文章编号: 1000-5641(2010)03-0092-07

多场耦合方程的多尺度渐近解

侯 磊[1,2], 张家健[1], 仇 璘[2,3]

(1. 上海大学 数学系, 上海 200444; 2. 上海高校计算科学E-研究院 上海交通大学研究所, 上海 200030; 3. 上海交通大学 数学系, 上海 200240)

摘要: 介绍由约束场和受重力影响的对流扰动耦合而成的衰减平衡向量场动力学方程的渐近求解. 为分析实验室内微观与自然界中宏观现象的正则和奇异扰动问题, 运用复合尺度方法进行傅立叶调和分析和尺度变化, 并引进新的参数, 将一个复杂的三维约束耦合动力学方程转化成复空间里一维的边界层问题. 并做了渐近摄动分析, 给出两个多场耦合中扰动问题的特征函数边界层解法的例子. 在例 2 中对流场扰动问题分析, 得出从指数振荡解过渡到代数解的转点.

关键词: 耦合动力学方程; 边界层问题; 渐近摄动分析; 转点

中图分类号: O357.4 **文献标识码:** A

Multi-scale asymptotic solutions of multi-field coupled equations

HOU Lei[1,2], ZHANG Jia-jian[1], QIU Lin[2,3]

(1. *Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai* 200444, *China*;
2. *Computational Sciences, E-Institute of Shanghai Universities at SJTU, Shanghai* 200240, *China;*
3. *Department of Mathematics, Shanghai JiaoTong University, Shanghai* 200240, *China*)

Abstract: This article described the complex fluid and the field constraints with gravitational effects. The asymptotic solution determines the dissipative equilibrium vector field of the coupled convection disturbance kinetic equations. For the analysis of the canonical and singular perturbation problems we analyze the micro-phenomena of the laboratory and macro-phenomena of nature. Our approach is to use the complex Fourier harmonic analysis, re-scale, and the introduction of new parameters to reduce the three-dimensional coupling dynamic equations into a one-dimensional complex space of boundary-layer. Two examples for the problem of the perturbation characteristic function were given with asymptotic analysis. Example 2 explains the turning point of the transition that from the index oscillation solution to the algebraic solution.

Key words: coupling dynamics equations; boundary problem; asymptotic perturbation analysis; turning point

收稿日期: 2009-09

基金项目: 国家自然科学基金(10871225); 上海市教育委员会E-研究院计划项目(N.E03004); 上海市浦江人才计划项目(PJ[2006]118); 上海市教育委员会重点课题(J50101)

第一作者: 侯磊, 男, 教授, 研究方向为非线性有限元、自适应方法及应用.
E-mail: houlei@staff.shu.edu.cn.

0 引　言

早在18世纪初叶, 法拉第及其同行就认识到, 在磁场中运动的固体或流体将经受着一个电动势的作用. 如果运动着的固体或流体是导体的话, 那么将在导体内形成一个电回路, 在这个回路内将有电流流动; 或者导体与外界物质形成一个电回路, 而在导体内也存在电流流动. 这样, 电流和磁场间就存在互相作用, 即磁场使运动的导体产生感应电流; 反之感应电流也产生感应磁场而影响原来的外加磁场.

因此, 无论原始导电介质初始状态如何, 只要有外加磁场以及运动的导体, 就在导体内存在以下两个基本效应: 一是与感应电流相共生的感应磁场必将对原始外加磁场产生一个扰动; 二是电流与受扰动的磁场之间相互作用产生电磁力, 这一作用力必将对原始的运动产生扰动. 当运动的导体是固体时, 以上两种效应的解是较容易得到的, 这是电磁学研究的内容. 当运动的导体是耦合流场时, 问题就更为复杂些. 特别地, 研究流场在约束场中运动规律的学科被称之为耦合动力学. 因此, 从本质上说耦合动力学就是研究耦合速度场和约束场之间相互作用的一门学科.

衰减平衡向量场耦合动力学考察在约束场作用下的运动规律, 也即考察约束场如何影响着耦合运动, 反之耦合运动又是如何地影响着约束场. 因此, 必须考察耦合运动的速度场和介质内部的约束场. 而实验室内的微观与自然界中宏观现象又向我们提出运用复合尺度方法进行分析求解的要求. 本文将一个复杂的三维约束耦合动力学方程转化成复空间里一维的边界层问题, 并进行了渐近摄动分析.

1 问题的表述

首先考虑的是简单的模型板组成的一个无限平面流动薄层指定的剪切平衡向量场

$$\underline{B_0} = \underline{e_x} B_{0x}(y) + \underline{e_z} B_{0z}(y), \quad \underline{V_0} = \underline{e_x} V_{0x}(y) + \underline{e_z} V_{0z}(y).$$

受到的重力加速度$\underline{e_y} g$指向y 轴正方向. 假设平衡速度场$\underline{V_0}$平行于约束场$\underline{B_0}$, 平衡密度ρ 假定只在y 轴上改变. 我们认为阻抗性的约束场方程对于不可压缩的平衡速度场, 有统一的阻抗率和只包括垂直分量的碰撞的一部分粘性张量. 由约束场和受重力影响的对流扰动耦合而成的衰减平衡向量场动力学方程由以下四个方程[1,2,3]组成.

$$\nabla \times \rho\Big(\frac{\partial \underline{V}}{\partial t} + \underline{V} \cdot \nabla \underline{V}\Big) = \nabla \times \Big[\frac{1}{c}\big(\underline{j} \times \underline{B}\big) + \rho \underline{g} + \mu_{\perp} \nabla^2 \underline{V}\Big], \tag{1}$$

$$\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = \nabla \times \big(\underline{V} \times \underline{B}\big) + \frac{\eta}{4\pi} \nabla^2 \underline{B}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\big(\rho \underline{V}\big) = 0, \tag{3}$$

$$\nabla \cdot \underline{B} = \nabla \cdot \underline{V} = 0. \tag{4}$$

其中, (1) 式为动量守恒方程, (2) 式为扩散方程, (3) 式为连续性方程, (4) 式则反映约束场为无源场和约束场的不可压缩性(实际模型允许轻微的压缩变形). 流动的速度场,平衡约束向量场和密度考虑平衡量和摄动量, $\underline{V} = \underline{V_0} + \underline{V_1}$, $\underline{B} = \underline{B_0} + \underline{B_1}$, $\rho = \rho_0 + \rho_1$, 其中$\underline{V_1}$, $\underline{B_1}$, ρ_1为

摄动量. 由广义 Maxwell 方程, 我们有$j=\frac{c}{4\pi}\times B$, 于是

$$\begin{aligned}\frac{1}{c}\bigtriangledown\times\big(j\times\underline{B}\big)&=\frac{1}{c}\bigtriangledown\times\Big(\frac{c}{4\pi}\times\underline{B}\Big)\times\underline{B}=\frac{1}{4\pi}\bigtriangledown\times\Big[\big(\underline{B}\cdot\bigtriangledown\big)\underline{B}-\frac{1}{2}\bigtriangledown\underline{B}^2\Big]\\&=\frac{1}{4\pi}\bigtriangledown\times(\underline{B}\cdot\bigtriangledown)\underline{B}.\end{aligned}$$

动量方程可以写为

$$\bigtriangledown\times\rho\Big(\frac{\partial\underline{V}}{\partial t}+\underline{V}\cdot\bigtriangledown\underline{V}\Big)=\bigtriangledown\times\Big[\frac{1}{4\pi}(\underline{B}\cdot\bigtriangledown)\underline{B}+\rho\underline{g}+\mu_\perp\bigtriangledown^2\underline{V}\Big].\tag{5}$$

线性化[1], 对卷积动量方程(5)应用算子$\underline{e_y}\cdot\bigtriangledown\times$ 后得到两个耦合方程, 描述了y分量的一阶速度V_{y1}和平衡约束场B_{y1}. 取所有一阶摄动量转化为像单纯傅里叶调和函数$\exp[i(k_xx+k_zz)+\omega t]$, 其中$\underline{k}=(k_x,0,k_z)$是水平波动向量, 而$\omega$是增长率, 则从式(5)得到

$$\begin{aligned}&\underline{e_y}\cdot\nabla\times\nabla\times\rho_0\Big(\frac{\partial}{\partial t}\underline{V_1}+\underline{V_0}\cdot\nabla\underline{V_1}+\underline{V_1}\cdot\nabla\underline{V_0}\Big)\\&=\underline{e_y}\cdot\Big\{\frac{1}{4\pi}\nabla\times\nabla\times\big[\big(\underline{B_0}\cdot\nabla\big)\underline{B_1}+\big(\underline{B_1}\cdot\nabla\big)\underline{B_0}\big]+\nabla\times\nabla\times\big(\rho\underline{g}+\mu_\perp\nabla^2\underline{V_1}\big)\Big\}.\end{aligned}\tag{6}$$

现在分别对式(6)做如下调和分析. 方程左边各项简化为

$$\begin{aligned}\underline{e_y}\cdot\nabla\times\nabla\times\rho_0\frac{\partial}{\partial t}\underline{V_1}&=w[k^2\rho_0V_{y1}-(\rho_0V_{y1}')'],\\\underline{e_y}\cdot\nabla\times\nabla\times\rho_0(\underline{V_0}\cdot\nabla)\underline{V_1}&=i[k^2\rho_0(\underline{k}\cdot\underline{V_0})V_{y1}-(\rho_0(\underline{k}\cdot\underline{V_0}))'V_{y1}'-\rho_0(\underline{k}\cdot\underline{V_0})V_{y1}''],\\\underline{e_y}\cdot\nabla\times\nabla\times\rho_0(\underline{V_1}\cdot\nabla)\underline{V_0}&=i[(\underline{k}\cdot\underline{V_0})''\rho_0V_{y1}+(\underline{k}\cdot\underline{V_0})'(\rho_0V_{y1})'].\end{aligned}$$

这是在y上的微分, 而方程右边各项简化为

$$\begin{aligned}\underline{e_y}\cdot\nabla\times\nabla\times(\underline{B_0}\cdot\nabla)\underline{B_1}&=i[k^2(\underline{k}\cdot\underline{B_0})B_{y1}-(\underline{k}\cdot\underline{B_0})'B_{y1}'-(\underline{k}\cdot\underline{B_0})B_{y1}''],\\\underline{e_y}\cdot\nabla\times\nabla\times(\underline{B_1}\cdot\nabla)\underline{B_0}&=i[(\underline{k}\cdot\underline{B_0})''B_{y1}+(\underline{k}\cdot\underline{B_0})'B_{y1}'],\\\underline{e_y}\nabla\times\nabla\times\rho_1\underline{g}&=k^2\rho_1g,\\\underline{e_y}\cdot\nabla\times\nabla\times\mu_\perp\nabla^2(\underline{V_1})&=-\mu_\perp(\nabla^2)^2\underline{V_{y1}}=\mu_\perp\Big(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-k^2\Big)\underline{V_{y1}}.\end{aligned}$$

对于密度摄动量ρ_1, 我们可以应用(3)式线性化$\rho_1[\omega+i(k\cdot V_0)]+\rho_0'V_{y1}=0$得到

$$k^2\rho_1g=-k^2g\frac{\rho_0'V_{y1}}{\omega+i(k\cdot V_0)}.$$

根据磁流动力学专家 Furth, Killeen 和 Rosenbluth(1963)的方法[4,5], 我们现在实行标准量纲变量如下:

$$\begin{aligned}&\psi=\frac{B_{y1}}{B},\quad W=-ik\tau_RV_{y1},\quad F=\frac{(\underline{k}\cdot\underline{B_0})}{kB},\quad\alpha=ka,\\&P=\omega\tau_R,\quad S=\frac{\tau_R}{\tau_H},\quad\rho=\frac{\rho_0}{\langle\rho\rangle},\quad k^2=k_x^2+k_z^2,\quad y=a\mu,\\&R^*=\tau_Rk\underline{V_a}(y),\quad G=-g\frac{\rho_0'}{\rho_0}\tau_H^2,\quad N^*=4\pi\frac{\mu_\perp}{\eta}.\end{aligned}$$

这里, $\tau_R=4\pi a^2/\eta$, $\tau_H=a\sqrt{4\pi\rho}/B$是边界层的阻抗和约束流体动力学的时间尺度, S是拟雷诺数, $\langle\rho\rangle$和B是密度量和约束场强度, a是流层的特征量纲. 在阻抗的扩散时间尺度上, F表示约束场的单位尺度, R^*表示流场的单位尺度.

时间尺度τ_R 和τ_H 根据不同问题会有相应的变化. 例如, 在星体的内部为$\tau_R\sim 10^9$ 年, 在太阳黑子中为$\tau_R\sim 50$ 年; 而在试验室高热原子核反应的融合等离子体中为$\tau_R\sim$ 10 Ms. 以及典型的中性氢云具有10^4个太阳的质量, 密度达到10 m_H和10^{-6} T的磁场, 时间尺度为$\tau_H\sim 10^7$年; 然而在试验室高热原子核反应的融合等离子体中$\tau_H\sim 10^{-6}$ s. 抗扩散与磁流体动力学的时间尺度的比是非常大的. 拟雷诺数S 的值对于试验室高热原子核反应的融合等离子体基本在$10^3\sim 10^7$ 之间. 在天体物理学的应用中特征量纲a是非常大的, S同样地被发现是一个大的数字. 高的拟雷诺数的意义就是对阻抗扩散影响微小, 在边界层外稳态约束场被认为是一个很好的逼近. 由这些变量项,从(6)式左边有

$$\begin{aligned}
&\underline{e_y}\cdot\nabla\times\nabla\times\rho_0\Big(\frac{\partial}{\partial t}\underline{V_1}+\underline{V_0}\cdot\nabla\underline{V_1}+\underline{V_1}\cdot\nabla\underline{V_0}\Big)\\
&=\omega[k^2\rho_0V_{y1}-(\rho_0V_{y1}')']+i[k^2\rho_0(\underline{k}\cdot\underline{V_0})V_{y1}-\rho_0(\underline{k}\cdot\underline{V_0})V_{y1}''+(\underline{k}\cdot\underline{V_0})''\rho_0V_{y1}]\\
&=[\omega+i(\underline{k}\cdot\underline{V_0})][k^2\rho_0V_{y1}-(\rho_0V_{y1}')']+i[\rho_0(\underline{k}\cdot\underline{V_0})']'V_{y1}\\
&=\frac{1}{ik\tau_R^2}[\omega\tau_R+i\tau_R(\underline{k}\cdot\underline{V_0})]\Big[\frac{\alpha^2}{a^2}\rho_0V_{y1}-\frac{a^2}{a^2}(\rho_0V_{y1}')'\Big]ik\tau_R+\frac{ik\tau_RV_{y1}}{k\tau_R^2}[\rho_0(\underline{k}\cdot\underline{V_0})']'\tau_R\\
&=\frac{1}{ika^2\tau_R^2}[P+iR^*][-\alpha^2\rho_0W+(\rho_0W')']+i\frac{W}{ik\tau_R^2a^2}[\rho_0(R^*)']'\\
&=\frac{1}{ika^2\tau_R^2}\big\{[P+iR^*][(\rho_0W')'-\alpha^2\rho_0W]+i[\rho_0(R^*)']'W\big\}.
\end{aligned}$$

上面是对μ的微分. 同样从(6)式右边有

$$\begin{aligned}
&\underline{e_y}\cdot\Big\{\frac{1}{4\pi}\nabla\times\nabla\times[(\underline{B_0}\cdot\nabla)\underline{B_1}+(\underline{B_1}\cdot\nabla)\underline{B_0}]+\nabla\times\nabla\times(\rho\underline{g}+\mu_\perp\nabla^2\underline{V_1})\Big\}\\
&=\frac{i}{4\pi}[k^2(\underline{k}\cdot\underline{B_0})B_{y1}''-(\underline{k}\cdot\underline{B_0}'')B_{y1}+(\underline{k}\cdot\underline{B_0})''B_{y1}]+k^2\rho_1g+-\mu_\perp\Big(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-k^2\Big)\underline{V_{y1}}\\
&=\frac{i(\underline{k}\cdot\underline{B_0})}{4\pi}\Big[k^2B_{y1}-B_{y1}''+\frac{(\underline{k}\cdot\underline{B_0})''}{(\underline{k}\cdot\underline{B_0})}B_{y1}\Big]+k^2\rho_1g+-\frac{\mu_\perp}{a^4}\Big(\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}-\alpha^2\Big)^W/-ik\tau_R\\
&=i\frac{1}{ka^2\tau_R^2}\Big\{\Big[\psi''-\psi\Big(\alpha+\frac{F''}{F}\Big)\Big]\alpha^2S^2F+\frac{\alpha^2S^2GW}{P+iR^*}+N^*\Big(\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}-\alpha^2\Big)^2W\Big\}.
\end{aligned}$$

由(6)式左右两边相等得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{ika^2\tau_R^2}\big\{[P+iR^*][(\rho_0W')'-\alpha^2\rho_0W]+i[\rho_0(R^*)']'W\big\}\\
&\quad=\frac{1}{ika^2\tau_R^2}\Big\{\Big[\psi''-\psi\Big(\alpha+\frac{F''}{F}\Big)\Big]\alpha^2S^2F+\frac{\alpha^2S^2GW}{P+iR^*}+N^*\Big(\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}-\alpha^2\Big)^2W\Big\}.
\end{aligned}$$

所以动量方程最后变为

$$\begin{aligned}
&[P+iR^*][(\rho_0W')'-\alpha^2\rho_0W]+i[\rho_0(R^*)']'W\\
&\quad=\Big[\psi''-\psi\Big(\alpha+\frac{F''}{F}\Big)\Big]\alpha^2S^2F+\frac{\alpha^2S^2GW}{P+iR^*}+N^*\Big(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\mu^2}-\alpha^2\Big)^2W.
\end{aligned}\tag{7}$$

同样, 对扩散方程式(2)线性化并取y分量得到

$$wB_{y1} = i(\underline{k} \cdot \underline{B_0})V_{y1} - i(\underline{k} \cdot \underline{V_0})B_{y1} + \frac{\eta}{4\pi}\nabla^2 B_{y1}. \tag{8}$$

通过量纲化式(2)可以化为

$$(P + iR^*)\psi + FW = \psi'' - \alpha^2\psi. \tag{9}$$

2 多场耦合中扰动问题的边界层解法的例子

多场耦合中扰动问题的边界层解可以分为边界层内解和外解问题2个部分[6].

按照前面的分析, 当S很大时, 对阻抗扩散影响微小, 边界层外稳态约束场被认为是一个很好的逼近. 对方程(7)两边除以S^2, 当G充分小时, 由$\frac{1}{S^2} \to 0$可以得到外解问题的微分方程$\psi'' - \psi(\alpha + \frac{F''}{F}) = 0$. 对此方程我们可以利用常规分析方法得到渐近解. 令$F = \mathrm{th}\,\mu$则

$$F' = (\mathrm{th}\,\mu)' = \Big(\frac{\mathrm{e}^{\mu} - \mathrm{e}^{-\mu}}{\mathrm{e}^{\mu} + \mathrm{e}^{-\mu}}\Big)' = \frac{(\mathrm{e}^{\mu} + \mathrm{e}^{-\mu})^2 - (\mathrm{e}^{\mu} - \mathrm{e}^{-\mu})^2}{(\mathrm{e}^{\mu} + \mathrm{e}^{-\mu})^2} = 1 - \mathrm{th}^2\,\mu = \mathrm{sech}^2\,\mu,$$
$$F'' = (\mathrm{sech}^2\,\mu)' = 2(\mathrm{sech}\,\mu)'\mathrm{sech}\,\mu = -2\frac{\mathrm{sh}\,\mu}{\mathrm{ch}^2\,\mu}\frac{1}{\mathrm{ch}\,\mu} = -2\mathrm{th}\,\mu\,\mathrm{sech}^2\,\mu.$$

原方程变为$\psi'' - \psi(\alpha - 2\mathrm{sech}^2\,\mu) = 0$. 令$\psi = \mathrm{e}^{-\alpha\mu}f(\mu)$, 则有

$$\psi' = -\alpha\mathrm{e}^{-\alpha\mu}f(\mu) + \mathrm{e}^{-\alpha\mu}f'(\mu),$$
$$\psi'' = \alpha^2\mathrm{e}^{-\alpha\mu}f(\mu) - 2\alpha\mathrm{e}^{-\alpha\mu}f'(\mu) + \mathrm{e}^{-\alpha\mu}f''(\mu).$$

则原方程变为$\mathrm{e}^{-\alpha\mu}[f''(\mu) - 2\alpha f'(\mu) + 2\mathrm{sech}^2\,\mu\, f(\mu)] = 0$. 令$f = F + g(\mu)$,

$$\Rightarrow f' = \mathrm{sech}^2\,\mu + g', \quad f'' = -2\mathrm{th}\,\mu\,\mathrm{sech}^2\,\mu + g'',$$
$$\Rightarrow g'' - 2\alpha(\mathrm{sech}^2\,\mu + g') + 2(\mathrm{sech}^2\,\mu)g = 0.$$

明显地, $g = \alpha$是方程的一个解. 将其代入有

$$\psi = \begin{Bmatrix} \mathrm{e}^{-\alpha\mu}(F + \alpha), & \mu > 0 \\ \mathrm{e}^{\alpha\mu}(-F + \alpha), & \mu < 0 \end{Bmatrix} = \mathrm{e}^{-\alpha|\mu|}(|F| + \alpha),$$
$$\psi' = \begin{cases} -\alpha\mathrm{e}^{-\alpha\mu}(F + \alpha) + \mathrm{e}^{-\alpha\mu}(1 - F^2), & \mu > 0, \\ \alpha\mathrm{e}^{\alpha\mu}(-F + \alpha) + \mathrm{e}^{-\alpha\mu}(-1 + F^2), & \mu < 0. \end{cases}$$

所以有外解与内解在零点左右匹配的跳跃条件.

$$\psi'(0+) = -\alpha^2 + 1, \quad \psi'(0-) = \alpha^2 - 1,$$
$$\Delta'_{ext} = \frac{\psi'(0+) - \psi'(0-)}{\psi(0)} = \frac{-2\alpha^2 + 2}{\alpha} = 2\Big(\frac{1}{\alpha} - \alpha\Big).$$

为计算边界层的内解, 文献[1-3]对MHD方程进行线性变化, 通过傅立叶调和分析和尺度变化, 并引进新的参数, 将一个复杂的三维耦合动力学方程转化成复空间里一维的边界层问

题的二阶微分方程[7,8].

$$(P+iR\theta)\frac{\mathrm{d}^2H}{\mathrm{d}\theta^2}-\theta^2H+\frac{G}{(F')^2}\frac{H-iR}{P+iR\theta}-N\frac{\mathrm{d}^4H}{\mathrm{d}\theta^4}=P\theta-\frac{F''}{\Delta F'},\tag{10}$$

$$\Delta'=\Delta\int_{-\infty}^{\infty}(P+\theta H)\mathrm{d}\theta.\tag{11}$$

其中, 特征值P为复数, 特征函数H为复函数, R为切变流特征参数, G为重力参数, N为粘度参数. 式(10)中$(P+iR\theta)\frac{\mathrm{d}^2H}{\mathrm{d}\theta^2}$ 为惯性项, $\theta^2H+P\theta-\frac{F''}{\Delta F'}$ 为外弯曲项, $\frac{G}{(F')^2}\frac{H-iR}{P+iR\theta}$ 为引力项, $N\frac{\mathrm{d}^4H}{\mathrm{d}\theta^4}$ 为粘性项.

边界层的内解的特征函数渐近扰动方法如下. 对边界层方程(10)进行$H(\theta)$的傅立叶变换, 定义$h(k)=\int_{-\infty}^{\infty}H(\theta)\mathrm{e}^{-ik\theta}\mathrm{d}\theta$, 将原物理场方程转变为傅立叶空间内微分算子特征函数渐近求解问题. 令$\varepsilon=\frac{1}{R}$, 可以得到粘性撕裂模式的微分算子[8,9]

$$Lh=h''+\frac{1}{\varepsilon}(k^2h)'-(k^2P+k^4N)h$$

和三阶微分算子(也可以叫为粘性撕裂G模式算子)

$$\begin{aligned}Mh&=\Big(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}-P\Big)Lh-\frac{G}{(F')^2}h\\&=-2\pi\Big[\frac{G}{\varepsilon(F')^2}i-\frac{PF''}{\Delta F'}\Big]\delta(k)-2\pi\Big[iP^2+\frac{PF''}{\Delta F'}\Big]\delta'(k)+2\pi iP\frac{1}{\varepsilon}\delta''(k).\end{aligned}$$

下面讨论特征函数渐近扰动问题.

$$\begin{aligned}&\varepsilon h''+(k^2h)'-\varepsilon Pk^2h=0,\quad \varepsilon\to 0,\\&-k_0<k\leqslant 0,\quad h''-Pk^2h=0\qquad\Rightarrow h_1\sim k^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\pm\frac{1}{2}P^{\frac{1}{2}}k^2},\\&-k<k_0<0,\quad h''+R(k^2h)'=0\qquad\Rightarrow h_2\sim \mathrm{e}^{-\frac{1}{3\varepsilon}k^3},\quad k\to-\infty.\end{aligned}$$

对于$-k_0<k\leqslant 0$, 我们可以忽略流场项. 但对于大的k, 则是流场项起主导作用. 所以当$k\to-\infty$时, 可以忽略P惯性项.

解的转化是从指数振荡解到代数解的过渡, 因为当R流场项近似地平衡P惯性项. 即

$$\Big|\frac{1}{\varepsilon}k^2h'\Big|\approx\big|Pk^2h\big|.$$

因为在摄动区域有$h'\approx kP^{1/2}h$, 所以有$\Big|\frac{1}{\varepsilon}k_0^3P^{1/2}h\Big|\approx\big|Pk_0^2h\big|$. 可以得出从指数振荡解到代数解的过渡的转点$k_0\approx\varepsilon\big|P\big|^{\frac{1}{2}}$.

因此, 当$0\leqslant\chi\leqslant\pi$, 对于$Mh=0,-\infty<k<0,0<k<+\infty$, 可以根据$\mathrm{Re}(P),\varepsilon$和$N$的值把特征函数归为4种形态.

(1) 当$N=0,\mathrm{Re}(P)>0$时,

$$h(k)\sim\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{3\varepsilon}k^3}, & k\to+\infty,\\ k^{-2}\mathrm{e}^{\varepsilon Pk}, & k\to-\infty.\end{cases}$$

(2) 当$N=0,\mathrm{Re}(P)<0,\varepsilon\to 0$时,

$$h(k)\sim\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{3\varepsilon}k^3}, & k\to+\infty,\\ k^{-2}, & k\to-\infty.\end{cases}$$

(3) 当$N=0,\mathrm{Re}(P)<0$时,

$$h(k)\sim\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{3\varepsilon}k^3}, & k\to+\infty,\\ k^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\pm\frac{1}{2}P^{\frac{1}{2}}k^2}, & -k_0<k\leqslant 0,\\ k^{-2}, & k.\end{cases}$$

(4) 当$N\neq 0$时,

$$h(k)\sim\begin{cases}\exp\Big\{-\Big[\dfrac{1}{\varepsilon}+\sqrt{\varepsilon^2+4N}\Big]k^3/6\Big\}, & k\to+\infty,\\ \exp\Big\{-\Big[\dfrac{1}{\varepsilon}-\sqrt{\varepsilon^2+4N}\Big]k^3/6\Big\}, & k\to-\infty.\end{cases}$$

在式(4)中, 由于我们引入了粘度N的影响, $h(k)$的结构产生加速衰减的变化.

有关边界层内解与外解的匹配边界条件(11), 我们将在论述耦合动力学方程非线性特征值问题的论文中介绍.

[参 考 文 献]

[1] HOU L. Ph D thesis[D]: Scotland: University of Abertay Dundee, 1994.

[2] HOU L, PARIS R B, WOOD A D. Resistive interchange mode in the presence of equilibrium Flow [J]. Physics of Plasmas, 1996, 3(2): 473-481.

[3] 侯磊, 韩月红, 李金龙. 磁流耦合问题中边界层解法的探索[J]. 华东师范大学学报(自然科学版), 2008(5): 10-16.
HOU L, HAN YH, LI JL.The exploration of boundary layer solution in magnetic-current coupling problem [J]. Journal of East China Normal University(Natural Science), 2008(5): 10-16.

[4] FURTH H P, KILLEN J, ROSENBLUTH M N. Finite-resistive instabilities of a sheet pinch [J]. Physics of Fluids, 1963(6): 459-483.

[5] PARIS R B, SY W N-C. Influence of equilibrium shear flow along the magnetic flows on the resistive tearing instability [J]. Physics of Fluids, 1983, 26: 2966-2975.

[6] 苏煜城, 吴启光. 奇异摄动问题数值方法引论[M]. 重庆: 重庆出版社, 1991.
SU Y C, WU Q G. An lntrduction to the Numericwl Methods for Singular Perturbation Problem [M]. Chongqing: University Press, 1991.

[7] PERSSON M, BONDESON A. Oscillating magnetic islands in a rotating plasma [J]. Physics of Fluids B, 1990(2): 2315-2321.

[8] BONDESON A, PERSSON M. Resistive tearing modes in the presence of equilibrium flows [J]. Physics of Fluids, 1986, 29: 2997-3007.

[9] PARIS R B, WOOD A D. Exponentially-improved asymptotics for the gamma function[J]. Comp Appl Math, 1992, 41: 135-143.

(上接第 84 页)

[References]

[1] BAU S, BEINEKE L W. The decycling number of graphs[J]. Austral J Combin, 2002, 25: 285-298.

[2] DIESTEL R. Graph Theoy[M]. NewYork: Springer, 1997.