文章编号：1000-4750(2013)04-0204-07

建筑结构基于 LMI 的鲁棒非脆弱 H_∞控制

李志军[1,2]，王社良[1]

(1. 西安建筑科技大学土木工程学院，西安 710055；2. 西安工业大学建筑工程学院，西安 710032)

摘 要：考虑一维地震动作用和结构参数不确定性影响，提出一种基于线性矩阵不等式(Linear Matrix Inequalities, LMI)的鲁棒非脆弱 H_∞控制方法。引入工程中常用的二次型最优指标，并应用线性矩阵不等式减小求解的复杂度，使得控制器的性能指标容易衡量，设计相对简单，便于工程应用。以一个三层剪切型结构模型为例进行数值分析，并与传统 H_∞控制方法进行对比，仿真结果初步表明：1) 所提方法具有很好的控制效果和鲁棒性；2) 合理地计算结构参数值，可使控制系统在具有最优反应品质的前提下，获得相对更好的鲁棒性和非脆弱性。

关键词：非脆弱；鲁棒 H_∞控制；线性矩阵不等式；建筑结构；性能指标

中图分类号：TU311.4; O328 **文献标志码：**A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2011.11.0784

ROBUST AND NON-FRAGILE H_∞ CONTROL FOR BUILDINGS VIA LMI APPROACH

LI Zhi-jun[1,2] , WANG She-liang[1]

(1. College of Civil Engineering, Xi'an University of Architecture and Technology, Xi'an 710055, China;

2. School of Civil & Architecture Engineering, Xi'an Technological University, Xi'an 710032, China)

Abstract: The behavior of building structures is naturally uncertain because of the numerous uncertainties of seismic disturbances and structural parameters. In this paper, we present a new robust and non-fragile H_∞ control approach that can provide a convenient design procedure for active controllers to facilitate practical implementations of control systems through the use of a quadratic performance index and the use of an efficient solution procedure based on linear matrix inequalities (LMI). Such a new robust and non-fragile H_∞ controller for buildings can be designed to guarantee the robust stability and performance of the closed-loop system in the presence of parameter uncertainties. In view of the uncertainty of seismic disturbance and the model errors of the building structure, a three-storey shear building model containing active brace systems is analyzed. The simulation results obtained from the proposed control method are compared with those obtained from traditional H_∞ control method, which shows preliminarily that the performance of robust and non-fragile H_∞ controllers is remarkable and robust. Considering reasonable parameter values, the controller can acquire considerably better performance of robust and non-fragile than traditional H_∞ controller under the optimal response quantities. Therefore, the robust and non-fragile H_∞ control method is quite promising for practical implementations of active control systems on seismically excited linear structures.

Key words: non-fragile; robust H_∞ control; linear matrix inequalities; building structure; performance index

结构的主动控制相对于被动控制具有控制效果好、精度高、能够有效处理外部干扰等诸多优点，近些年来，随着电/磁流变液体、压电材料、电/磁致伸缩材料、形状记忆合金等一些智能驱动器的迅

收稿日期：2011-11-21；修改日期：2012-01-08

基金项目：国家自然科学基金项目(51178388，90715003，10972168)；西安工业大学校长基金重点项目(XAGDXJJ0919)

通讯作者：李志军(1975－)，男，山西万荣人，副教授，博士后，国家一级注册结构工程师，硕导，主要从事工程结构抗震研究 (E-mail: lzjsjh@yahoo.com.cn).

作者简介：王社良(1957－)，男，陕西西安人，教授，博士，博导，主要从事工程结构抗震研究(E-mail: wangshel@yahoo.com.cn).

速发展，使得主动控制理论得到了较大的发展，存在巨大的工程应用价值[1−2]。由于在实际的建筑结构控制中，建筑结构的模型参数如结构的阻尼和刚度是难以用数学模型来精确描述，结构的不确定性会导致系统控制的不稳定和控制性能恶化，为此研究对结构参数和外部扰动具有较好鲁棒性、调节简单的控制算法是土木工程结构振动控制研究的一个重要方面[3]。

从理论的系统完整性以及工程应用的成功事例来看，H_∞控制方法在鲁棒控制中占有主流地位[4−7]。实际控制系统的设计常常不仅要求闭环系统稳定，而且要求其达到一定的性能指标，虽然H_∞控制理论已经比较成熟，但H_∞性能指标不能很好地反映工程品质，加上结构系统综合的复杂性，使得H_∞控制方法在结构振动控制工程中应用较少[4]。为了使鲁棒H_∞方法能尽快应用于实际结构振动控制工程中，许多学者进行了大量的研究工作，但仍存在许多问题。文献[7－8]需求解两个Raccati方程，求解不易收敛；文献[9－11]考虑了结构参数和控制器的不确定性，提出了相应的鲁棒非脆弱控制方法，但需要待定的控制器参数过多，控制性能不易衡量，且设计过程繁琐工程应用十分困难；文献[12－13]基于频域方法设计了鲁棒控制器，但计算过程繁琐，应用十分困难。

本文将工程中常用的二次型最优性能指标结合于鲁棒H_∞最优控制系统的分析中，并应用线性矩阵不等式减小求解的复杂度，设计了一种便于工程应用的鲁棒非脆弱H_∞控制方法。以一个三层剪切型结构体系为例，利用MATLAB软件编制了相应的程序，进行了相应的数值分析，并与传统H_∞控制方法的鲁棒性作了相应对比。

1　结构的运动方程

对于一个自由度数为n的层间剪切型受控建筑结构，设地面运动的加速度分量为$\ddot{x}_g(t)$，其运动方程可表示为：

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{X}}+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{X}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{X}=-\boldsymbol{M}\{1\}\ddot{x}_g(t)+\boldsymbol{B}_s\boldsymbol{U}(t) \tag{1}$$

式中：$\boldsymbol{X}$、$\dot{\boldsymbol{X}}$、$\ddot{\boldsymbol{X}}$分别是结构的位移向量、速度向量和加速度向量，且$\boldsymbol{X}=[x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n]^{\mathrm{T}}$为$n$维位移列向量($x_i$为第$i$层相对于地面的位移)；$\boldsymbol{M}=\mathrm{diag}[m_1,m_2,\cdots,m_n]$为$(n\times n)$维结构的质量矩阵($m_i$为第$i$层的集中质量)；$\boldsymbol{B}_s$是为$(n\times r)$维控制力位置矩阵；$\boldsymbol{U}(t)$为$r$维控制力列向量；$\boldsymbol{C}$和$\boldsymbol{K}$分别为$(n\times n)$维结构阻尼矩阵和刚度矩阵；$\{-1\}$是元素为−1的列向量。

2　H_∞控制器设计

将式(1)化为状态方程：

$$\dot{\boldsymbol{Z}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(t)+\boldsymbol{H}w(t) \tag{2}$$

系统输出矩阵为：

$$\boldsymbol{Y}_s=\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{Z}(t)=C_d\boldsymbol{v}+C_v\dot{\boldsymbol{v}} \tag{3}$$

式中：

$$\boldsymbol{Z}(t)=\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{X}}\\ \boldsymbol{X}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{I}\\ -\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K} & -\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{C}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{B}_s\end{bmatrix},\ \boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}0\\ -\{1\}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Gamma}=[\boldsymbol{C}_d\quad \boldsymbol{C}_v],\ w(t)=\ddot{x}_g(t) \tag{4}$$

其中：$\boldsymbol{Z}(t)$是$2n$维状态列向量；$\boldsymbol{A}$是$2n\times 2n$维系统矩阵；$\boldsymbol{B}$是$2n\times r$维矩阵；$\boldsymbol{H}$是$2n\times 1$维矩阵。

由文献[6]中定理4.1.1可得，对于结构系统式(1)，给定常数$\gamma>0$，存在一个状态反馈γ-次优H_∞控制器，当且仅当存在一个对称正定矩阵$\boldsymbol{N}$和矩阵$\boldsymbol{Y}$，使得如下的线性矩阵不等式：

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{N}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{N}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y} & \boldsymbol{H} & \boldsymbol{N}\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{I} & 0\\ \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{N} & 0 & -\gamma^2\boldsymbol{I}\end{bmatrix}<0 \tag{5}$$

成立。若式(5)成立，则对应的状态反馈γ-次优H_∞控制律为：

$$\boldsymbol{U}(t)=-\boldsymbol{K}_u\boldsymbol{Z}(t)=-\boldsymbol{Y}\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{Z}(t) \tag{6}$$

3　鲁棒非脆弱H_∞控制器设计

考虑结构质量、刚度、阻尼和控制力具有不确定性的影响，则式(1)可以重新描述为：

$$(\boldsymbol{M}+\boldsymbol{\varDelta}_M)\ddot{\boldsymbol{X}}+(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{\varDelta}_C)\dot{\boldsymbol{X}}+(\boldsymbol{K}+\boldsymbol{\varDelta}_K)\boldsymbol{X}=$$
$$-(\boldsymbol{M}+\boldsymbol{\varDelta}_M)\{1\}w(t)+(\boldsymbol{B}_s+\boldsymbol{\varDelta}_{B_s})\boldsymbol{U}(t) \tag{7}$$

式中，$\boldsymbol{\varDelta}_M$、$\boldsymbol{\varDelta}_K$、$\boldsymbol{\varDelta}_C$、$\boldsymbol{\varDelta}_{B_s}$分别表示质量、刚度、阻尼和控制力的不确定性矩阵。其中质量不确定性矩阵$\boldsymbol{\varDelta}_M$有界且满足条件：

$$\|\boldsymbol{\varDelta}_M\boldsymbol{M}^{-1}\|\leqslant\|\boldsymbol{\delta}\|<1 \tag{8}$$

令$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\delta})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\delta}')=\boldsymbol{I}$，则式(7)可化为：

$$\ddot{\boldsymbol{X}}+(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\delta}')\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{\varDelta}_C)\dot{\boldsymbol{X}}+$$
$$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\delta}')\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{K}+\boldsymbol{\varDelta}_K)\boldsymbol{X}=$$
$$-\{1\}w(t)+(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\delta}')\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{B}_s+\boldsymbol{\varDelta}_{B_s})\boldsymbol{U}(t) \tag{9}$$

式(9)可化为以下状态方程：

$$\dot{\boldsymbol{Z}}(t)=(\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A})\boldsymbol{Z}(t)+(\boldsymbol{B}+\Delta\boldsymbol{B})\boldsymbol{U}(t)+\boldsymbol{H}w(t) \quad (10)$$

式中：$\Delta\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ -\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{\delta}_K & -\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{\delta}_C\end{bmatrix}$，$\Delta\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{\delta}_{B_s}\end{bmatrix}$，其余参数的表达式同标称结构系统(即式(2))。

其中：

$$\boldsymbol{\delta}_K=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\delta}')\boldsymbol{\Delta}_K+\boldsymbol{\delta}'\boldsymbol{K} \quad (11)$$

$$\boldsymbol{\delta}_C=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\delta}')\boldsymbol{\Delta}_C+\boldsymbol{\delta}'\boldsymbol{C} \quad (12)$$

$$\boldsymbol{\delta}_{B_s}=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\delta}')\boldsymbol{\Delta}_{B_s}+\boldsymbol{\delta}'B_s \quad (13)$$

假设不确定性参数矩阵 $\boldsymbol{\delta}_K$ 和 $\boldsymbol{\delta}_C$ 可以表示为：

$$\boldsymbol{\delta}_K=\boldsymbol{L}_k\boldsymbol{F}_k\boldsymbol{E}_k \quad (14)$$

$$\boldsymbol{\delta}_C=\boldsymbol{L}_c\boldsymbol{F}_c\boldsymbol{E}_c \quad (15)$$

式中，$\|\boldsymbol{F}_k\|\leqslant 1$，$\|\boldsymbol{F}_c\|\leqslant 1$；$\boldsymbol{L}_k$、$\boldsymbol{E}_k$、$\boldsymbol{L}_c$、$\boldsymbol{E}_c$ 是表示相应结构参数变化的已知定常矩阵。则结构参数不确定性矩阵 $\Delta\boldsymbol{A}$ 和控制力不确定性矩阵 $\Delta\boldsymbol{B}$ 具有如下形式：

$$\begin{cases}\Delta\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{E}_1\\ \Delta\boldsymbol{B}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{E}_2\end{cases} \quad (16)$$

式中：

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ -\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{L}_k & -\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{L}_c\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{F}_k & 0\\ 0 & \boldsymbol{F}_c\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{E}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_k & 0\\ 0 & \boldsymbol{E}_c\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}_2=-\begin{bmatrix}0\\ (\boldsymbol{\delta}_C E_c^{-1})^{-1}\boldsymbol{\delta}_{B_s}\end{bmatrix}$$

定义系统的二次型性能泛函为：

$$J=\int_0^{\infty}(\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Z}(t)+\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}(t))\mathrm{d}t \quad (17)$$

式中：$\boldsymbol{Q}$ 为相应维数的半正定矩阵；$\boldsymbol{R}$ 为相应维数的正定矩阵。

定义 1. 对于不确定线性系统(式(10))以及相应的性能指标(式(17))，如果存在一个状态反馈 $\boldsymbol{U}(t)=-\boldsymbol{K}_u\boldsymbol{Z}(t)$，使得闭环系统对于所有容许的不确定性满足下面三个条件：

1) 闭环系统是渐进稳定的；

2) 闭环系统是 LQ 意义下最优的；

3) 当初始条件 $\boldsymbol{Z}(0)=0$ 时，从系统外部扰动输入 $w(t)$ 到系统输出 $\boldsymbol{Y}_s(t)$ 的传递函数 $T_{Y_s w}(s)$ 的 H_∞ 范数 $\|T_{Y_s w}(s)\|_\infty<\gamma$，其中 γ 为一给定的正数。

则称系统(式(10))是在反馈 $\boldsymbol{U}(t)=-\boldsymbol{K}_u\boldsymbol{Z}(t)$ 下鲁棒 H_∞ 最优的，$\boldsymbol{U}(t)=-\boldsymbol{K}_u\boldsymbol{Z}(t)$ 为鲁棒 H_∞ 最优控制律。

由文献[14]给出以下引理：

引理 1. 设 $\boldsymbol{X}_C$、$\boldsymbol{Y}_C$ 和 $\boldsymbol{Z}_C$ 为具有适当维数的向量或矩阵，则对任意正数 $\eta>0$，以下不等式总成立：

$$\boldsymbol{X}_C^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_C+\boldsymbol{Y}_C^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_C\leqslant\eta\boldsymbol{X}_C^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_C+\eta^{-1}\boldsymbol{Y}_C^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_C \quad (18)$$

定理 1. 给定常数 $\gamma>0$，对于不确定线性系统(式(10))和性能指标(式(17))，如果存在 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}>0$ 使得下面的矩阵不等式成立：

$$(\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_u-\Delta\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_u)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_u-\Delta\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_u)+\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{K}_u^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}_u+\gamma^{-2}\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}<0 \quad (19)$$

则称系统(式(10))是在反馈 $\boldsymbol{U}(t)=-\boldsymbol{K}_u\boldsymbol{Z}(t)$ 下鲁棒 H_∞ 最优的。

证明. 引入 Lyapunov 函数 $V(\boldsymbol{Z}(t))=\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{Z}(t)$，则有：

$$\dot V(Z(t))=\dot{\boldsymbol{Z}}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{Z}(t)+\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{Z}}(t)=\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}(t)[(\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_u-\Delta\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_u)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_u-\Delta\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_u)]\boldsymbol{Z}(t)$$

由式(19)可知：

$$\dot V(Z(t))<-\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{K}_u^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}_u+\gamma^{-2}\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma})\boldsymbol{Z}(t)<0$$

所以闭环系统是渐进稳定的。

限于篇幅，定义 1 中的前第二个条件可参看文献[5]中的相应定理的证明过程。

要证明当 $w(t)\neq 0$ 且系统的初始条件为 $\boldsymbol{Z}(0)=0$ 时，满足式(19)，则在反馈 $\boldsymbol{U}(t)=-\boldsymbol{K}_u\boldsymbol{Z}(t)$ 下，闭环系统具有鲁棒 H_∞ 性能指标，即：

$$\|\boldsymbol{Y}_s\|_2<\gamma\|w\|_2 \quad (20)$$

注意到式(20)等价于：

$$\int_0^{\infty}(\boldsymbol{Y}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_s-\gamma^2 w^{\mathrm{T}}w)\mathrm{d}t<0 \quad (21)$$

因此只需证明式(21)成立。考虑到：

$$\int_0^{\infty}(\boldsymbol{Y}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_s-\gamma^2 w^{\mathrm{T}}w+\dot V(Z(t)))\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}(\boldsymbol{Y}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_s-\gamma^2 w^{\mathrm{T}}w)\mathrm{d}t+V(Z(\infty))-V(Z(0))$$

由于系统是渐进稳定的，有 $V(Z(\infty))=0$，且系统的初始条件为 $\boldsymbol{Z}(0)=0$，所以式(21)成立的一个充分条件为：

$$\boldsymbol{Y}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_s-\gamma^2 w^{\mathrm{T}}w+\dot V(Z(t))<0 \quad (22)$$

也即：

$$\boldsymbol{Y}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_s-\gamma^2 w^{\mathrm{T}}w+\dot V(\boldsymbol{Z}(t))=\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}(t)[(\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_u-\Delta\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_u)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_u-\Delta\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_u)]\boldsymbol{Z}(t)+w^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{Z}(t)+\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}w+\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{Z}(t)-\gamma^2 w^{\mathrm{T}}w<0 \quad (23)$$

由引理 1 可知：

$$w^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PZ}(t)+\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{PH}w \leqslant \gamma^{-2}\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{PHH}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PZ}(t)+\gamma^{2}w^{\mathrm{T}}w$$

式(23)成立的一个充分条件为：

$$\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}(t)[(\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK}_u-\Delta\boldsymbol{BK}_u)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK}_u-\Delta\boldsymbol{BK}_u)]\boldsymbol{Z}(t)+\gamma^{-2}\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{PHH}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PZ}(t)+\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma Z}(t)<0 \quad (24)$$

由式(19)知，式(24)是成立的，由前面的推导可知，式(24)是式(19)成立的充分条件，所以系统具有鲁棒 H_∞性能指标。因此，根据定义 1 得证定理 1。证毕。

定理 2. 给定常数$\gamma>0$，对于不确定线性系统(式(10))和性能指标(式(17))，闭环系统鲁棒 H_∞最优的一个充分条件是存在常数$\varepsilon>0$、矩阵$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}>0$和 $\boldsymbol{Y}$，使得如下的线性矩阵不等式成立：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Pi}_1 & \boldsymbol{N} & \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{H} & \boldsymbol{N\Gamma}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\Pi}_2 \\ * & -\boldsymbol{Q}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\boldsymbol{R}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2\boldsymbol{I} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\boldsymbol{I} & 0 \\ * & * & * & * & * & -\varepsilon^{-1}\boldsymbol{I} \end{bmatrix}<0 \quad (25)$$

其中：$\boldsymbol{\Pi}_1=\boldsymbol{NA}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{AN}-\boldsymbol{BY}+\varepsilon^{-1}\boldsymbol{DD}^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{\Pi}_2=(\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{N}-\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{Y})^{\mathrm{T}}$；* 代表矩阵中相应项的转置。若式(25)成立，则对应的鲁棒 H_∞最优控制律为：

$$\boldsymbol{U}(t)=-\boldsymbol{K}_u\boldsymbol{Z}(t)=-\boldsymbol{YN}^{-1}\boldsymbol{Z}(t) \quad (26)$$

证明. 由于

$$(\Delta\boldsymbol{A}-\Delta\boldsymbol{BK}_u)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}(\Delta\boldsymbol{A}-\Delta\boldsymbol{BK}_u)=(\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{K}_u)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{PDF}(\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{K}_u)\leqslant \varepsilon(\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{K}_u)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{K}_u)+\varepsilon^{-1}\boldsymbol{PDD}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\leqslant \varepsilon(\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{K}_u)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{K}_u)+\varepsilon^{-1}\boldsymbol{PDD}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$$

所以式(19)成立的一个充分条件为：

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK}_u)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK}_u)+\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{K}_u^{\mathrm{T}}\boldsymbol{RK}_u+\gamma^{-2}\boldsymbol{PHH}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}+\varepsilon(\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{K}_u)^{\mathrm{T}}\cdot(\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{K}_u)+\varepsilon^{-1}\boldsymbol{PDD}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}<0$$

分别用 $\boldsymbol{P}^{-1}$和 $\boldsymbol{P}^{-\mathrm{T}}$左乘、右乘上式两端，注意到$\boldsymbol{P}^{-\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}^{-1}$，可得：

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{K}_u^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{AP}^{-1}-\boldsymbol{BK}_u\boldsymbol{P}^{-1}+\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{QP}^{-1}+\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{K}_u^{\mathrm{T}}\boldsymbol{RK}_u\boldsymbol{P}^{-1}+\gamma^{-2}\boldsymbol{HH}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma P}^{-1}+\varepsilon\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{K}_u)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{K}_u)\boldsymbol{P}^{-1}+\varepsilon^{-1}\boldsymbol{DD}^{\mathrm{T}}<0$$

令$\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{N}$，$\boldsymbol{K}_u\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{Y}$，则有$\boldsymbol{K}_u=\boldsymbol{YN}^{-1}$，并得：

$$\boldsymbol{NA}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{AN}-\boldsymbol{BY}+\boldsymbol{NQN}+\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{RY}+\gamma^{-2}\boldsymbol{HH}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{N\Gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma N}+\varepsilon(\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{N}-\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{Y})^{\mathrm{T}}\cdot(\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{N}-\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{Y})+\varepsilon^{-1}\boldsymbol{DD}^{\mathrm{T}}<0$$

应用 Schur 补性质[14]，可得式(25)。另外，由于式(25)是式(19)的充分条件，所以由定理 1 和定义 1 即得证定理 2。证毕。

4 数值分析

为验证本文所提方法的有效性，现采用图 1 所示的三层剪切型建筑结构模型进行数值分析。结构参数如下：结构各层集中质量为 $m_i=4\times10^5$ kg；水平刚度为 $k_i=2\times10^8$ N/m；结构阻尼矩阵可按 Rayleigh 阻尼由前二阶振型阻尼比确定。假定结构前二阶振型阻尼比$\xi_1=\xi_1=5\%$。输入地震波采用 El Centro 地震波，持续时间为 8s，最大地面运动加速度调整为 200gal，采样周期为 0.02s。假定在结构各层均安装有主动支撑(ABS)作为作动器。

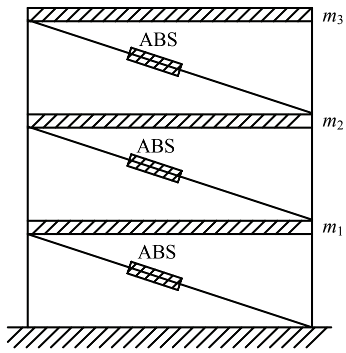

图 1　结构计算模型

Fig.1　Example problem

首先采用第 2 节所述方法设计 H_∞控制器，为了和鲁棒 H_∞控制方法在基本相同的控制效果下作对比，以显示后者更好的鲁棒性，取$\gamma=0.40$，$\boldsymbol{\Gamma}=\boldsymbol{I}_6$，则由式(5)和式(6)可得控制器增益矩阵：

$$\boldsymbol{K}_u=10^8\times\begin{bmatrix} 1.8949 & -0.1082 & -0.1091 & -0.0613 & -0.0675 & -0.0679 \\ -2.0029 & 1.8949 & -0.1070 & -0.0061 & -0.0612 & -0.0688 \\ -0.0007 & -2.0027 & -1.8961 & -0.0004 & -0.006 & -0.0605 \end{bmatrix}$$

假设结构刚度和阻尼变化幅值分别为 20%，不同工况下结构底层地震反应时程如图2~图5所示。其中：图 2 和图 3 分别为未控制工况(“Uncontrolled”)、标称结构工况(即结构刚度和阻尼未发生变化工况，以“Controlled-1”表示)和结构刚度和阻尼同时增大 20%工况(以“Controlled-2”表示)下，结构底层的位移和加速度反应时程；图 4 和图 5 为结构刚度

和阻尼同时减小表示 20%工况下，结构底层的位移和加速度反应时程。

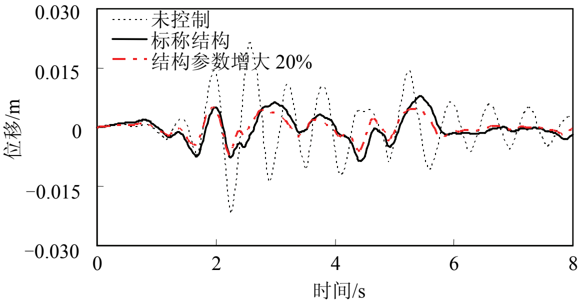

图 2　底层位移反应时程

Fig.2　Displacement responses of the first floor

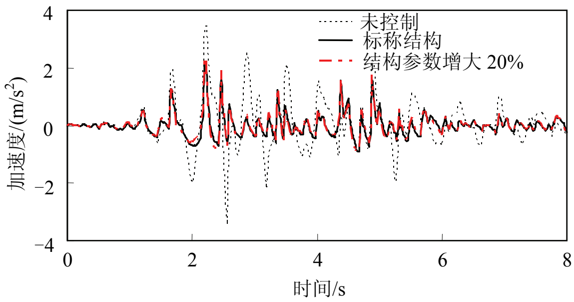

图 3 底层加速度反应时程

Fig.3　Acceleration responses of the first floor

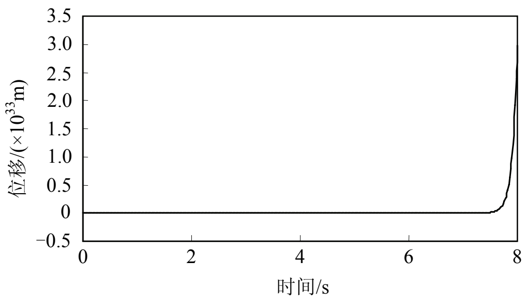

图 4　底层位移反应时程

Fig.4　Displacement responses of the first floor

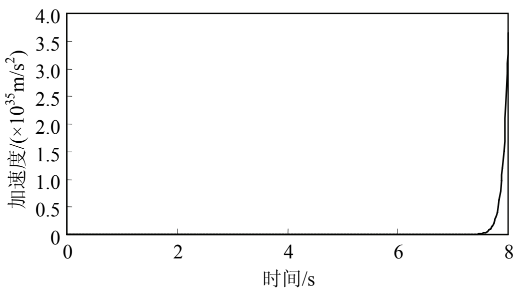

图 5　底层加速度反应时程

Fig.5　Acceleration responses of the first floor

从图 2 和图 3 中可以看出，当结构参数无摄动或增大 20%时，H_∞控制方法具有较好的控制效果和一定的鲁棒性；但是从图 4 和图 5 中可以看出，当结构参数减小 20%时，控制系统失去稳定性，结构反应急剧放大。因而，当结构参数存在的不确定性因素较大时，H_∞控制方法无法保证结构系统的稳定性。

为了克服传统 H_∞控制器的不足，设计鲁棒非脆弱 H_∞控制器，根据第 3 节所述方法，选取 $\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}\{4\times10^8\ \ 4\times10^8\ \ 2\times10^8\ \ 4\times10^5\ \ 4\times10^5\ \ 4\times10^5\}$，$\boldsymbol{R}=\mathrm{diag}\{10^{-7}\ \ 10^{-7}\ \ 10^{-7}\}$，同样假设结构刚度和阻尼变化的幅值分别为 20%，并假设控制力位置矩阵变化的幅值为 10%，取 $\gamma=2.66\times10^4$，$\varepsilon=2.84\times10^4$，$\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{\Gamma}=\boldsymbol{I}_6$，则由式(25)和式(26)可得控制器增益矩阵：

$$\boldsymbol{K}_u=10^7\times$$

$$\begin{bmatrix} 1.1182 & 0.8868 & 0.8685 & 0.3818 & 0.2877 & 0.2810 \\ -0.3065 & 1.0208 & 0.8947 & -0.0941 & 0.3721 & 0.2869 \\ -0.0407 & -0.3438 & 0.9793 & -0.0066 & -0.0919 & 0.3759 \end{bmatrix}$$

各种不同工况下，结构各层最大层间位移、最大加速度(相对于地面)和所对应的最大控制力如表 1 所示。其中：“H_∞-1”工况表示标称结构的鲁棒非脆弱 H_∞控制；“H_∞-2”工况表示结构控制力位置矩阵降低 10%的鲁棒非脆弱 H_∞控制；“H_∞-3”工况表示结构控制力位置矩阵增长 10%的鲁棒非脆弱 H_∞控制；“H_∞-4”工况表示结构控制力位置矩阵增长 10%、刚度和阻尼同时降低 20%的鲁棒非脆弱 H_∞控制；“H_∞-5”工况表示结构控制力位置矩阵增长 10%、刚度和阻尼同时增长 20%的鲁棒非脆弱 H_∞控制；“H_∞-6”工况表示调整性能指标中的权矩阵后，标称结构以及结构刚度和阻尼值同时增大和降低 20%情况下的鲁棒非脆弱 H_∞控制。

表 1　结构最大地震反应和控制力

Table 1　Maximum response quantities

工况	最大层间位移/cm			最大加速度/(cm/s²)			最大控制力/kN		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
无控制	2.18	1.91	1.09	348	520	651			
H_∞-1	0.88	0.63	0.34	265	337	362	1247	978	513
H_∞-2	0.91	0.66	0.37	269	345	372	1339	1042	547
H_∞-3	0.85	0.60	0.31	262	330	354	1187	921	483
H_∞-4	0.87	0.60	0.34	261	327	347	1313	1015	535
H_∞-5	0.80	0.59	0.30	261	327	353	1058	826	481
H_∞-6 0%	0.47	0.33	0.16	227	253	276	1636	1163	597
H_∞-6 20%	0.46	0.32	0.16	227	254	275	1523	1088	559
H_∞-6 −20%	0.48	0.33	0.16	227	252	275	1746	1233	631

从表中可以看出，1) 在设定的参数变化范围内，所提方法具有较好的鲁棒性；2) 所提控制方法对于各层层间位移的控制效果要优于各层加速度；

3) 从“H_∞-1”工况、“H_∞-2”工况和“H_∞-3”工况中可以看出，随着控制力位置矩阵增益的增大，结构体系具有更好的反应品质且结构的控制力峰值减小，反之则相反；4) 从“H_∞-3”工况、“H_∞-4”工况和“H_∞-5”工况中可以看出，在其他结构参数维持不变的情况下，增大结构的刚度和阻尼值(“H_∞-5”工况)可使结构系统在较小控制力作用下获得更好的反应品质。由以上结果看出，在实际中利用本文所提方法设计结构控制系统时，应尽可能在条件许可的情况下，较为合理地计算结构的刚度、阻尼和控制力等参数值。

以结构底层为例，不同工况下结构的位移和加速度反应时程如图 6~图 9 所示。其中：图 6 和图 7 表示“H_∞-1”工况、“H_∞-2”工况和“H_∞-3”工况下的结构反应时程；图 8 和图 9 表示“H_∞-1”工况、“H_∞-4”工况和“H_∞-5”工况下的结构反应时程。从图 6~图 9 中可以看出：1) 所提鲁棒 H_∞控制方法具有很好的控制效果和鲁棒性；2) 当结构参数存在不确定性时，鲁棒 H_∞控制器(图 6~图 9)的鲁棒性明显优于传统 H_∞控制器(图 2~图 5)。但从图 7 和图 9 以及表 1 中相应工况的数值中可以看出，对于加速度的控制效果略差一些。

为了改善结构体系的控制效果，调整鲁棒非脆弱 H_∞ 控制系统的权矩阵，选取 $\boldsymbol{R}=\mathrm{diag}\{10^{-6}\ \ 10^{-6}\ \ 10^{-6}\}$，$\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}\{4\times10^{8}\ \ 4\times10^{8}\ \ 2\times10^{8}\ \ 0.8\times10^{8}\ \ 0.8\times10^{8}\ \ 0.8\times10^{8}\}$，取 $\gamma=2.66\times10^{4}$，$\varepsilon=9.85\times10^{4}$，$\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{\Gamma}=\boldsymbol{I}_6$，则由式(25)和式(26)可得控制器增益矩阵：

$$\boldsymbol{K}_u=10^{8}\times\begin{bmatrix}1.2789 & -0.0692 & -0.0902 & 0.1688 & 0.05 & 0.0417\\ -1.3336 & 1.2490 & -0.0677 & -0.1188 & 0.1610 & 0.0498\\ -0.0467 & -1.3429 & 1.2776 & -0.0082 & -0.1194 & 0.1691\end{bmatrix}$$

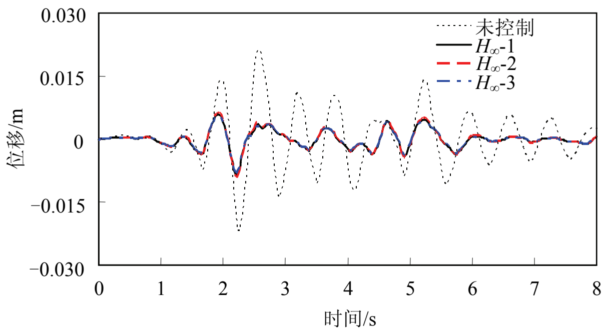

图 6　底层位移反应时程

Fig.6　Displacement responses of the first floor

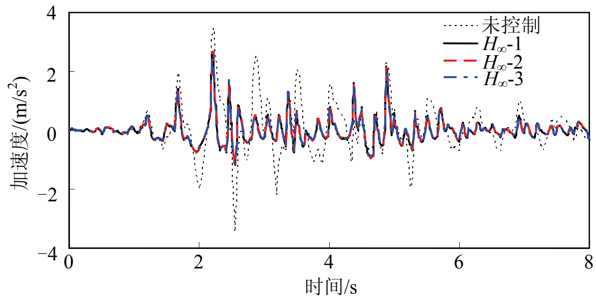

图 7　底层加速度反应时程

Fig.7　Acceleration responses of the first floor

标称结构以及结构刚度和阻尼同时增大 20%和减小 20%的两种不同情况下结构体系的最大地震反应如表 1 中的“H_∞-6”工况所示，从中可以看出，通过调整结构的权矩阵，可使结构体系在具有较好鲁棒性的前提下具有相对更优的控制效果。

不同工况下，标称结构体系各层的最大控制力比较如图 10 所示，图中“H_∞-0”工况表示传统 H_∞控制方法。从图 10 中可以看出，与传统 H_∞控制器相比，本文所提鲁棒非脆弱 H_∞控制器在相对较小的控制力作用下具有更优的控制效果。

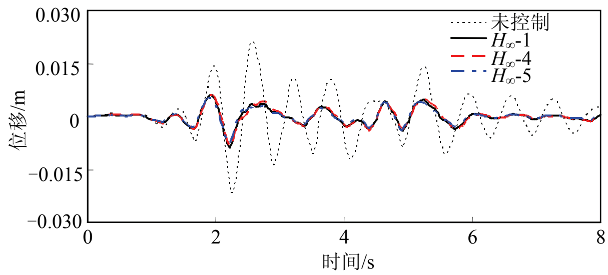

图 8　底层位移反应时程

Fig.8　Displacement responses of the first floor

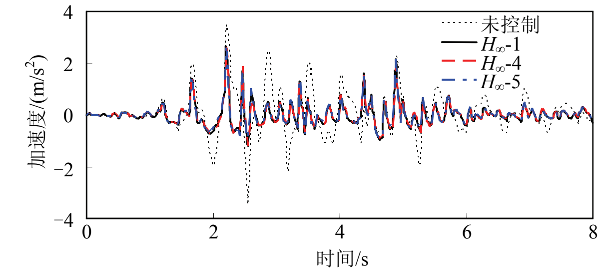

图 9　底层加速度反应时程

Fig.9　Acceleration responses of the first floor

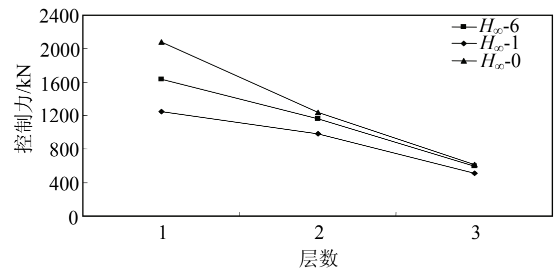

图 10　不同工况下结构控制力比较

Fig.10　Comparison of peak control forces in different cases

5 结论

为了使鲁棒 H_∞控制方法能尽快应用于实际的结构振动控制工程中，减小结构的震害，本文考虑一维地震动作用和结构参数不确定性的影响，提出一种基于 LMI 的鲁棒非脆弱 H_∞控制方法。通过将工程中常用的二次型最优指标结合于鲁棒 H_∞最优控制系统的分析中，并应用线性矩阵不等式减小求解的复杂度，使得控制器的设计较为简单，便于工程应用。以一个三层剪切型结构体系为例进行了相应的数值分析，仿真结果初步表明：

(1) 在结构参数存在不确定性影响的情况下，鲁棒非脆弱 H_∞控制算法比传统 H_∞控制算法具有更优的鲁棒性；

(2) 合理调整控制参数，可使结构系统在保证较好鲁棒性的前提下，具有相对最优的控制效果；

(3) 在利用本文所提鲁棒非脆弱 H_∞控制方法设计结构控制系统时，合理地计算结构的刚度、阻尼和控制力等参数值，可使控制系统在具有最优反应品质的前提下，获得更好的鲁棒性和非脆弱性。

参考文献：

[1] Housner C W, Bergman L A, Caughey T K, et al. Structural control: Past, present, and future [J]. ASCE Journal of Engineering Mechanics, 1997, 123(9): 897－971.

[2] Fisco N O, Adeli H. Smart structures: PartⅠ-Active and semi-active control [J]. Scientia Iranica, 2011, 18(3): 275－284.

[3] 欧进萍. 结构振动控制-主动、半主动和智能控制[M]. 北京: 科学出版社, 2003: 1－18.
Ou Jinping. Vibration control of structures [M]. Beijing: Science Press, 2003: 1－18. (in Chinese)

[4] 贾英民. 鲁棒 H_∞控制[M]. 北京: 科学出版社, 2007: 144－178.
Jia Yingmin. Robust H_∞ control [M]. Beijing: Science Press, 2007: 144－178. (in Chinese)

[5] 薛安克. 鲁棒最优控制理论与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2008: 97－123.
Xue Anke. Theory and application of robust optimal control [M]. Beijing: Science Press, 2008: 97－123. (in Chinese)

[6] 俞立. 鲁棒控制-线性矩阵不等式处理方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002: 41－67.
Yu Li. Robust control via LMI approach [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002: 41－67. (in Chinese)

[7] Yang J N, Wu J C. Experimental verifications of H_∞ and sliding-mode control for seismically excited buildings [J]. ASCE Journal of Structural Engineering, 1996, 122(1): 69－75.

[8] Calise A J, Sweriduk G D. Active attenuation of building structural response using robust control [J]. Journal of Engineering Mechanics, 1998, 124(5): 520－528.

[9] Wang S G, Roschke P N, Yeh H Y. Robust control for structural systems with unstructured uncertainties [J]. ASCE Journal of Engineering Mechanics, 2004, 130(3): 337－346.

[10] Du H P, Lam J, Sze K Y. Non-fragile H_∞ vibration control for uncertain structural systems [J]. Journal of Sound and Vibration, 2004, 273: 1031－1045.

[11] 李文章, 吴凌尧, 郭雷. 基于LMI 的结构振动鲁棒H_∞控制[J]. 振动工程学报, 2008, 21(2): 157－161.
Li Wenzhang, Wu Lingyao, Guo Lei. Robust H_∞ control of structural vibration based on LMI [J]. Journal of Vibration Engineering, 2008, 21(2): 157－161. (in Chinese)

[12] Wu J C, Chih H H, Chen C H. A robust method for seismic protection of civil frame building [J]. Journal of Sound and Vibration, 2006, 294: 314－328.

[13] 徐洋, 姜洪洲, 叶正茂, 韩俊伟. H_∞控制在 AMD Benchmark 结构主动控制中的应用研究[J]. 振动与冲击, 2005, 24(5): 14－22.
Xu Yang, Jiang Hongzhou, Ye Zhengmao, Han Junwei. Research on the application of H_∞ control in the AMD active structure control benchmark problem [J]. Journal of Vibration and Shock, 2005, 24(5): 14－22. (in Chinese)

[14] Boyd S P, Ghaoui L E, Feron E, et al. Linear matrix inequality in systems and control theory [M]. Philadelphia: SIAM, 1994: 7－37.