的条件(iii)矛盾! 定理证毕.

注 2 通过选择恰当的不同的参数函数 $H(t,s)$, 就能导出许多不同的关于方程(1)的振动准则.

例 2 令 $H(t,s)=(t-s)^n,(t,s)\in D$ (这里$n>1$是整数), 则 $h(t,s)=n(t-s)^{\frac{n}{2}-1}-(t-s)^{\frac{n}{2}}\frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)}((t,s)\in D)$. 于是我们就有下面结果:

推 论 设条件(H_3)和(H_4)成立, 如果$0<P(t)\leqslant 1$且存在函数$\varphi(t)\in C^1([t_0,+\infty),(0,+\infty))$, 使得

$$\lim_{t\to+\infty}\sup\frac{1}{(t-t_0)^n}\int_{t_0}^{t}\varphi(s)\left\{(t-s)^n\left[\sum_{i=1}^{m}\alpha_iQ_i(s)-\sum_{j=1}^{l}\beta_jR_j(s-\sigma+\delta_j)\right]\cdot[1-P(s-\sigma)]-\frac{1}{4}h^2(t,s)\right\}\mathrm{d}s=+\infty,$$

则方程(1)是振动的.

注 3 文献[6]在“$R(t)$最终为负”的条件下, 给出了具有正负系数的泛函微分方程(4)振动的一个充分条件, 但本文定理 2 却不需要这个条件.

因此本文定理推广并改进了现有文献的结果, 而且更具有普遍性.

[参 考 文 献]

[1] TANG X H, Yu J S. Positive solution for a kind of neutral equations with positive and negative coefficients [J]. Acta Mathematica Sinica, 1999, 42(5): 795-802.

[2] KULENOVIC M R S, HADZIOMERSPAHIC S. Existence of nonoscillatory solution of second order linear neutral delay equation[J]. J math Anal Appl, 1998, 228: 436-448.

[3] GAI M J, SHI B, ZHANG D C. Oscillation criteria for second order nonlinear differential equations of neutral type[J]. Appl Math J Chin Univ (Ser B), 2001, 16(2): 122-126.

[4] 王晓霞, 仉志余. 非线性二阶中立型时滞微分方程的非振动准则[J]. 信阳师范学院学报(自然科学版), 2001, 14(1): 16-21. WANG X X, ZHANG Z Y. Nonoscillation criterion for second order nonlinear neutral delay differential equations[J]. Journal of Xinyang Teachers College (Natural Science Edition), 2001, 14(1): 16-21.

[5] 李美丽, 冯伟. 二阶线性中立型时滞微分方程非振动解的存在性[J]. 山西大学学报(自然科学版), 2002, 25(1): 195-199. LI M L, FENG W. Existence of nonoscillatory solution of second order linear neutral delay equations[J]. Journal of Shanxi University (Natural Science Edition), 2002, 25(3): 195-199.

(下转第 38 页)

[参　考　文　献]

[1] VIZING V G. On an estimate of the chromatic index of a p-graph[J]. Diskret Analiz, 1964(3): 25-30.

[2] VIZING V G. Critical graphs with given chromatic class[J]. Diskret Analiz 1965(5): 9-17.

[3] ZHANG L. Every planar graph with maximum degree 7 is of class 1 [J]. Graphs Combin, 2000(4): 467-495.

[4] SANDERS D P, ZHAO Y. Planar graphs of maximum degree seven are class 1[J]. J Combin Theory Ser B, 2001, 83(2): 201-212.

[5] ZHOU G. A note on graphs of class 1 [J]. Discrete Math, 2003, 262(123): 339-345.

[6] BU Y, WANG W. Some sufficient conditions for a planar graph of maximum degree six to be class 1 [J]. Discrete Math, 2006, 306(13): 1440-1445.

[7] WANG W, CHEN Y. A sufficient conditions for a planar graph to be class 1 [J]. Theoretical Computer Science, 2007, 385: 71-77.

[8] LI X, LUO R. Edge coloring of embedded graphs with large girth[J]. Graphs Combin, 2003, 19(3): 393-401.

[9] 吴玉文. 关于平面图的边剖分的若干结果[D]. 山东: 山东大学, 2007.
WU Y W. Some results on edge partitions of planar graphs[D]. Shandong: shandong University, 2007.

[10] 陈永珠, 王维凡. 第一类平面图的一个充分条件[J]. 浙江师范大学学报(自然科学版), 2007, 30(4): 416-420.
CHEN Y Z, WANG W F. A sufficient condition for a planar graph to be of class I[J]. Journal of Zhejiang Normal Unniversity (Natural Sciences), 2007, 30(4): 416-420.

[11] 倪伟平. 最大度是4的可平面图是第一类图的充分条件[J]. 华东师范大学学报(自然科学版), 2010(3): 85-91.
NI W P. Some sufficient conditions for a planar graph of maximum degree four to be Class 1[J]. Journal of East China Normal University (Natural Science), 2010(3):85-91.

[12] 倪伟平. 最大度是6不含相邻k-圈的可平面图的边染色[J]. 华东师范大学学报(自然科学版), 2010(5): 20-26.
NI W P. Edge coloring of planar graphs for maximum degree six without adjacent k-cycles[J]. Journal of East China Normal University (Natural Science), 2010(5): 20-26.

(上接第 16 页)

[6] 仉志余, 王晓霞, 林诗仲, 等. 非线性二阶中立型时滞微分方程的振动和非振动准则[J]. 系统科学与数学, 2006, 26(3): 325-334.
ZHANG Z Y, WANG X X, LIN S Z, et al. Oscillation and nonoscillation criterla for second order nonlinear neutral delay differentlal equations[J]. Jounnal of Systems Science and Mathematical Sciences, 2006, 26(3): 325-334.

[7] Manojlovic J, Shoukaku Y, Tanigawa T, Yoshida N. Oscillation criteria for second order differential equations with positive and negative coefficients[J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 181(2): 853-863.

[8] 李秀云, 刘召爽, 俞元洪. 具有正负系数的二阶中立型时滞微分方程的振动性[J]. 上海交通大学学报, 2004, 38(6): 1028-1030.
LI X Y, LIU Z S, YU Y H. Oscillation of second-order neutral delay differential equations with positive and negative coefficients[J]. Journal of Shanghai Jiaotong University, 2004, 38(6): 1028-1030.

[9] 何宏庆, 仉志余. 二阶非线性中立型时滞微分方程的振动准则[J]. 数学的实践与认识, 2007, 37(23): 130-134.
HE H Q, ZHANG Z Y. Oscillation criteria for the second-order nonlinear neutral delay differential equations[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2007, 37(23): 130-134.

[10] 杨甲山. 具有正负系数的二阶非线性中立型方程的非振动准则[J]. 工程数学学报, 2010, 27(1): 118-124.
YANG J S. Nonoscillation criteria for second order nonlinear neutral equations with positive and negative coefficients [J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2010, 27(1): 118-124.

[11] LUO H, ZHUANG R K, GUO X M. Oscillation criteria for second order nonlinear differential equation with damping [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2005, 26(4): 441-448.