

文章编号: 1000-4750(2013)02-0174-08

# 地震作用下海冰与桥墩的间距对桥墩动力响应的影响研究

宋 波, 齐福强

(北京科技大学土木与环境工程学院, 北京 100083)

**摘 要:** 位于冰水海域的桥墩, 在波浪力作用下, 桥墩结构与周围海冰往往出现间隙, 地震作用下海冰与结构的动力相互作用呈现复杂多样化。本文在弹性力学中的弹性波传播理论及结构动力学的基础上, 考虑不同的海冰与桥墩间距, 建立了地震作用下桥墩、冰与水体的流固耦合动力方程。并以一矩形桥墩为研究对象, 研究了地震作用下, 海冰与桥墩的间距对矩形桥墩结构的动力响应及动水压力的影响。研究表明: 地震作用下, 海冰与桥墩间距对桥墩顶部的最大位移和最大加速度响应的影响不显著, 但是对桥墩侧面动水压力和墩底内力影响较大; 当海冰与桥墩存在间距且小于 1 倍结构尺寸时, 墩底的弯矩和剪力达到最大值。

**关键词:** 桥墩; 海冰; 间距; 动水压力; 动力响应

中图分类号: U442.5<sup>+</sup>9 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2011.07.0474

## THE EFFECT OF DISTANCE BETWEEN SEA ICE AND PIER ON DYNAMIC RESPONSES OF PIER STRUCTURES SUBJECT TO EARTHQUAKE

SONG Bo , QI Fu-qiang

(School of Civil &amp; Environment Engineering, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China)

**Abstract:** In icy waters, there are always distances between sea ice and structures due to the wave forces, and the seismic dynamic interaction of sea ice and structures is complicated. On the basis of elastic wave propagation theory and structural dynamics, the paper establishes the fluid-structure coupling dynamic equations of sea ice, water and piers with different distances between sea ice and structures. This paper takes a rectangular pier as an object of study, analyzes the effects of distance between sea ice and the pier on the seismic dynamic responses of the rectangular pier and hydrodynamic pressure. The results show that the distance between sea ice and the pier has little effect on the displacement responses and acceleration responses of the top pier under earthquake, but greatly influence the hydrodynamic pressures and inner forces of the bottom pier. The flexural moments and shear forces achieve the maximum when the distance between sea ice and pier exists and is less than the structure size.

**Key words:** piers; sea ice; distances; hydrodynamic pressure; dynamic responses

冰水海域及大型水库中修建的大跨度桥梁、沿岸及近海工程结构面临季节性冰冻和动水压力的双重影响, 历史上出现了多次严重的地震与冰荷载作用下的结构破坏。1964 年发生的阿拉斯加大地震是一个典型的例子, 在强震以及冰荷载共同作用

下, 多处桥梁下部墩柱受损乃至破坏。考虑近年来地震频发, 尤其是 2011 年日本 9.0 级大地震对海洋工程结构的安全设计和安全运营提出了更高的要求, 因此, 准确把握海冰对工程结构的地震动力响应的影响具有重要的现实意义。

收稿日期: 2011-07-22; 修改日期: 2011-12-30

基金项目: 国家自然科学基金项目(51078033, 51178045)

通讯作者: 齐福强(1982—), 男, 河北人, 博士生, 从事工程结构抗震设计研究(E-mail: safety-star@163.com).

作者简介: 宋 波(1962—), 男, 山东人, 教授, 博士, 博导, 从事城市基础设施抗震及减灾对策研究(E-mail: songbo@ces.ustb.edu.cn).

近几十年来,国外的 Peyton<sup>[1]</sup>、Neil<sup>[2]</sup>、Timco<sup>[3]</sup>以及国内的岳前进<sup>[4]</sup>、李志军<sup>[5]</sup>等学者进行了大量的实验和现场监测的海冰与结构作用研究,但是这些研究主要集中在海冰与结构静力作用和海冰对结构的冰激振动等方面,地震作用下结构与海冰的相互作用研究不足。日本学者佐藤貢一等<sup>[6]</sup>把结构、冰体系简化为3质点体系,研究了不同构筑物结构形式对结构与海冰地震相互作用的内力响应。加賀美隆明<sup>[7]</sup>、五十嵐康仁<sup>[8]</sup>等人也开展了一系列的海冰与海洋工程结构地震动力相互作用的数值计算研究。国内的贾玲玲<sup>[9]</sup>考虑冰荷载为冰激振动时程力荷载,利用时程分析法研究了地震作用下桥墩的动力响应。然而,由于海冰与结构相互作用的复杂性,地震作用下不同海冰条件对工程结构动力响应的影响尚有待于进一步研究。

在波浪力、风力等的作用下,桥墩结构周围的冰盘将产生破坏,海冰与桥墩结构之间产生间隙,地震作用下海冰对桥墩的直接作用效果消失,但对地震动水力有一定的影响,间接影响桥墩结构的地震动力响应。本文考虑流固耦合动力学问题,建立流固耦合有限元动力学方程,并以一矩形截面桥墩为研究背景,利用时程分析方法,研究海冰与结构间距对矩形墩柱地震响应的影响,分析不同的间距对地震动水压力的影响,为桥墩的抗震、抗冰设计提供科学依据。

### 1 地震作用下冰水域桥墩流固耦合平衡方程的建立

冰水域桥梁在外荷载作用下,动力问题涉及固体(海冰与桥墩)和液体两相介质之间的流固耦合相互作用,固体在液体中变形或运动,固体的变形或运动影响液体的运动,而液体的运动又产生动水压力改变作用于固体的荷载。图1显示了一矩形桥墩结构与海冰的间隙示意图。桥墩高度为  $h$ , 矩形截面长、宽分别为  $a$  和  $b$ , 所处水深为  $l$ 。海冰与桥墩间距为  $D$ , 海水在间隙范围  $D$  内为自由表面, 外侧为无限边界的海冰。

目前,由于流固耦合解析解还很难实现,即便是数值分析方法中的有限元法,也需对流固耦合进行合理的简化。利用有限元法研究水-结构动力相互作用是按照平衡和协调的原则,分别建立流体和固体以及界面的控制方程,通过一系列的动态分析,使流体和固体处于耦合状态。对于冰水域桥墩动力

耦合系统,水体要满足运动方程及边界上的条件。同时,假设水体为无热传递、可压缩和小扰动,且流体自由表面为小波动,桥墩则假设为线弹性<sup>[10]</sup>。

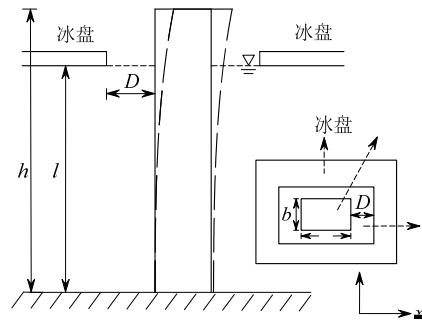


图1 海冰与桥墩结构示意图

Fig.1 The schematic drawing of ice and pier structure

对于流体域采用以流场压力  $p$  为基本未知量,对固体域以位移  $u$  为基本未知量。其中流体应满足方程:

$$p_{,ii} - \frac{1}{c_0^2} \ddot{p} = 0 \quad (1)$$

其中:  $p$  为流体压力;  $c_0$  为声音在流体中传播速度。

流体边界条件满足:

1) 自由表面:

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{g} \ddot{p} = 0 \quad (2)$$

2) 固定界面:

$$\frac{\partial p}{\partial n_f} = 0 \quad (3)$$

以上方程和边界条件只包含一个标量场变量,即压力  $p$ , 因而模型中每个节点只有一个变量,计算效率高。对于固体域应满足方程:

$$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho_s \ddot{u}_i \quad (4)$$

其中:  $\sigma_{ij}$  为固体应力分量;  $u_i$  为固体位移分量;  $f_i$  为固体体积力分量;  $\rho_s$  为固体质量密度。固体的边界条件满足:

1) 力的边界条件:

$$\sigma_{ij} n_j = \bar{T}_i \quad (5)$$

2) 位移边界条件:

$$u_n = u_i n_i \quad (6)$$

其中,  $\bar{T}_i$ 、 $u_i$  分别为固体上的已知面力分量和位移分量。

在流固交界面需满足运动学和力连续的边界条件:

1) 运动学条件: 流固耦合交界面的法向速度保持连续, 即:



移向量;  $u_{g1}$  和  $u_{g2}$  分别为海冰和桥墩节点随地震动的牵连位移向量。

## 2 海冰与桥墩间距对桥墩地震动力响应影响的数值分析

### 2.1 工程背景简介

选择一位于 14m 深水中的混凝土简支梁桥桥墩进行分析, 桥墩墩高 26m, 桥墩截面为矩形, 尺寸为 3.4m×2.4m, 如图 2 所示。上部结构以集中质量的形式考虑, 墩顶集中质量取一跨梁桥面系的质量  $4.29 \times 10^5 \text{kg}$ 。混凝土弹性模量为  $3.2 \times 10^4 \text{MPa}$ , 密度为  $2400 \text{kg/m}^3$ , 泊松比为 0.2。该水域冰厚一般为 0.4m~0.6m, 本文计算时取冰厚为 0.5m。水平地震动沿  $x$  轴方向输入, 计算时海冰与桥墩的间距不取绝对数据, 而以桥墩  $x$  轴方向尺寸倍数来考虑海冰与桥墩的间距(无量纲单位), 这可使得海冰与桥墩间距对工程结构地震动力响应的影响对一般工程结构具有普遍适用性。取海冰与桥墩间距  $d$  为 0 倍桥墩尺寸( $d=0$ )、0.3 倍桥墩尺寸( $d=0.3$ )、0.5 倍桥墩尺寸( $d=0.5$ )、1 倍桥墩尺寸( $d=1$ )、3 倍桥墩尺寸( $d=3$ )、5 倍桥墩尺寸( $d=5$ )、10 倍桥墩尺寸( $d=10$ )和  $\infty$  倍桥墩尺寸( $d=\infty$ )八种工况研究不同间距对桥墩动力响应及动水压力的影响。本文主要目的不是讨论桥墩的应力、应变及桥墩的抗震性能, 而是主要探讨在地震作用下海冰与结构间距对桥墩的动力响应的影响, 故本文计算时只对桥墩结构进行弹性的地震反应分析。根据桥墩所处二类场地, 计算时选择 El-Centro 地震水平分量, 其水平地震加速度峰值根据《建筑抗震设计规范》(GB50011-2001)调整至 200gal, 其加速度与速度时程曲线如图 3 所示。本文采用  $\alpha=0.5$ ,  $\beta=0.25$  的 Newmark- $\beta$  时程增量分析法, 采用瑞利比例阻尼考虑结构的阻尼, 桥墩结构

$$R = \frac{\text{有冰时结构的响应最大值} - \text{无冰时结构的响应最大值}}{\text{无冰时结构的响应最大值}} \times 100$$

#### 1) 海冰与桥墩间距对桥墩自振频率的影响。

海冰与桥墩不同间距情况下桥墩的前两阶自振频率以及与无冰时桥墩自振频率相比的变化率如表 1 所示。海冰与桥墩间距为 0 时桥墩自振频率明显大于海冰与桥墩存在间距情况, 这主要是由于海冰的约束作用增加了桥墩的侧向约束刚度。当海冰存在且与桥墩的间距大于 0 时, 随着间距增大, 桥墩自振频率逐渐增大, 但变化率较小, 不足 1%。海冰与结构间距为 0~1.0 时, 桥墩的自振频率基本

一致; 间距大于 1.0 且不大于 10.0 时, 桥墩的自振频率基本一致, 可见, 海冰与结构的间距为 1.0 可作为海冰与桥墩间距对桥墩动力特性影响分析的一个临界点。

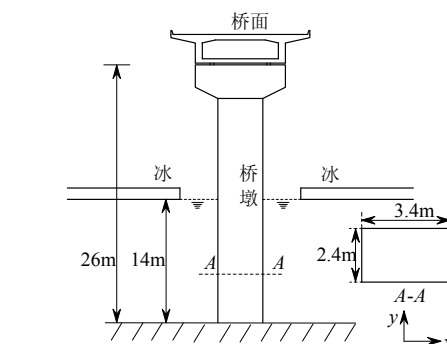


图 2 桥墩结构示意图

Fig.2 The schematic drawing of a pier structure

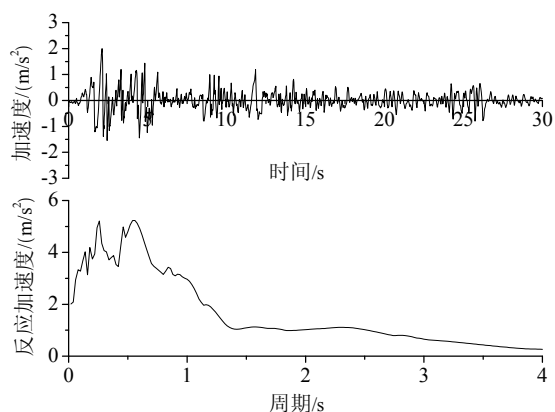


图 3 加载地震波记录加速度和反应谱曲线

Fig.3 The time-history curves of accelerations and response spectrum of loading seismic records

### 2.2 桥墩动力响应分析

为了研究地震作用下, 海冰与桥墩的间距对桥墩动力响应的影响, 以无冰时结构的响应为基准, 采用变化率  $R$  表示海冰与桥墩间距对桥墩结构地震响应最大值的影响程度:

一致; 间距大于 1.0 且不大于 10.0 时, 桥墩的自振频率基本一致, 可见, 海冰与结构的间距为 1.0 可作为海冰与桥墩间距对桥墩动力特性影响分析的一个临界点。

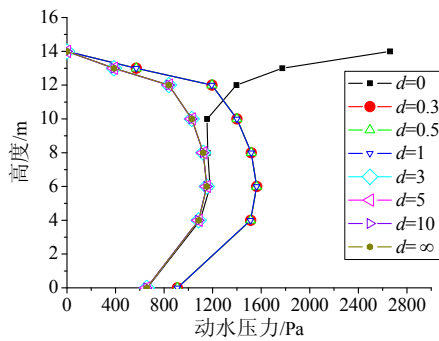
#### 2) 海冰与桥墩间距对动水压力响应的影响。

通过对地震作用下矩形截面桥墩上动水压力分布规律的研究, 可以了解地震作用下动水与桥墩相互作用机理, 以及动水压力对桥墩的动力响应的影响。沿桥墩高墩分布的最大动水压力如图 4 所示。

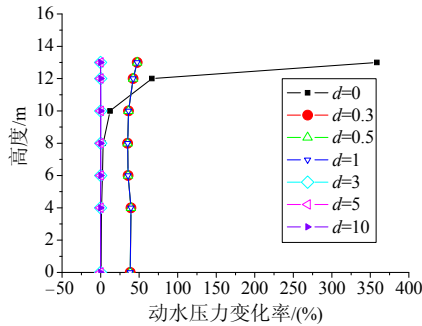
表 1 海冰与桥墩不同间距情况下桥墩自振频率及变化率

Table 1 The natural frequency of the pier with different displacements between sea ice and the pier

间距 $d$	第一阶	第一阶频率	第二阶	第二阶频率
	频率/Hz	变化率/(%)	频率/Hz	变化率/(%)
0 (全冰)	2.2250	126.1409	2.933	110.4017
0.3	0.990653	0.68635	1.398	0.286944
0.5	0.990653	0.68635	1.398	0.286944
1.0	0.990653	0.68635	1.39797	0.284792
3.0	0.990963	0.717858	1.39831	0.309182
5.0	0.990964	0.717959	1.39831	0.309182
10.0	0.990964	0.717959	1.39831	0.309182
$\infty$ (无冰)	0.9839	—	1.394	—



(a) 沿墩身动水压力分布



(b) 最大动水压力变化率

图 4 桥墩侧面动水压力沿水深分布及动水压力变化率

Fig.4 The distribution of hydrodynamic pressure and the change of hydrodynamic pressure along the pier side

由图 4 可以看出，八种计算工况的动水压力大致呈三种分布类型，即间距为 0，间距为 0.3~1，间距大于 1。其中间距为 0.3~1 的三种工况，随着间距增大动水压力呈逐渐减小，但相差不超过 2%，可认为动水压力响应基本相同；类似的情况也出现在间距为 3~ $\infty$ 的工况下，最大响应差值小于 1%。但是三种分布类型之间动水压力相差较大，可见海冰与桥墩的间距在一定范围内，动水压力变化不大；但间距超过一定范围后，间距对动水压力影响较大，尤其是在间距为 0 时，接近水面处动水压力急剧增大，其动水压力分布形式与其他间距的动水压力明显的抛物线分布形式有较大的差异。间距为

0.3~1 时沿墩身的动水压力只是在接近水面处小于间距为 0 时，其他高度的动水压力远大于其他间距时。因此，当海冰与工程结构间距小于结构地震方向的尺寸时，其动水压力更显著，比无冰时增大 50%，在工程结构设计中应予以考虑。

3) 海冰与桥墩间距对桥墩结构动力响应的影 响。

在桥梁抗震设计中，桥墩顶部相对底部的位移是进行桥墩地震变形验算的重要内容，并且桥墩顶部的加速度时程能反映出桥梁上部结构的运动状态。沿墩身的位移与加速度最大响应如图 5 和图 6 所示。

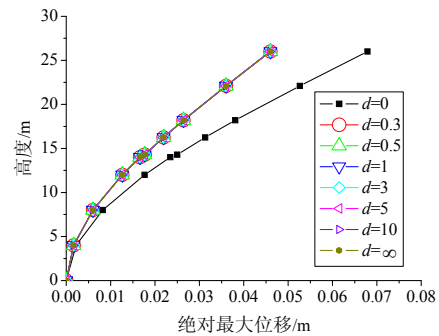


图 5 桥墩墩身最大位移响应

Fig.5 The maximum displacements of the pier

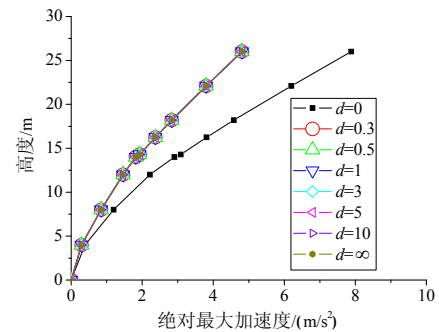


图 6 桥墩墩身最大加速度响应

Fig.6 The maximum accelerations of the pier

随着海冰与桥墩间距的增大，墩顶的位移和加速度最大响应逐渐减小，但是除间距为 0 的工况，其他工况的位移和加速度变化率较小，一般小于 2%，尤其是在间距大于 3 倍时，变化率小于 0.5%。间距为 0 的工况，桥墩墩身的位移和加速度最大响应明显大于其他工况，其墩顶最大位移和加速度响应变化率分别达到 47.6%和 63.9%。提取间距为 0、0.3、3 和  $\infty$  四种工况下桥墩顶部的运动特征进行对比，进行谱分析，墩顶位移和加速的 Fourier 谱如图 7 和图 8 所示。

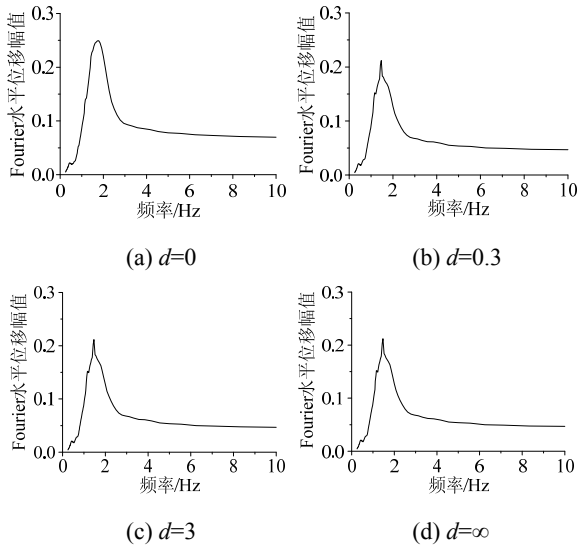


图7 桥墩顶部位移 Fourier 谱

Fig.7 The Fourier spectral curves of displacements of top pier

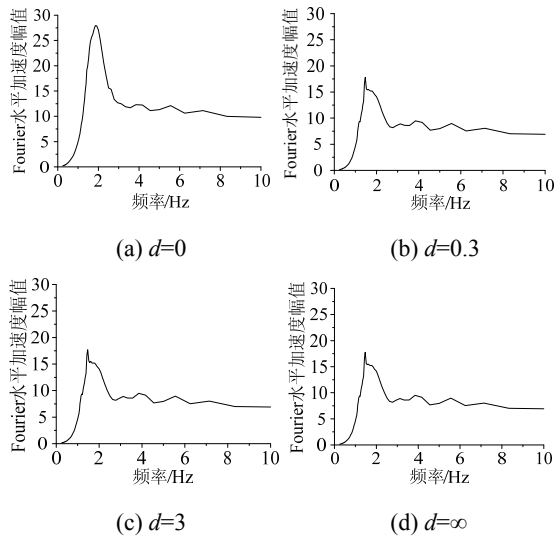


图8 桥墩顶部加速度 Fourier 谱

Fig.8 The Fourier spectral curves of accelerations of top pier

从图7和图8可以看出，间距为0，即冰与桥墩接触的工况下，水平位移和加速度幅值明显大于其他工况，而其他工况位移和加速度的 Fourier 谱曲线基本一致。由此可见，除海冰与桥墩接触的工况，其他间距情况下，桥墩顶部的响应趋势基本一致，即海冰与结构的间距对桥墩顶部的地震动力响应影响不明显。

4) 海冰与桥墩间距对桥墩底部内力响应的影 响

墩底的弯矩和剪力是反应桥梁受水平外荷载作用下桥墩抵抗外力的能力，是进行桥墩抗震验算的重要内容。通过对各工况的计算结果对比发现，间距为0.3~10的工况下墩底内力响应趋势基本一致，只是在幅值上有所不同。间距为0、间距为0.3、

间距为3和间距为 $\infty$ 四种工况下的墩底内力响应如图9和图10所示。

从图9和图10可以看出，四种工况下的弯矩和剪力时程曲线基本呈三种类型，即间距为0、间距大于0和间距为 $\infty$ ，分别对应海冰与桥墩连接、海冰与桥墩有间距和无冰三种现象。由于这三种现象计算时流固耦合方式有所差异，造成了桥墩内力响应趋势的不同。在海冰与桥墩固结的情况下，海冰的质量矩阵和刚度矩阵对桥墩系的总体质量矩阵和刚度矩阵产生较大的影响，改变了桥墩的自振频率，与输入地震动的卓越频率相近，在地震作用下，将对桥墩内力响应的影 响显著。在海冰与桥墩有间距的情况下，海冰将不与桥墩直接相互作用，

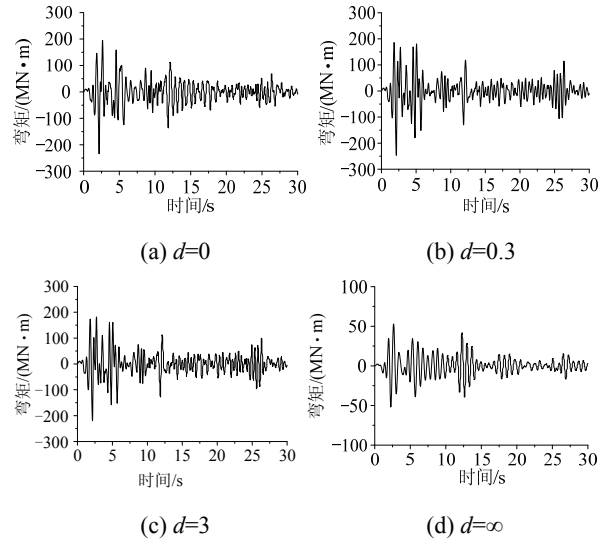


图9 墩底弯矩时程

Fig.9 The time-history curves of flexural moments

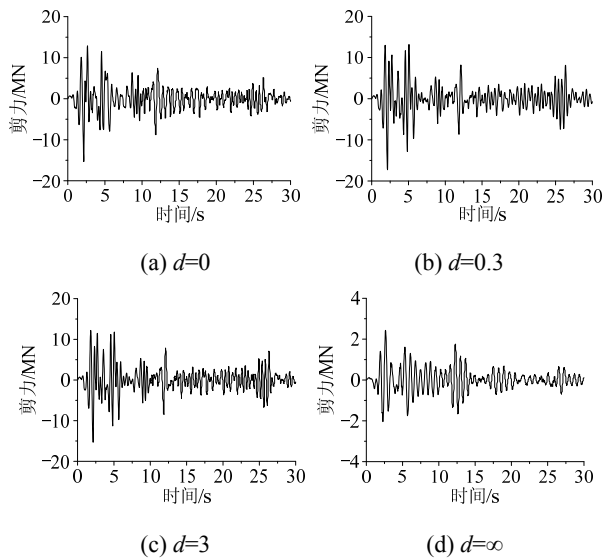


图10 墩底剪力时程

Fig.10 The time-history curves of shear forces

而是通过水体作为中间介质产生流固耦合的动力作用,此时,动水压力将会对桥墩的内力响应产生主要的影响。图 9 和图 10 中间距为 0.3 和间距为 3 的墩底弯矩和剪力分布形式基本一致,只是在峰值大小上有所差异,这与动水压力分布形式基本一致而峰值大小不同而相符(动水压力峰值分布见图 4 所示)。图 11 和图 12 显示了各种工况下墩底剪力与弯矩地震动力响应最大值以及变化率。

从图 11 和图 12 可以看出,海冰与桥墩的间距对墩底的内力响应影响显著,桥墩墩底的最大剪力和最大弯矩都发生在间距为 0.3 的工况时,剪力和弯矩的变化率分别达到 611.0%和 365.5%,不仅大于间距较大的工况下的变化率,而且大于间距为 0 时的变化率 528.4%和 340.6%。当间距大于 0.3 时,随着海冰与桥墩间距的增大,桥墩墩底的内力响应最大值逐渐减小,而且减小的趋势越来越显著。因此,桥墩墩底内力响应的最不利工况发生在海冰与桥墩间距为 0.3~1 时,这与此时地震动水压力较大有直接的关系。

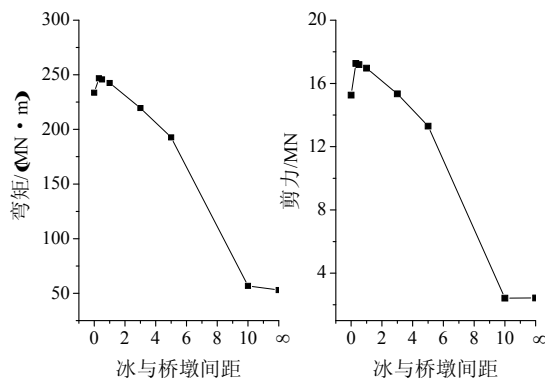


图 11 桥墩墩底最大内力

Fig.11 The maximum inner forces of the bottom pier

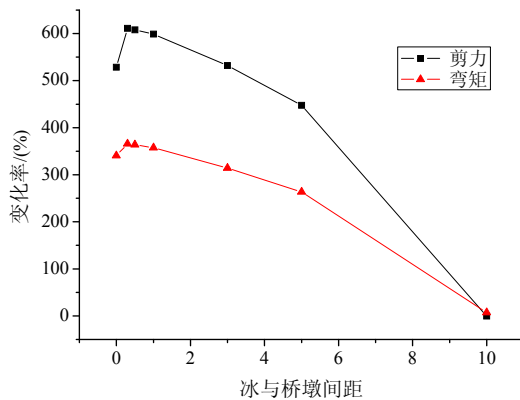


图 12 桥墩墩底最大内力变化率

Fig.12 The change of maximum inner forces of the bottom pier

### 3 结论

本文基于建立的地震作用下流固耦合动力方程的基础上,以一矩形截面桥墩为研究背景,研究海冰与桥墩间距对地震动水压力、桥墩动力响应的影响。算例表明:

(1) 地震作用下,当海冰与桥墩的间距大于 0 时,随着间距的增大,桥墩侧面动水压力逐渐减小。当间距小于结构尺寸时,桥墩受地震动水压力比无冰时大 50%以上;当间距大于 3 倍结构尺寸时,动水压力变化不再明显,基本与无冰的情况相当。

(2) 当海冰与桥墩存在间隙时,地震作用下桥墩顶部的响应趋势基本一致,墩顶的最大位移和最大加速度变化率一般小于 2%,尤其是在间距大于 3 倍时,变化率小于 0.5%。因此,海冰与桥墩的间距大于 0 时,不同的间距对桥梁上部结构的地震动响应影响不明显。但是当海冰与桥墩接触时,墩顶的位移和加速度响应影响较大,比无冰时分别增大 47.6%和 63.9%。

(3) 地震作用下海冰与桥墩的间距对墩底的内力响应影响显著,墩底的最大剪力和弯矩响应发生在海冰与桥墩的间距小于结构尺寸而大于 0 时,与无冰时相比,墩底的最大剪力和弯矩变化率可分别达到 611.0%和 365.5%,在工程设计中应特别注意此种情况。

#### 参考文献:

- [1] Peyton H R. Sea ice forces [C]. Ice Pressures Against Structures. Ottawa, Canada: National Research Council of Canada, 1968: 117—123.
- [2] Neil C R. Dynamic ice forces on piers and piles: An assessment of design guidelines in the light of recent research [J]. Canada Journal of Civil Engineering, 1976, 3: 305—341.
- [3] Timco G W, Nwogua O G, Christensen F T. Compliant model tests with the Great Belt West Bridge piers in ice part I: Test methods and key results [J]. Cold Regions Science and Technology, 1995, 23(2): 149—164.
- [4] 岳前进, 郭峰玮, 毕祥军, 许宁. 冰致自激振动测量与机理解释[J]. 大连理工大学学报, 2007, 47(1): 1—5.  
Yue Qianjin, Guo Fengwei, Bi Xiangjun, Xu Ning. Measurement and explanation for its mechanism of ice-induced self-excited vibration [J]. Journal of Dalian University of Technology, 2007, 47(1): 1—5. (in Chinese)
- [5] 李志军, 董吉武, 芦志强, 等. 海冰对圆台结构的作用

- 力及结构相互遮蔽关系[J]. 冰川冻土, 2008, 30(3): 514—519.
- Li Zhijun, Dong Jiwu, Lu Zhiqiang, et al. Ice forces on conical structures and shielding relation between conical structures [J]. *Journal of Glaciology and Geocryology*, 2008, 30(3): 514—519. (in Chinese)
- [6] 佐藤貢一, 中西三和, 安達洋. 氷海域と海洋構造物の地震における動的相互作用に関する研究: その 21 円錐形構造物の修正復元力モデルによる地震応答解析[C]. 日本建築学会大会学術講演梗概集. 東京: 日本建築学会, 2001: 265—266.
- SATO Kouichi, NAKANISHI Mitsukazu, ADACHI Hiroshi. Earthquake response characteristics of offshore structures surrounded by ice floes: Part 21 earthquake response analysis on modify hysteretic curve of the conical offshore structure [C]. *Summaries of technical papers of Annual Meeting Architectural Institute of Japan*. Tokyo: Architectural Institute of Japan, 2001: 265—266. (in Japanese)
- [7] 加賀美隆明, 佐藤貢一, 八島信良, 等. 氷海域における構造物の地震応答性状に関する研究: その 20. 氷盤と円錐形構造物の動的相互作用[C]. 日本建築学会大会学術講演梗概集. 東京: 日本建築学会, 2000: 297—298.
- KASGASMI Takaaki, SATO Koichi, YASHIMA Nobuyoshi, et al. Earthquake response characteristics of offshore structures surrounded by ice floes: Part 20 dynamic interaction between ice floes and a conical offshore structure [C]. *Summaries of technical papers of Annual Meeting Architectural Institute of Japan*. Tokyo: Architectural Institute of Japan, 2000: 297—298. (in Japanese)
- [8] 五十嵐康仁, 佐藤貢一, 中西三和等. 氷海域における構造物の地震応答性状に関する研究: その 23 デッキ部分の回転慣性を考慮した構造物の地震応答性状[C]. 日本建築学会大会学術講演梗概集. 東京: 日本建築学会, 2002: 341—342.
- IGARASHI Yasuhito, SATO Koichi, NAKANISHI Mitsukazu, et al. Study on earthquake response characteristics of offshore structures surrounded by ice floes: Part 23 earthquake response of structure influenced by rotation of deck part [C]. *Summaries of technical papers of Annual Meeting Architectural Institute of Japan*. Tokyo: Architectural Institute of Japan, 2002: 341—342. (in Japanese)
- [9] 贾玲玲. 波浪力对深水桥墩结构在地震和冰荷载作用下的响应影响分析[J]. 震灾防御技术, 2010, 5(2): 263—268.
- Jia Lingling. Seismic and ice response analysis of bridge pier in deep water with the wave effect [J]. *Technology for Earthquake Disaster Prevention*, 2010, 5(2): 263—268. (in Chinese)
- [10] 董汝博, 李昕, 周晶. 考虑流固耦合的海洋储油罐平台地震反应分析[J]. 船舶力学, 2010, 14(8): 887—893.
- Dong Rubo, Li Xin, Zhou Jing. Seismic analysis of offshore platform with oil storage tank including fluid-structure interaction [J]. *Journal of Ship Mechanics*, 2010, 14(8): 887—893. (in Chinese)
- [11] 练章华. 现代CAE技术与应用教程[M]. 北京: 石油工业出版社, 2004: 204—207.
- Lian Zhanghua. *Modern technology of CAE and application tutorial* [M]. Beijing: Petroleum Industry Press, 2004: 204—207. (in Chinese)
- [12] 周明芳, 张延庆. 弹性结构与晃动液体耦合系统的动力特性分析[J]. 中国石油大学学报(自然科学版), 2009, 33(5): 114—118.
- Zhou Mingfang, Zhang Yanqing. Dynamic characteristic analysis of elastic fluid-filled tank considering liquid sloshing [J]. *Journal of China University of Petroleum (Edition of Natural Science)*, 2009, 33(5): 114—118. (in Chinese)