文章编号: 1000-5641(2010)05-0049-07

几种期权的方差最优对冲策略

徐 耸[1,2]

(1. 华东师范大学 金融统计学院, 上海 200062;
2. 淮南师范学院 数学与计算机科学系, 安徽 淮南 232001)

摘要: 在支付红利的情况下, 考虑了两值期权CONC和AONC, 计算了其离散时间方差最优对冲策略, 给出其显式表达式. 并由此给出欧式看涨期权的最优对冲策略. 最后, 给出分红的预测例子.

关键词: 两值期权; 欧式看涨期权; 对冲; 鞅

中图分类号: O211.6 **文献标识码**: A

Variance-optimal hedging strategy for several options

XU Song[1,2]

(1. *School of Finance and Statistics, East China Normal University, Shanghai* 200062, *China*;
2. *Department of Mathematics and Computer Science, Huainan Normal University, Huainan Anhui* 232001, *China*)

Abstract: This paper explicitly computed the variance-optimal hedging strategy in discrete time for binary options and European call option on Dividend-paying Stock. An example of prediction of dividend was given.

Key words: binary option; European call option; hedging; martingale

0 引 言

寻找最优策略, 使对冲风险最小的问题, 已经有许多理论上的成果, 如存在性、性质、渐近误差和数值逼近等[1−6]. 然而, 在实际中易于计算的最优策略具体计算表达式并不多见. 本文考虑了用方差最优法度量风险的情况下, 两值期权和欧式看涨期权的最优对冲策略, 给出其显式表达式.

1 定义及连续分红模型

考虑两种类型的两值期权：现金或无值看涨期权(cash-or-nothing call)(简写为CONC)和资产或无值看涨期权(asset-or-nothing call)(简写为AONC).

定义 1[7] 现金或无值看涨期权(CONC): 在到期日 $t = T$, 若股票价格低于敲定价格, 则合约一文不值; 若超过敲定价格, 则按合约支付现金 1 元.

收稿日期: 2009-12

基金项目: 安徽省自然科学重点基金(KJ2010A234); 安徽省高校自然科学研究项目(KJ2010B451)

作者简介: 徐耸, 女, 博士研究生, 研究方向为金融数学. E-mail: songxuxs@gmail.com.

定义 2[7] 资产或无值看涨期权(AONC): 在到期日 $t=T$, 若股票价格低于敲定价格, 则合约一文不值; 若超过敲定价格, 则按合约支付股价.

假设没有交易费用和印花税. 并且假设

(H_1) 标的资产价格 S_t 适合随机微分方程 $\mathrm{d}S_t=(\mu-q)S_t\,\mathrm{d}t+\sigma S_t\,\mathrm{d}W_t$, μ,q,σ 分别是期望回报率, 红利率和波动率. $\{W_t,\mathbf{F}_t;t\geqslant 0\}$ 是布朗运动, 其中 $\mathbf{F}_t=\sigma(W_s,0\leqslant s\leqslant t),t\in[0,\infty)$.

(H_2) 无风险利率是 r.

利用 Δ-对冲法, 建立相应的投资组合 $\Pi=V-\Delta S$, 使得 Π 无风险, 可以计算出[7] $\Delta=\frac{\partial V}{\partial S}$. 由此给出本文两值期权的模型为[7]

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}V(t,y)+\dfrac{1}{2}\sigma^2y^2\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}V(t,y)+(r-q)y\dfrac{\partial}{\partial y}V(t,y)-rV(t,y)=0,\\ (t,y)\in[0,T)\times(0,\infty);\\ V(T,y)=f(y),\quad y\in(0,\infty).\end{cases}\tag{1}$$

其中 $f(y)$ 是收益函数, $f(y)=\begin{cases}H(y-K),(CONC);\\ SH(y-K),(AONC).\end{cases}$ $H(x)$ 是Heviside函数, 当 $x>0$ 时, $H(x)=1$, 当 $x<0$ 时, $H(x)=0$. 在风险中性测度 $\mathbb{P}$ 下, 标的资产模型变为

$$\mathrm{d}S_t=(r-q)S_t\,\mathrm{d}t+\sigma S_t\,\mathrm{d}W_t,\tag{2}$$

即 $S_t=S_0\mathrm{e}^{(r-q-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma W_t}$. 记 $\widetilde{S}_t=\mathrm{e}^{-(r-q)t}S_t$, 则 $\widetilde{S}_t$ 在 $\mathbb{P}$ 下关于 $\mathbf{F}_t$ 是鞅. 由式(1)和Ito公式知[8]

$$\mathrm{e}^{-rT}f(S_T)=V(0,S_0)+\int_0^T\mathrm{e}^{-qt}\varphi_t\,\mathrm{d}\widetilde{S}_t,\tag{3}$$

其中 $\mathrm{e}^{-qt}\varphi_t$ 是连续时刻的对冲策略, $\varphi_t=\frac{\partial V_t}{\partial S_t}$. 现实中的对冲总是离散的, 需要求出最优的离散对冲策略. 取 $0=t_1\leqslant\cdots\leqslant t_{N+1}=T$ 把 $[0,T]$ 分成 N 段, $[t_i,t_{i+1})$ 上仅有在 t_i 时刻的一次对冲, 其对冲策略记为 φ_{t_i}. 最优的离散对冲策略应该使总收益 $V(0,S_0)+\sum_{i=1}^N\int_{t_i}^{t_{i+1}}\varphi_{t_i}\,\mathrm{d}\widetilde{S}_t$ 在某种意义下尽可能逼近 $\mathrm{e}^{-rT}f(S_T)$, 其中 $V(0,S_0)$ 是期权发行价格, $\sum_{i=1}^N\int_{t_i}^{t_{i+1}}\varphi_{t_i}\,\mathrm{d}\widetilde{S}_t$ 是累计收益过程, $f(S_T)$ 是期权在 T 时刻的价值. 由式(3)知

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{-rT}f(S_T)-\Big(V(0,S_0)+\sum_{i=1}^N\int_{t_i}^{t_{i+1}}\varphi_{t_i}\,\mathrm{d}\widetilde{S}_t\Big)\\ &=\int_0^T\mathrm{e}^{-qt}\varphi_t\,\mathrm{d}\widetilde{S}_t-\sum_{i=1}^N\int_{t_i}^{t_{i+1}}\varphi_{t_i}\,\mathrm{d}\widetilde{S}_t=\sum_{i=1}^N\int_{t_i}^{t_{i+1}}\Big(\mathrm{e}^{-qt}\varphi_t-\varphi_{t_i}\Big)\,\mathrm{d}\widetilde{S}_t.\end{aligned}$$

本文考虑 $[0,T]$ 上的如下形式的总对冲误差

$$R_T=\mathbb{E}_{S_0}\Big|\sum_{i=1}^N\int_{t_i}^{t_{i+1}}(\mathrm{e}^{-qt}\varphi_t-\varphi_{t_i})\,\mathrm{d}\widetilde{S}_t\Big|^2,$$

其中 $\mathbb{E}$ 是 $\mathbb{P}$ 对应的数学期望。由 $\widetilde{S}_t$ 在 $\mathbb{P}$ 下是鞅, 可得

$$R_T=\sum_{i=1}^N\mathbb{E}_{S_0}\Big|\int_{t_i}^{t_{i+1}}(\mathrm{e}^{-qt}\varphi_t-\varphi_{t_i})\,\mathrm{d}\widetilde{S}_t\Big|^2=\sum_{i=1}^N\mathbb{E}_{S_0}\Big|\int_{t_i}^{t_{i+1}}(\mathrm{e}^{-qt}\varphi_t-\varphi_{t_i})^2\sigma^2\widetilde{S}_t^{\,2}\,\mathrm{d}t\Big|,\tag{4}$$

使式(4)最小的$\{\varphi_{t_i}\}_{i=1}^N$称为方差最优对冲策略.

2　连续分红的方差最优对冲策略

考虑 $[a,b)=[t_i,t_{i+1}), 0\leqslant a\leqslant b\leqslant T, i=1,2,\cdots,N$. 在$[a,b)$上, 投资者只在$a$时刻进行一次对冲, 方差最优对冲策略记为$\upsilon_a$. $[a,b)$可以是两个开盘日间的收盘时间, 节假日以及开盘时间的任一段交易时间. 由式(4)易得

$$\upsilon_a=\frac{\mathbb{E}(\int_a^b \mathrm{e}^{-qt}\varphi_t\widetilde{S}_t^2\,\mathrm{d}t|\mathbf{F}_a)}{\mathbb{E}(\int_a^b \widetilde{S}_t^2\,\mathrm{d}t|\mathbf{F}_a)},\tag{5}$$

其中$\varphi_t=\frac{\partial V(t,S_t)}{\partial S_t}$, 且$\varphi_t\in\mathbf{F}_t$. 下面给出$\upsilon_a$的具体计算式. 由式(3)两边取条件期望得

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-rT}f(S_T)|\mathbf{F}_t]=V(0,S_0)+\int_0^t \mathrm{e}^{-qu}\varphi_u\,\mathrm{d}\widetilde{S}_u.$$

令$M_t=\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-rT}f(S_T)|\mathbf{F}_t]=V(0,S_0)+\int_0^t \mathrm{e}^{-qu}\varphi_u\,\mathrm{d}\widetilde{S}_u$, $N_t=\widetilde{S}_t=S_0+\int_0^t\mathrm{d}\widetilde{S}_u$. 则$M_t,N_t$是鞅. 且可料二次协变差过程

$$\begin{aligned}<M,N>_t &= \sigma^2\int_0^t \mathrm{e}^{-qu}\varphi_u\widetilde{S}_u^2\,\mathrm{d}u+S_0V(0,S_0),\\ <M,N>_b-<M,N>_a &= \sigma^2\int_a^b \mathrm{e}^{-qu}\varphi_u\widetilde{S}_u^2\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

故有$\sigma^2\mathbb{E}\Big[\int_a^b \mathrm{e}^{-qu}\varphi_u\widetilde{S}_u^2\,\mathrm{d}u|\mathbf{F}_a\Big]=\mathbb{E}[<M,N>_b-<M,N>_a|\mathbf{F}_a]$. 由可料二次协变差过程的性质知, $M_tN_t-<M,N>_t\in\mathcal{M}_0$, 其中$\mathcal{M}_0$是零初值的鞅的集合. 故有

$$\begin{aligned}\sigma^2\mathbb{E}[\int_a^b \mathrm{e}^{-qu}\varphi_u\widetilde{S}_u^2\,\mathrm{d}u|\mathbf{F}_a] &= \mathbb{E}[M_bN_b-M_aN_a|\mathbf{F}_a]\\ &= \mathbb{E}[f(S_T)\mathrm{e}^{-rT}\widetilde{S}_b|\mathbf{F}_a]-\mathbb{E}[f(S_T)\mathrm{e}^{-rT}\widetilde{S}_a|\mathbf{F}_a].\end{aligned}\tag{6}$$

下面给出最优对冲策略的具体表达式.

定理 1　CONC在$[a,b)$上的最优对冲策略

$$\upsilon_a^{\mathrm{CONC}}=\frac{\mathrm{e}^{-rT}[N(d_1+\frac{\sigma(b-a)}{\sqrt{T-a}})-N(d_1)]}{\mathrm{e}^{-(r-q)a}S_a(\mathrm{e}^{\sigma^2(b-a)}-1)},$$

其中$d_1=\frac{\ln\frac{S_a}{K}+(r-q-\frac{\sigma^2}{2})(T-a)}{\sigma\sqrt{T-a}}$, $N(\cdot)$是标准正态分布函数.

证　明

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(\int_a^b \widetilde{S}_t^2\,\mathrm{d}t|\mathbf{F}_a\Big) &= \mathbb{E}_{S_a}\Big[\int_a^b \widetilde{S}_t^2\,\mathrm{d}t\Big]\\ &= \widetilde{S}_a^2\int_a^b\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{2\sigma x-\sigma^2(t-a)}\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-a)}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2(t-a)}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ &= \widetilde{S}_a^2\int_a^b\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-a)}}\mathrm{e}^{\sigma^2(t-a)}\mathrm{e}^{-\frac{(x-2\sigma(t-a))^2}{2(t-a)}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ &= \widetilde{S}_a^2\int_a^b \mathrm{e}^{\sigma^2(t-a)}\,\mathrm{d}t=\widetilde{S}_a^2[\mathrm{e}^{\sigma^2(b-a)}-1]/\sigma^2.\end{aligned}\tag{7}$$

由式(6)知

$$\sigma^2\mathbb{E}\Big[\int_a^b \mathrm{e}^{-qt}\varphi_t\widetilde{S}_t^2\,\mathrm{d}t|\mathbf{F}_a\Big]=\mathbb{E}[H(S_T-K)\mathrm{e}^{-rT}\widetilde{S}_b|\mathbf{F}_a]-\mathbb{E}[H(S_T-K)\mathrm{e}^{-rT}\widetilde{S}_a|\mathbf{F}_a].$$

下面分别计算上式中的两项, 记$\Theta=\{z:S_a\mathrm{e}^{\sigma z+(r-q-\frac{\sigma^2}{2})(T-a)}>K\}$.令$z'=\frac{z-(b-a)\sigma}{\sqrt{T-a}}$, 则$\Theta=\{z':z'>-d_1-\frac{\sigma(b-a)}{\sqrt{T-a}}\}$. 于是有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[H(S_T-K)\mathrm{e}^{-rT}\widetilde{S}_b|\mathbf{F}_a]\\
&=\mathrm{e}^{-rT}\widetilde{S}_a\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}I_\Theta(z)\exp\Big\{\sigma y-\frac{\sigma^2}{2}(b-a)\Big\}\\
&\quad\times\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-b)}}\exp\Big\{-\frac{(z-y)^2}{2(T-b)}\Big\}\frac{1}{\sqrt{2\pi(b-a)}}\exp\Big\{-\frac{y^2}{2(b-a)}\Big\}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\\
&=\mathrm{e}^{-rT}\widetilde{S}_a\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}I_\Theta(z)\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-b)}}\frac{1}{\sqrt{2\pi(b-a)}}\\
&\quad\times\exp\left\{-\frac{[y-\dfrac{(b-a)(T-b)\sigma+(b-a)z}{T-a}]^2}{2(T-b)(b-a)/(T-a)}\right\}\exp\left\{-\frac{[z-(b-a)\sigma]^2}{2(T-a)}\right\}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\
&=\mathrm{e}^{-rT}\widetilde{S}_a\int_{-\infty}^{\infty}I_\Theta(z')\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{z'^2}{2}}\,\mathrm{d}z'\\
&=\mathrm{e}^{-rT}\widetilde{S}_aN\Big(d_1+\frac{\sigma(b-a)}{\sqrt{T-a}}\Big).
\end{aligned}\tag{8}$$

令 $z''=\frac{z}{\sqrt{T-a}}$, 则$\Theta=\{z'':z''>-d_1\}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[H(S_T-K)\mathrm{e}^{-rT}\widetilde{S}_a|\mathbf{F}_a]&=\mathrm{e}^{-rT}\widetilde{S}_a\int_{-\infty}^{\infty}I_\Theta(z)\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-a)}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2(T-a)}}\,\mathrm{d}z\\
&=\mathrm{e}^{-rT}\widetilde{S}_a\int_{-\infty}^{\infty}I_\Theta(z'')\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{z''^2}{2}}\,\mathrm{d}z''\\
&=\mathrm{e}^{-rT}\widetilde{S}_aN(d_1).
\end{aligned}\tag{9}$$

由式(7)–(9)及$\widetilde{S}_a=\mathrm{e}^{-(r-q)a}S_a$. 定理 1 得证.

定理 2 AONC 在 $[a,b)$ 上的最优对冲策略

$$v_a^{AONC}=\frac{\mathrm{e}^{\sigma^2(b-a)}N\Big(d_2+\dfrac{\sigma(b-a)}{\sqrt{T-a}}\Big)-N(d_2)}{\mathrm{e}^{qT}(\mathrm{e}^{\sigma^2(b-a)}-1)},$$

其中 $d_2=\frac{\ln\frac{S_a}{K}+(r-q+\frac{\sigma^2}{2})(T-a)}{\sigma\sqrt{T-a}}$, $N(\cdot)$是标准正态分布函数.

证　明

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}[S_T H(S_T-K)\mathrm{e}^{-rT}\widetilde{S}_b|\mathbf{F}_a]\\
&=\mathrm{e}^{-q(T-a)}\mathrm{e}^{-rT}S_a\widetilde{S_a}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}I_\Theta(z)\exp\Big\{\sigma z+\Big(r-\frac{\sigma^2}{2}\Big)(T-a)\Big\}\\
&\quad\times\exp\Big\{\sigma y-\frac{\sigma^2}{2}(b-a)\Big\}\frac{\exp\Big\{-\dfrac{(z-y)^2}{2(T-b)}\Big\}}{\sqrt{2\pi(T-b)}}\frac{\exp\Big\{-\dfrac{y^2}{2(b-a)}\Big\}}{\sqrt{2\pi(b-a)}}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\\
&=\mathrm{e}^{-qT}\mathrm{e}^{\sigma^2(b-a)}\widetilde{S}_a^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}I_{\Theta(z)}\exp\left\{-\frac{\Big[y-\dfrac{(b-a)(T-b)\sigma+(b-a)z}{T-a}\Big]^2}{2(T-b)(b-a)/(T-a)}\right\}\\
&\quad\times\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-b)}}\frac{1}{\sqrt{2\pi(b-a)}}\exp\Big\{-\frac{[z-(b+T-2a)\sigma]^2}{2(T-a)}\Big\}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z
\end{aligned}
$$

令 $\bar{z}=\frac{z-(b+T-2a)\sigma}{\sqrt{T-a}}$, 则 $\Theta=\{\bar{z}:\bar{z}>-d_2-\frac{\sigma(b-a)}{\sqrt{T-a}}\}$. 故上式

$$
=\mathrm{e}^{-qT}\mathrm{e}^{\sigma^2(b-a)}\widetilde{S}_a^2\int_{-\infty}^{\infty}I_\Theta(\bar{z})\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\bar{z}^2}{2}}\,\mathrm{d}\bar{z}=\mathrm{e}^{-qT}\mathrm{e}^{\sigma^2(b-a)}\widetilde{S}_a^2N\Big(d_2+\frac{\sigma(b-a)}{\sqrt{T-a}}\Big). \tag{10}
$$

经过类似计算可得$\mathbb{E}[S_TH(S_T-K)\mathrm{e}^{-rT}\widetilde{S}_a|\mathbf{F}_a]=\mathrm{e}^{-qT}\widetilde{S}_a^2N(d_2)$. 再由式(7),(10), 定理 2 得证.

定理 3　欧式看涨期权在$[a,b)$上的最优对冲策略

$$
\upsilon_a^{Eur}=\frac{\mathrm{e}^{\sigma^2(b-a)}N\Big(d_2+\dfrac{\sigma(b-a)}{\sqrt{T-a}}\Big)-N(d_2)}{\mathrm{e}^{qT}(\mathrm{e}^{\sigma^2(b-a)}-1)}+\frac{K\mathrm{e}^{-rT}\Big[N(d_1)-N\Big(d_1+\dfrac{\sigma(b-a)}{\sqrt{T-a}}\Big)\Big]}{\mathrm{e}^{-(r-q)a}S_a(\mathrm{e}^{\sigma^2(b-a)}-1)}. \tag{11}
$$

证　明　欧式看涨期权的收益函数 $f(S_t)=(S_T-K)^+=f^{\mathrm{AONC}}(S_T)-Kf^{\mathrm{CONC}}(S_T)=SH(y-K)-KH(y-K)$, 从定理的证明过程可以看出欧式看涨期权的最优对冲策略 $\upsilon_a^{\mathrm{Eur}}=\upsilon_a^{\mathrm{AONC}}-K\upsilon_a^{\mathrm{CONC}}$, 定理 3 得证.

注　当波动率 $\sigma=\sigma(t)$, 取 $[t_k,t_{k+1})$ 上的波动率 σ_k 为

$$
\sigma_k=\frac{1}{t_{k+1}-t_k}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\sigma^2(u)\,\mathrm{d}u.
$$

当 $a=t_k$, $k=1,\cdots,n$, 定理 1–3 中只要取 $\sigma=\sigma_k$, 结论依然成立.

3　离散分红的方差最优对冲策略及红利的预测

现实中很多公司的分红是离散的, 有其习惯性的发放时间. 并且根据每股收益, 经营能力, 上期分红, 流通股的比例等因素决定分红是否发放. 离散分红情况下的期权价格已有具体计算公式, 见文献[9,10]. 设离散分红为$D(S,t)$, 在t_d时刻发放, 则红利

$$
D(s,t)=D_\delta(S)\delta(t-t_d),\quad 0\leqslant t_d\leqslant T,
$$

其中 $\delta(t-t_d)$ 是狄拉克 δ 函数, 当 $t-t_d\neq0$ 时, $\delta(t-t_d)=0$. 此时 Black-Scholes 期权模型为

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial t}V(t,y)+\dfrac{1}{2}\sigma^2y^2\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}V(t,y)+(ry-D(y,t))\dfrac{\partial}{\partial y}V(t,y)-rV(t,y)=0,\quad (t,y)\in[0,T)\times(0,\infty);\\
V(T,y)=f(y),\quad y\in(0,\infty).
\end{cases}
$$

本节中假设不分红的风险资产定价模型为 $\mathrm{d}S_t=\mu S_t\,\mathrm{d}t+\sigma S_t\,\mathrm{d}W_t$. 分红 $D_\delta(S)=AS$, 则 $S_{t_d}=S_{t_d^-}-D_\delta(S)$. 讨论欧式看涨期权的最优对冲策略, 则 $f(S_T)=(S_T-K)^+$.

令 $d_+=\frac{\ln\frac{S_a}{K}+(r+\frac{\sigma^2}{2})(T-a)}{\sigma\sqrt{T-a}}$, $d_-=\frac{\ln\frac{S_a}{K}+(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-a)}{\sigma\sqrt{T-a}}$, 则不分红的Black-Schole期权价格为 $V_{BS}(S,t)=S_tN(d_+)-K\mathrm{e}^{-r(T-t)}N(d_-)$, 离散分红情况下的期权价格为[10]

$$V(S,t)=\begin{cases}V_{BS}(S\mathrm{e}^{-A},t),\ 0\leqslant t<t_d;\\ V_{BS}(S,t),\ t_d<t<T.\end{cases}$$

可见在 $0\leqslant t<t_d$ 时, $V(S,t)$ 相当于从初始价格 $S_0\mathrm{e}^{-A}$ 出发的不分红的Black-Scholes期权定价的值. 在 $t_d<t<T$ 时, 等于不分红的Black-Scholes期权定价的值, 故由定理3的类似推导可得在 $[a,b)\subset[0,t_d)$ 上方差最优的离散对冲策略为

$$\upsilon_a^{\mathrm{Eur}}=\frac{\mathrm{e}^{\sigma^2(b-a)}N\Big(d'_++\dfrac{\sigma(b-a)}{\sqrt{T-a}}\Big)-N(d'_+)}{\mathrm{e}^A(\mathrm{e}^{\sigma^2(b-a)}-1)}+\frac{K\mathrm{e}^{-rT}\Big[N(d'_-)-N\Big(d'_-+\dfrac{\sigma(b-a)}{\sqrt{T-a}}\Big)\Big]}{\mathrm{e}^{-ra}S_a(\mathrm{e}^{\sigma^2(b-a)}-1)},$$

其中 $d'_+=\frac{\ln\frac{\mathrm{e}^{-A}S_a}{K}+(r+\frac{\sigma^2}{2})(T-a)}{\sigma\sqrt{T-a}}$, $d'_-=\frac{\ln\frac{\mathrm{e}^{-A}S_a}{K}+(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-a)}{\sigma\sqrt{T-a}}$. 在式(12)中令 $q=0$, 可得在 $[a,b)\subset(t_d,T)$ 上方差最优的离散对冲策略.

例子 对美国股市的几种指标股截止到2009年11月16日前的 n 次分红数据进行分析(数据来源于http://finance.yahoo.com). 记 n 次分红为 $D_1,D_2,\cdots,D_n$, 相应分红日前一日的收盘价为 $S_1,S_2,\cdots,S_n$, 记 $B=\sum\limits_{i=1}^{n}D_i/\sum\limits_{i=1}^{n}S_i$, $D'_i=D_i-BS_i,i=1,2,\cdots,n$. 记来自总体 $\widetilde{D}$(设其分布为 $F(x)$)的样本 $D'_1,D'_2,\cdots,D'_n$ 按升序排序后变为 $\widetilde{D}_1,\widetilde{D}_2,\cdots,\widetilde{D}_n$, 则其经验分布函数为 $F_n(\widetilde{D}_k)=\frac{k^*}{n},k=1,2,\cdots,n$. 其中 $k^*=\max\{i:\widetilde{D}_i=\widetilde{D}_k\}$, 即相同的 $\widetilde{D}_k$ 的排序数最大的一个. 记 $[\widetilde{D}_1,\widetilde{D}_n]$ 上的均匀分布的分布函数为 $F^*(x)$. 假设 $H_0:F(x)=F^*(x)$. 取统计量

$$G_n=\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}|F_n(x)-F^*(x)|=\max_{1\leqslant k\leqslant n}|F_n(\widetilde{D}_k)-F^*(\widetilde{D}_k)|.$$

表1给出了几种美股指标股的 $\sqrt{n}G_n$ 值. 给定 $\alpha=0.05$, $P(\sqrt{n}G_n>\lambda_{0.05})=0.05$, 由 $Q(\lambda)$ 表知 $Q(\lambda_{0.05})=0.95$, $\lambda_{0.05}=1.36$. 可以看出, 对于几种指标股和给定 n, $\sqrt{n}G_n<1.36$.

表1 $\alpha=0.05$ 对应的科尔莫戈洛夫检验

Tab. 1 Kolmogorov test with $\alpha=0.05$

股票	IBM$_{(n=30)}$	BAC$_{(n=30)}$	AIG$_{(n=20)}$	AA$_{(n=70)}$	DD$_{(n=20)}$	AEP$_{(n=20)}$
$\sqrt{n}G_n$	1.12	1.00	1.35	1.31	1.16	0.95

根据科尔莫戈洛夫检验法, 接受原假设 H_0, 即 $\widetilde{D}$ 在 $[\widetilde{D}_1,\widetilde{D}_n]$ 上服从均匀分布. 由此, 可给出红利 $D_\delta(S)$ 的估计为 $D_\delta(S)=BS+\xi$, 其中 B 是历史分红的平均红利率, S 是分红日前日的收盘价, ξ 服从均匀分布.

[参 考 文 献]

[1] SCHWEIZER M. Variance-optimal hedging in discrete time [J]. Mathematics of Operations Research, 1995, 20: 1-32.

[2] GOBET E, TEMAM E. Discrete time hedging errors for options with irregular payoffs [J]. Finance and Stochastics, 2001(5): 357-367.

[3] FÖLLMER H, SONDERMANN D. Hedging of non-redundant contingent claims [M]// Hildebrand W and Mas-Colell Contributions to Mathematical Economics[S.L]: North-Holland, 1986.
[4] GEISS S. Quantitative approximation of certain stochastic integrals [J]. Stoch Stochastics and Stochastics Reports, 2002, 73(3-4): 241-270.
[5] ZHANG R. Couverture approchée des options européennes [D/OL]. Paris: Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1999. http://cermics.enpc.fr/theses/99/zhang-ruotao.ps.gz.
[6] HYASHI T, MYKLAND P A. Evaluatiing hedging errors: an asymptotic approach [J]. Mathematical Finance, 2005, 15(2): 309-343.
[7] JIANG L S. Mathematical Modeling and Methods of Option Pricing [M]. Singapore: World Scientific Publishing Company, 2005.
[8] HULL J. Options, Futures, and Other Derivatives [M]. Englewood Cliffs NJ: Prentice Hall, 1999.
[9] COMPANY R, GONZÁLEZ A L, JÓDAR L. Numerical solution of modified Black-Scholes equation pricing stock options with discrete dividend [J]. Mathematical and Computer Modelling, 2006, 44: 1058-1068.
[10] BALLESTER C, COMPANY R, JÓDAR L. An efficient method for option pricing with discrete dividend payment [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2008, 56: 822-835.

(上接第 32 页)

其中式(12)–(14)

$$\boldsymbol{G}_1=\boldsymbol{E}_1^{-1}\begin{pmatrix} F_{11}-R & F_{12}-F_{15}\bar{\Delta}^{-1}\bar{\Omega} & F_{13} & \boldsymbol{X}_{14}\\ \Delta^{-1}F_{51} & \Delta^{-1}F_{52} & \Delta^{-1}F_{53} & \boldsymbol{X}_{24}\\ F_{61} & F_{62} & F_{63} & \boldsymbol{X}_{34}\\ \boldsymbol{X}_{41} & \boldsymbol{X}_{42} & \boldsymbol{X}_{43} & \boldsymbol{X}_{44}\end{pmatrix}\boldsymbol{E}_4^{-H},$$

$$\boldsymbol{G}_2=\boldsymbol{E}_2^{-1}\begin{pmatrix} R & F_{15}\bar{\Delta}^{-1} & F_{16} & \boldsymbol{Y}_{14}\\ F_{21}-\Omega\Delta^{-1}F_{51} & F_{25}\bar{\Delta}^{-1} & F_{26} & \boldsymbol{Y}_{24}\\ F_{31} & F_{35}\bar{\Delta}^{-1} & F_{36} & \boldsymbol{Y}_{34}\\ \boldsymbol{Y}_{41} & \boldsymbol{Y}_{42} & \boldsymbol{Y}_{43} & \boldsymbol{Y}_{44}\end{pmatrix}\boldsymbol{E}_3^{-H},$$

矩阵 $\boldsymbol{R}\in\mathbf{C}^{i\times i'},\boldsymbol{X}_{i4},\boldsymbol{X}_{4i},\boldsymbol{Y}_{i4},\boldsymbol{Y}_{4i},i=1,2,3,4$ 为任意矩阵. 证毕.

3　结　论

本文首先讨论了反自反矩阵的逆特征值问题及其最佳逼近, 然后研究了子矩阵约束下反自反矩阵的逆特征值问题, 得到了上述问题有解的条件和解的一般表达式.

另外, 根据定理 2.3 求问题 I 的最佳逼近时, 由于 Frobenius 范数关于非奇异矩阵不保持不变性, 故对于问题I的最佳逼近问题没有得到很好的解决.

[参 考 文 献]

[1] CHEN H. Generalized reflexive matrices: special properties and applications [J]. Siam J Matrix Anal Appl, 1998, 19: 140-153.
[2] FANG M Z. The inverse eigenvalue problem of reflexive matrices with a submatrix constraint and its approximation [J]. J Appl Math Comput, 2008, 26: 353-365.
[3] PENG Z, HU X. The reflexive and anti-reflexive solutions of the matrix equation $AX = B$ [J]. Linear Algebra Appl, 2003, 375: 147-155.
[4] SUN J. Backward perturbation analysis of certain characteristic subspaces [J]. Numer Math, 1993, 65: 357-382.
[5] XU G, WEI M, ZHENG D. On solutions of matrix equation $AXB + CYD = F$ [J]. Linear Algebra Appl, 1998, 297: 93-109.