文章编号: 1000-5641(2011)03-0012-09

幂式期权在跳扩散模型下的定价

苏小囡, 王文胜

(华东师范大学 金融与统计学院, 上海 200241)

摘要: 假设标的资产价格服从跳扩散过程, 市场利率满足Vasicek模型, 当随机利率与资产价格相关时, 通过测度变换的方法, 选取不同的概率测度, 给出幂式期权的价格公式并得到几种特殊情况时的结论.

关键词: 跳扩散模型; 幂式期权; 随机利率; 测度变换

中图分类号: F224.7; F224.9 **文献标识码:** A **DOI:** 10.3969/j.issn.1000-5641.2011.03.002

Pricing power options in a jump diffusion model

SU Xiao-nan, WANG Wen-sheng

(*College of Finance and Statistics, East China Normal University, Shanghai* 200241, *China*)

Abstract: Under the assumption that the underlying asset prices obey jump diffusion processes and the market interest satisfies Vasicek model, and when the interest is correlated with the asset prices, by the way of change of measure, a closed solution of pricing of power option was given. Moreover, some special situations were considered.

Key words: jump diffusion model; power options; stochastic interest rate; change of measure

0 引 言

期权定价是金融数学的核心内容之一. 1973年, F. Black和 M. Scholes在假设市场无摩擦, 不存在套利机会, 股票价格服从几何布朗运动且预期收益率、市场利率和波动率为常数的情况下, 利用套期保值的方法建立偏微分方程, 并通过解偏微分方程推出了著名的Black-Scholes期权定价公式. 尽管Black-Scholes模型已经得到了长足的发展和广泛的应用, 但它本身的不足之处却是无法回避的. 实际中股票价格不一定是连续的, 其价格会出现异常变化, 这种变化可以由经济中某些突发事件引起, 比如: 突发战争, 一国政变, 重大政治事情和人为投机等. 大量的实证表明, 股票价格可能会出现间断的"跳", 有关标的资产价格满足跳扩散过程的期权定价可以参考文献[1-5]. 实际中, 投资可能是长期的, 因此考虑利率的风险非常必要. 利率的影响可以参见Biger and Hull[6], Cox[7], Amin和Jarrow[8]. 随着金融市

收稿日期: 2010-01

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11071076); 宁波大学学校人才工程项目.

第一作者: 苏小囡, 女, 博士, 研究方向为金融数学. E-mail: suxiaonanecnu@hotmail.com.

通讯作者: 王文胜, 男, 教授, 研究方向为金融数学, 随机过程.

场的发展, 一些新型的认购权证（或期权）不断涌现出来, 期权的创新种类不胜枚举, 它们大都属于奇异期权(Exotic Options), 例如百慕大期权(Bermudan Options)、亚式期权(Asian Options)、回望期权(Lookback Options)和障碍期权(Barrier Options), 等等[9]. 然而, 到目前为止, 有关幂式期权的研究还非常少, Blenman 和 Clark[10] 考虑了 Black-Scholes 模型下幂式交换期权的价值. 本文考虑标的资产价格满足跳扩散过程并且市场利率满足 Vasicek 模型时的幂式期权的定价问题, 并给出了精确的价格公式.

1 幂式期权

考虑一个无摩擦的金融市场, 市场中的所有不确定性由概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 来描述, $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant0}$ 是包含了 t 时刻之前的市场中所有信息的 σ-域流. 令 $\{S_t\}_{t\geqslant0}$ 表示标的风险资产价格过程, $\{r_t\}_{t\geqslant0}$ 表示市场中无风险利率过程, $\{B_t\}_{t\geqslant0}$ 表示银行存款账户, 它们分别满足如下随机微分方程

$$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_{t_-}}=\mu_t\mathrm{d}t+\sigma_t\mathrm{d}\widetilde{W}_{1t}-\lambda\beta\mathrm{d}t+\mathrm{d}\sum_{i=1}^{N(t)}U_i,$$

$$\mathrm{d}r_t=(\widetilde{a}-\widetilde{b}r_t)\mathrm{d}t+\sigma_r\mathrm{d}\widetilde{W}_{2t},\mathrm{d}B_t=r_tB_t\mathrm{d}t,B_0=1,$$

其中 $\beta=\mathbb{E}[U_i]$, $\widetilde{a}$, $\widetilde{b}$, σ_r 为正常数, σ_t 是关于时间 t 的确定性函数, $\widetilde{W}_{1t}$, $\widetilde{W}_{2t}$ 是定义在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的两个标准布朗运动, 且 $\mathrm{Cov}(\mathrm{d}\widetilde{W}_{1t},\mathrm{d}\widetilde{W}_{2t})=\rho\mathrm{d}t$, U_i 是一列独立同分布的随机变量, $U_i\geqslant-1$ 保证了 S_t 为非负的, $f(y)$ 为 $\ln(1+U_i)$ 的概率密度函数, $N(t)$ 是强度为 λ 的泊松过程, $N(t)$, U_i 与布朗运动 $\widetilde{W}_{1t}$, $\widetilde{W}_{2t}$ 相互独立.

幂式看涨期权的到期收益为 $C_T=(S_T^{\alpha}-K^{\alpha})^+$, 其中 S_T 是到期日的标的资产价格, K 是履约价格, $0<\alpha\leqslant1$ 是参数.

2 幂式期权定价

当市场中标的资产价格满足跳扩散过程时, 市场是非完备的, 等价鞅测度不唯一. 由风险中性定价可知, 期权的价值是贴现的偿付函数在风险中性测度下的条件期望的值. 因此, 选取一个合理的鞅测度是非完备市场中资产定价的关键. 本文将采用 Merton (1976)[1] 的假设, 即把布朗运动部分归于系统风险,可以套期保值; 跳部分归于非系统风险, 是某个风险资产特有的, 且不被定价, 不可分散. 我们利用 Jaimungal, S. 和 Wang, T. (2006)[11]中的命题2.1来给出一个等价鞅测度, 结果如下.

引理 2.1 令 η_t 表示 Radon-Nikodym 导数过程

$$\begin{aligned}\eta_t=&\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\Big|_{\mathcal{F}_t}=\exp\Big\{\int_0^t\frac{\vartheta_1(u,r_u)}{\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{d}\widetilde{W}_{1u}+\int_0^t\left(\vartheta_2(u,r_u)-\frac{\rho\vartheta_1(u,r_u)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)\mathrm{d}\widetilde{W}_{2u}+\\&-\frac{1}{2}\int_0^t\vartheta_1^2(u,r_u)\mathrm{d}u-\frac{1}{2}\int_0^t\vartheta_2^2(u,r_u)\mathrm{d}u\Big\},\end{aligned}\tag{1}$$

其中

$$\vartheta_1(u,r_u)=\frac{r_u-\mu_u}{\sigma_u\sqrt{1-\rho^2}}-\frac{\rho\vartheta_2(u,r_u)}{\sqrt{1-\rho^2}},\quad\vartheta_2(u,r_u)=\frac{a-\widetilde{a}+(\widetilde{b}-b)r_u}{\sigma_r},$$

则由方程(1)所定义的测度Q是一个等价鞅测度, 即贴现的资产价格过程在概率测度Q下 是鞅. 于是, 由Girsanov定理可知

$$\begin{aligned} W_{1t} &= \widetilde{W}_{1t} - \int_0^t \frac{r_u - \mu_u}{\sigma_u}\mathrm{d}u, \\ W_{2t} &= \widetilde{W}_{2t} - \int_0^t \frac{a - \widetilde{a} + (\widetilde{b} - b)r_u}{\sigma_r}\mathrm{d}u \end{aligned}$$

是两个标准的Q布朗运动, 且$\mathrm{Cov}(\mathrm{d}W_{1t}, \mathrm{d}W_{2t}) = \rho\mathrm{d}t$, 则可得$W_{1t} = \rho W_{2t} + \sqrt{1-\rho^2}W_{3t}$ 其中W_{3t}是与W_{2t}相互独立的标准布朗运动.

由于复合泊松过程$\sum\limits_{i=1}^{N(t)} \ln(1+U_i)$是与布朗运动$\widetilde{W}_{1t}, \widetilde{W}_{2t}$相互独立的, 故从测度$P$到风险中性测度$Q$的测度变换不会改变复合泊松过程的强度和$\ln(1+U_i)$的概率分布. 从而, 风险资产的价格过程$S_t$和利率$r_t$在风险中性测度$Q$下有如下表示.

$$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_{t_-}} = r_t\mathrm{d}t + \sigma_t\mathrm{d}W_{1t} - \lambda\beta\mathrm{d}t + \mathrm{d}\sum_{i=1}^{N(t)} U_i, \tag{2}$$

$$\mathrm{d}r_t = (a - br_t)\mathrm{d}t + \sigma_r\mathrm{d}W_{2t}. \tag{3}$$

令$C(t,T)$表示t时刻幂式看涨期权的价格, 由风险中性定价可得

$$C(t,T) = \mathbb{E}^Q\left[\frac{B_t}{B_T}(S_T^\alpha - K^\alpha)^+ \big| \mathcal{F}_t\right].$$

方便起见,记

$$I_1 = \mathbb{E}^Q\left[\frac{S_T^\alpha B_t}{B_T} I_{\{S_T^\alpha \geqslant K^\alpha\}} \big| \mathcal{F}_t\right], \quad I_2 = K^\alpha \mathbb{E}^Q\left[\frac{B_t}{B_T} I_{\{S_T^\alpha \geqslant K^\alpha\}} \big| \mathcal{F}_t\right].$$

因此可得

$$C(t,T) = I_1 - I_2. \tag{4}$$

为了计算$C(t,T)$, 需要下面两个引理.

引理 2.2

$$\begin{aligned} I_2 \;=\; & K^\alpha \mathrm{e}^{-r_t D(t,T) - A(t,T)}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(T-t)}\lambda^n (T-t)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{N}\left(d_2(t,T,y)\right) f^n(y)\mathrm{d}y \right. \\ & \left. + \mathrm{e}^{-\lambda(T-t)}\mathbb{N}\left(d_2(t,T,0)\right)\right], \end{aligned}$$

其中

$$\mathrm{d}_2(t,T,y) = \frac{\ln\frac{S_t}{K} + \Lambda(t,T) - \lambda\beta(T-t) - \int_t^T \left(\sigma^{*2}(s,T) + \rho\sigma_s\sigma^*(s,T) + \frac{\sigma_s^2}{2}\right)\mathrm{d}s + y}{\sqrt{\int_t^T \Delta^2(s)\mathrm{d}s}},$$

$$\sigma^*(t,T) = \frac{\sigma_r(1 - \mathrm{e}^{-b(T-t)})}{b}, \quad \Delta^2(s) = \sigma^{*2}(s,T) + 2\rho\sigma_s\sigma^*(s,T) + \sigma_s^2,$$

$$\Lambda(t,T)=\left(r_t-\frac{a}{b}\right)\frac{\sigma^*(t,T)}{\sigma_r}+\frac{a(T-t)}{b},$$

$$D(t,T)=\frac{1-\mathrm{e}^{-b(T-t)}}{b},\quad A^{'}(t,T)=-aD(t,T)+\frac{1}{2}\sigma_r^2D^2(t,T),$$

$f^n(y)$ 为 $\ln(1+U_i)$ 的密度函数 $f(y)$ 的 n 重卷积, $\mathbb{N}(\cdot)$ 表示标准正态随机变量的累积分布函数.

证　明　由于利率是随机的, 我们引入远期鞅测度 Q^{T}, 即以零息债券 $P(t,T)$ 作为计价单位, Q^{T} 关于 Q 的 Radon-Nikodym 导数如下.

$$\frac{\mathrm{d}Q^{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}Q}=\frac{P(T,T)}{P(0,T)B_T}=\frac{1}{P(0,T)B_T}.\tag{5}$$

因为市场利率满足Vasicek模型, 所以 T 时刻到期, 面值为1的零息债券在 t 时刻的价格 $P(t,T)$ 有如下仿射形式[12].

$$P(t,T)=\mathrm{e}^{-r_tD(t,T)-A(t,T)},$$

并且 $P(t,T)$ 满足 $\mathrm{d}P(t,T)=r_tP(t,T)-\sigma^*(t,T)P(t,T)\mathrm{d}W_{2t}$. 从而, 由方程(5)可得

$$\frac{\mathrm{d}Q^T}{\mathrm{d}Q}=\exp\left\{-\int_0^T\sigma^*(u,T)\mathrm{d}W_{2u}-\frac{1}{2}\int_0^T\sigma^{*2}(u,T)\mathrm{d}u\right\}.$$

根据 Gisranov 定理, $\overline{W}_{2t}=W_{2t}+\int_0^t\sigma^*(u,T)\mathrm{d}u$ 是 Q^T 标准布朗运动.

于是, 由Itô公式和方程(2), 有

$$S_T=S_t\exp\left\{\int_t^Tr_s\mathrm{d}s+\int_t^T\sigma_s\mathrm{d}W_{1s}-\frac{1}{2}\int_t^T\sigma_s^2\mathrm{d}s-\lambda\beta(T-t)+\sum_{i=N(t)+1}^{N(T)}\ln(1+U_i)\right\}.\tag{6}$$

由方程(3), 求得 $r_s=\mathrm{e}^{b(t-s)}r_t+\frac{a}{b}(1-\mathrm{e}^{b(t-s)})+\sigma_r\mathrm{e}^{-bs}\int_t^s\mathrm{e}^{bu}\mathrm{d}W_{2u}$, 因此

$$\int_t^Tr_s\mathrm{d}s=\Lambda(t,T)+\int_t^T\sigma^*(s,T)\mathrm{d}W_{2s}.\tag{7}$$

再通过方程(6)和方程(7), 能够得到

$$\begin{aligned}S_T&=S_t\exp\Big\{\Lambda(t,T)+\int_t^T\sigma^*(s,T)\mathrm{d}W_{2s}+\int_t^T\sigma_s\mathrm{d}W_{1s}-\frac{1}{2}\int_t^T\sigma_s^2\mathrm{d}s\\&\quad-\lambda\beta(T-t)+\sum_{i=N(t)+1}^{N(T)}\ln(1+U_i)\Big\}\\&=S_t\exp\Big\{\Lambda(t,T)+\int_t^T\Delta(s)\mathrm{d}\overline{W}_s-\int_t^T\Big(\sigma^{*2}(s,T)+\rho\sigma_s\sigma^*(s,T)\\&\quad+\frac{\sigma_s^2}{2}\Big)\mathrm{d}s-\lambda\beta(T-t)+\sum_{i=N(t)+1}^{N(T)}\ln(1+U_i)\Big\},\end{aligned}\tag{8}$$

这里

$$\Delta(s)\mathrm{d}\overline{W}_s=[\sigma^*(s,T)+\rho\sigma_s]\mathrm{d}\overline{W}_{2s}+\sqrt{1-\rho^2}\sigma(s)\mathrm{d}W_{3s}.$$

根据Bayes法则和方程(5)可知

$$\begin{aligned} I_2 &= K^\alpha P(t,T)\mathbb{E}^{Q^T}\left[I_{\{S_T^\alpha \geqslant K^\alpha\}}\big|\mathcal{F}_t\right] \\ &= K^\alpha P(t,T)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^\mathbb{T}}\left[\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^\mathbb{T}}\left[I_{(S_T^\alpha \geqslant K^\alpha)}|\mathcal{F}_t \vee \sigma\left(\sum_{i=N(t)+1}^{N(T)}\ln(1+U_i)\right)\right]\big|\mathcal{F}_t\right]. \end{aligned}$$

此外, 由方程(8)可得事件 $\{S_T^\alpha \geqslant K^\alpha\}$ 等价于

$$\begin{aligned} \Big\{\int_t^T \Delta(s)\mathrm{d}\overline{W}_s + \sum_{i=N(t)+1}^{N(T)}\ln(1+U_i) &\geqslant \ln\frac{K}{S_t} - \Lambda(t,T) + \lambda\beta(T-t) \\ &\quad + \int_t^T\left(\sigma^{*2}(s,T) + \rho\sigma_s\sigma^*(s,T) + \frac{\sigma_s^2}{2}\right)\mathrm{d}s\Big\}. \end{aligned}$$

再通过直接计算可得

$$\begin{aligned} I_2 &= K^\alpha P(t,T)\mathbb{E}^{Q^\mathrm{T}}\left[\mathbb{N}\left(\mathrm{d}_2\left(t,T,\sum_{i=N(t)+1}^{N(T)}\ln(1+U_i)\right)\right)\big|\mathcal{F}_t\right] \\ &= K^\alpha \mathrm{e}^{-r_t D(t,T)-A(t,T)}\mathbb{E}^{Q^\mathrm{T}}\left[\mathbb{N}\left(\mathrm{d}_2\left(t,T,\sum_{i=N(t)+1}^{N(T)}\ln(1+U_i)\right)\right)\right] \\ &= K^\alpha \mathrm{e}^{-r_t D(t,T)-A(t,T)}\Bigg[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda(T-t)}\lambda^n(T-t)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbb{N}\left(\mathrm{d}_2(t,T,y)\right)f^n(y)\mathrm{d}y \\ &\quad + \mathrm{e}^{-\lambda(T-t)}\mathbb{N}\left(\mathrm{d}_2(t,T,0)\right)\Bigg], \end{aligned}$$

则完成了引理 2.1 的证明.

为了计算 I_1, 令

$$\frac{\mathrm{d}Q^\alpha}{\mathrm{d}Q} = \frac{\frac{S_T^\alpha}{B_T}}{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\frac{S_T^\alpha}{B_T}]}.$$

根据 Girsanov 定理, 在概率测度 Q^α 下, $\sum\limits_{i=1}^{N(T)}U_i$ 仍然是复合泊松过程, 其强度为 $\widetilde{\lambda} = \lambda\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\mathrm{e}^{\alpha\ln(1+U_j)}$, $\ln(1+U_j)$ 的密度函数为 $\widetilde{f}(y) = \frac{\mathrm{e}^{\alpha y}f(y)}{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathrm{e}^{\alpha\ln(1+U_j)}]}$.

接下来, 将计算 I_1, 其结果如下.

引理 2.3

$$I_1 = S_t^\alpha\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\widetilde{\lambda}(T-t)}\widetilde{\lambda}^n(T-t)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbb{N}\left(\mathrm{d}_1(t,T,y)\right)\widetilde{f}^n(y)\mathrm{d}y + \mathrm{e}^{-\widetilde{\lambda}(T-t)}\mathbb{N}\left(\mathrm{d}_1(t,T,0)\right)\right],$$

其中

$$\mathrm{d}_1(t,T,y) = \mathrm{d}_2(t,T,y) + \alpha\sqrt{\int_t^T\Delta^2(s)\mathrm{d}s}.$$

证　明　由方程(6)和 $\sum_{j=1}^{N(t)}\ln(1+U_j)$ 与 W_{1t}, W_{2t} 相互独立可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}Q^\alpha}{\mathrm{d}Q} &= \frac{\frac{S_T^\alpha}{B_T}}{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\frac{S_T^\alpha}{B_T}]}\\ &= \exp\Big\{\int_0^T\alpha\sigma_s\mathrm{d}W_{1s}+\int_0^T(\alpha-1)\sigma^*(s,T)\mathrm{d}W_{2s}-\frac{(\alpha-1)^2}{2}\int_0^T\sigma^*(s,T)\mathrm{d}s\\ &\quad -\frac{\alpha^2}{2}\int_0^T\sigma_s^2\mathrm{d}s-\rho\alpha(\alpha-1)\int_0^T\sigma_s\sigma^*(s,T)\mathrm{d}s\Big\}\frac{\exp\left\{\alpha\sum\limits_{j=1}^{N(T)}\ln(1+U_j)\right\}}{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left\{\alpha\sum\limits_{j=1}^{N(T)}\ln(1+U_j)\right\}\right]},\end{aligned}\tag{9}$$

另外, 通过Bayes法则可得

$$\begin{aligned}I_1 &= B_t\mathbb{E}^Q\big[\frac{S_T^\alpha}{B_T}I_{\{S_T^\alpha\geqslant K^\alpha\}}\big|\mathcal{F}_t\big]=S_t^\alpha\mathbb{E}^{Q^\alpha}[I_{(S_T^\alpha\geqslant K^\alpha)}|\mathcal{F}_t]\\ &= S_t^\alpha\mathbb{E}^{Q^\alpha}\left[\mathbb{E}^{Q^\alpha}\left[I_{(S_T^\alpha\geqslant K^\alpha)}\big|\mathcal{F}_t\vee\sigma\Big(\sum_{i=N(t)+1}^{N(T)}\ln(1+U_i)\Big)\right]\big|\mathcal{F}_t\right].\end{aligned}$$

又由方程(9)和Girsanov定理可知, 在 Q^α 下,

$$\begin{aligned}\widehat{W}_{1t} &= W_{1t}-\int_0^t\alpha\sigma_s\mathrm{d}s-\rho\int_0^t(\alpha-1)\sigma^*(s,T)\mathrm{d}s,\\ \widehat{W}_{2t} &= W_{2t}-\int_0^t(\alpha-1)\sigma^*(s,T)\mathrm{d}s-\rho\int_0^t\alpha\sigma_s\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

为两个标准布朗运动. 因此

$$\begin{aligned}S_T &= S_t\exp\Big\{\Lambda(t,T)+\int_t^T\Delta(s)\mathrm{d}\widehat{W}_s+\alpha\int_t^T\Delta^2(s)\mathrm{d}s\\ &\quad -\int_t^T\Big(\sigma^{*2}(s,T)+\rho\sigma_s\sigma^*(s,T)+\frac{1}{2}\sigma_s^2\Big)\mathrm{d}s-\lambda\beta(T-t)+\sum_{i=N(t)+1}^{N(T)}\ln(1+U_i)\Big\},\end{aligned}\tag{10}$$

这里 $\Delta(s)\mathrm{d}\widehat{W}_s=\sigma^*(s,T)\mathrm{d}\widehat{W}_{2s}+\sigma_s\mathrm{d}\widehat{W}_{1s}$. 通过方程(10)可知事件 $\{S_T^\alpha\geqslant K^\alpha\}$ 等价于

$$\begin{aligned}&\Big\{\int_t^T\Delta(s)\mathrm{d}\widehat{W}_s+\sum_{i=N(t)+1}^{N(T)}\ln(1+U_i)\\ &\geqslant\ln\frac{K}{S_t}-\Lambda(t,T)+\lambda\beta(T-t)-\alpha\int_t^T\Delta^2(s)\mathrm{d}s+\int_t^T\Big(\sigma^{*2}(s,T)+\rho\sigma_s\sigma^*(s,T)+\frac{1}{2}\sigma_s^2\Big)\mathrm{d}s\Big\}.\end{aligned}$$

于是, 通过 $\sum\limits_{i=N(t)+1}^{N(T)}\ln(1+U_i)$ 关于 $\sigma\left(\sum\limits_{i=N(t)+1}^{N(T)}\ln(1+U_i)\right)$ 可测及布朗运动的独立增量性可

以得到

$$\begin{aligned} I_1 &= S_t^\alpha \mathbb{E}^{Q^\alpha}\Big[\mathbb{N}\Big(\mathrm{d}_1(t,T,\sum_{i=N(t)+1}^{N(T)}\ln(1+U_i))\Big)\big|\mathcal{F}_t\Big] \\ &= S_t^\alpha \mathbb{E}^{Q^\alpha}\Big[\mathbb{N}\Big(\mathrm{d}_1(t,T,\sum_{i=N(t)+1}^{N(T)}\ln(1+U_i))\Big)\Big] \\ &= S_t^\alpha\Big[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\widetilde{\lambda}(T-t)}\widetilde{\lambda}^n(T-t)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbb{N}\left(\mathrm{d}_1(t,T,y)\right)\widetilde{f}^n(y)\mathrm{d}y+\mathrm{e}^{-\widetilde{\lambda}(T-t)}\mathbb{N}\left(\mathrm{d}_1(t,T,0)\right)\Big]. \end{aligned}$$

由引理2.2、引理2.4及方程(4)可得幂式期权在t时刻的价值, 结果如下.

定理 2.1 幂式看涨期权在t时刻的价格为

$$\begin{aligned} C(t,T) &= S_t^\alpha\Big[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\widetilde{\lambda}(T-t)}\widetilde{\lambda}^n(T-t)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbb{N}\left(\mathrm{d}_1(t,T,y)\right)\widetilde{f}^n(y)\mathrm{d}y+e^{-\widetilde{\lambda}(T-t)}\mathbb{N}\left(\mathrm{d}_1(t,T,0)\right)\Big] \\ &\quad -K^\alpha\mathrm{e}^{-r_tD(t,T)-A(t,T)}\Big[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\lambda(T-t)}\lambda^n(T-t)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbb{N}\left(\mathrm{d}_2(t,T,y)\right)f^n(y)\mathrm{d}y \\ &\quad +\mathrm{e}^{-\lambda(T-t)}\mathbb{N}\left(\mathrm{d}_2(t,T,0)\right)\Big], \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_1(t,T,y) &= d_2(t,T,y)+\alpha\sqrt{\int_t^T\Delta^2(s)\mathrm{d}s}, \\ \mathrm{d}_2(t,T,y) &= \frac{\ln\frac{S_t}{K}+\Lambda(t,T)-\lambda\beta(T-t)-\int_t^T\left(\sigma^{*2}(s,T)+\rho\sigma_s\sigma^*(s,T)+\frac{\sigma_s^2}{2}\right)\mathrm{d}s+y}{\sqrt{\int_t^T\Delta^2(s)\mathrm{d}s}}. \end{aligned}$$

注 2.1 幂式看跌期权的到期收益为$(K^\alpha-S_T^\alpha)^+$, 则其t时刻的价格为

$$\begin{aligned} \overline{P(t,T)} &= K^\alpha\mathrm{e}^{-r_tD(t,T)-A(t,T)}\Big[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\lambda(T-t)}\lambda^n(T-t)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbb{N}\left(-\mathrm{d}_2(t,T,y)\right)f^n(y)\mathrm{d}y \\ &\quad +\mathrm{e}^{-\lambda(T-t)}\mathbb{N}\left(-\mathrm{d}_2(t,T,0)\right)\Big] \\ &\quad -S_t^\alpha\Big[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\widetilde{\lambda}(T-t)}\widetilde{\lambda}^n(T-t)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbb{N}\left(-\mathrm{d}_1(t,T,y)\right)\widetilde{f}^n(y)\mathrm{d}y \\ &\quad +\mathrm{e}^{-\widetilde{\lambda}(T-t)}\mathbb{N}\left(-\mathrm{d}_1(t,T,0)\right)\Big]. \end{aligned}$$

下面将给出一些特殊情况, 即当利率不是随机的以及标的资产价格服从几何布朗运动时幂式期权的价格.

注 2.2　当利率为正常数 r 时, 幂式看涨期权 t 时刻的价格为

$$\begin{aligned} C(t,T) \;=\;& S_t^{\alpha}\Big[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\widetilde{\lambda}(T-t)}\widetilde{\lambda}^n(T-t)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbb{N}(\widetilde{\mathrm{d}_1}(t,T,y))\widetilde{f}^n(y)dy+\mathrm{e}^{-\widetilde{\lambda}(T-t)}\mathbb{N}(\widetilde{\mathrm{d}_1}(t,T,0))\Big]\\ &-K^{\alpha}\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Big[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\lambda(T-t)}\lambda^n(T-t)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbb{N}(\widetilde{\mathrm{d}_2}(t,T,y))f^n(y)\mathrm{d}y\\ &+\mathrm{e}^{-\lambda(T-t)}\mathbb{N}(\widetilde{\mathrm{d}_2}(t,T,0))\Big], \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathrm{d}}_1(t,T,y) &= \widetilde{\mathrm{d}}_2(t,T,y)+\alpha\sqrt{\int_t^T\sigma_s^2\mathrm{d}s},\\ \widetilde{\mathrm{d}}_2(t,T,y) &= \frac{-\ln\frac{K}{S_t}+r(T-t)-\frac{1}{2}\int_t^T\sigma_s^2\mathrm{d}s-\lambda\beta(T-t)+y}{\sqrt{\int_t^T\sigma_s^2\mathrm{d}s}}. \end{aligned}$$

相应的幂式看跌期权 t 时刻的价格为

$$\begin{aligned} \overline{P(t,T)} \;=\;& K^{\alpha}\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Big[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\lambda(T-t)}\lambda^n(T-t)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbb{N}(-\widetilde{\mathrm{d}_2}(t,T,y))f^n(y)dy\\ &+\mathrm{e}^{-\lambda(T-t)}\mathbb{N}(-\widetilde{\mathrm{d}_2}(t,T,0))\Big]\\ &-S_t^{\alpha}\Big[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\widetilde{\lambda}(T-t)}\widetilde{\lambda}^n(T-t)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbb{N}(-\widetilde{\mathrm{d}_1}(t,T,y))\widetilde{f}^n(y)\mathrm{d}y\\ &+\mathrm{e}^{-\widetilde{\lambda}(T-t)}\mathbb{N}(-\widetilde{\mathrm{d}_1}(t,T,0))\Big]. \end{aligned}$$

注 2.3　当利率为正常数 r, 标的资产价格服从几何布朗运动时, 幂式看涨期权 t 时刻的价格为

$$C(t,T) = S_t^{\alpha}\mathbb{N}(\overline{\mathrm{d}}_1(t,T))-K^{\alpha}\mathrm{e}^{-r(T-t)}\mathbb{N}(\overline{\mathrm{d}}_2(t,T)), \tag{11}$$

其中

$$\overline{\mathrm{d}}_1(t,T)=\overline{\mathrm{d}}_2(t,T)+\alpha\sqrt{\int_t^T\sigma_s^2\mathrm{d}s},\quad \overline{\mathrm{d}}_2(t,T)=\frac{-\ln\frac{K}{S_t}+r(T-t)-\frac{1}{2}\int_t^T\sigma_s^2\mathrm{d}s}{\sqrt{\int_t^T\sigma_s^2\mathrm{d}s}}.$$

相应的幂式看跌期权 t 时刻的价格为

$$\overline{P(t,T)}=K^{\alpha}\mathrm{e}^{-r(T-t)}\mathbb{N}(-\overline{\mathrm{d}}_2(t,T))-S_t^{\alpha}\mathbb{N}(-\overline{\mathrm{d}}_1(t,T)). \tag{12}$$

对参数 α 取不同的值可以得到不同的幂式期权的价格, 特别的, 当 $\alpha=1$ 时方程(11)和(12)分别为标准的欧式看涨和看跌期权价格公式.

定理 2.2 当 $\ln(1+U_i)$ 服从正态分布 $\mathbf{N}(\mu,\sigma^2)$ 时, 幂式看涨期权在 t 时刻的价格为

$$\begin{aligned} C(t,T) &= S_t^\alpha\Big[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\widetilde{\lambda}(T-t)}\widetilde{\lambda}^n(T-t)^n}{n!}\mathbb{N}\left(\mathrm{d}_1^*(t,T,n)\right)+\mathrm{e}^{-\widetilde{\lambda}(T-t)}\mathbb{N}\left(\mathrm{d}_1^*(t,T,0)\right)\Big] \\ &\quad -K^\alpha\mathrm{e}^{-r_tD(t,T)-A(t,T)}\Big[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\lambda(T-t)}\lambda^n(T-t)^n}{n!}\mathbb{N}\left(\mathrm{d}_2^*(t,T,n)\right) \\ &\quad +\mathrm{e}^{-\lambda(T-t)}\mathbb{N}\left(\mathrm{d}_2^*(t,T,0)\right)\Big], \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_1^*(t,T,n) &= \mathrm{d}_2^*(t,T,n)+\alpha\sqrt{\int_t^T\Delta^2(s)\mathrm{d}s+n\sigma^2}, \\ \mathrm{d}_2^*(t,T,n) &= \frac{\ln\frac{S_t}{K}+\Lambda(t,T)-\lambda\beta(T-t)-\int_t^T\left(\sigma^{*2}(s,T)+\rho\sigma_s\sigma^*(s,T)+\frac{\sigma_s^2}{2}\right)\mathrm{d}s+n\mu}{\sqrt{\int_t^T\Delta^2(s)\mathrm{d}s+n\sigma^2}}. \end{aligned}$$

证 明 首先计算 I_2. 通过测度变换有

$$\begin{aligned} I_2 &= K^\alpha\mathbb{E}^Q\big[\frac{B_t}{B_T}I_{\{S_T^\alpha\geqslant K^\alpha\}}\big|\mathcal{F}_t\big] \\ &= K^\alpha P(t,T)\mathbb{E}^{Q^T}\left[I_{\{S_T^\alpha\geqslant K^\alpha\}}\big|\mathcal{F}_t\right] \\ &= K^\alpha\mathrm{e}^{-r_tD(t,T)-A(t,T)}\Big[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\lambda(T-t)}\lambda^n(T-t)^n}{n!}\mathbb{N}\left(\mathrm{d}_2^*(t,T,n)\right) \\ &\quad +\mathrm{e}^{-\lambda(T-t)}\mathbb{N}\left(\mathrm{d}_2^*(t,T,0)\right)\Big]. \end{aligned}$$

再根据 Girsanov 定理, 在概率测度 Q^α 下, $\sum\limits_{i=1}^{N(T)}U_i$ 仍然是复合泊松过程, 其强度为 $\widetilde{\lambda}=\lambda\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\mathrm{e}^{\alpha\ln(1+U_j)}$, $\ln(1+U_j)$ 的密度函数为

$$\widetilde{f}(y)=\frac{\mathrm{e}^{\alpha y}f(y)}{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathrm{e}^{\alpha\ln(1+U_j)}]}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu-\alpha\sigma^2)^2}{2\sigma^2}},$$

即 $\ln(1+U_j)$ 服从正态分布 $\mathbf{N}(\mu+\alpha\sigma,\sigma^2)$. 从而可得

$$\begin{aligned} I_1 &= B_t\mathbb{E}^Q\left[\frac{S_T^\alpha}{B_T}I_{\{S_T^\alpha\geqslant K^\alpha\}}\big|\mathcal{F}_t\right]=S_t^\alpha\mathbb{E}^{Q^\alpha}[I_{(S_T^\alpha\geqslant K^\alpha)}|\mathcal{F}_t] \\ &= S_t^\alpha\Big[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\widetilde{\lambda}(T-t)}\widetilde{\lambda}^n(T-t)^n}{n!}\mathbb{N}\left(\mathrm{d}_1^*(t,T,n)\right)+\mathrm{e}^{-\widetilde{\lambda}(T-t)}\mathbb{N}\left(\mathrm{d}_1^*(t,T,0)\right)\Big]. \end{aligned}$$

最后再由(4)式 $C(t,T)=I_1-I_2$ 可以得到结果.

3 结 论

我们考虑了随机利率与标的资产价格相关时跳扩散模型下的幂式期权价格, 通过测度变换的方法可以简化计算, 得到结果. 在将来的研究中, 还可以考虑随机波动率模型, 双指数跳扩散模型下的幂式期权的价值.

(下转第 53 页)

As before, when $B_i(a) = 0$, $i = 1, 2, \cdots, 9$, one has $F(\alpha(x)) = F(x)$. The conclusion follows for $n = 5$ by taking

$$a_0 = \left(0, 0, \frac{3}{2g_2^-}a_3^-, \frac{3}{2g_2^-}a_3^-, \frac{g_2^+}{g_2^-}a_3^-, a_3^-, 0, 0, 0, 0\right).$$

This ends the proof.

[References]

[1] HAN Mao-an, LIU Xia. Hopf bifurcation for non-smooth Liénard systems[J]. Int J Bifurcation and Chaos, 2009, 19(7): 2401-2415.

[2] COLL B, GASULL A, PROHENS R. Limit cycles for non smooth differential equations via schwarzian derivative [J]. J Diff Eqs, 1996, 132: 203-221.

[3] LEINE R I, VAN CAMPEN D H. Bifurcation phenomena in non-smooth dynamical systems[J]. European Journal of Mechanics, 2006, 25: 595-616.

[4] LEINE R I. Bifurcation of equilibria in non-smooth continuous systems[J] Physica D, 2006, 223: 121-137.

[5] ZOU Y, KÜPPER T, BEYN W J. Generalized Hopf bifurcation for palnar Filippov systems continuous at the origin[J]. J. Nonlinear Sci, 2006, 16: 159-177.

[6] GASULL A, TORREGROSA J. Center-focus problem for discontinuous planar differ ential equations[J]. Int J Bifurcation and Chaos, 2003, 13: 1755-1765.

[7] KUNZE M. Non-Smooth Dynamical Systems[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2000.

(上接第 20 页)

[参　考　文　献]

[1] MERTON R C. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous[J]. Journal of Financial Economics, 1976(3): 125-144.

[2] NAIK V, LEE M. General equilibrium prcing of options on the market portfolio with discontinuous returns[J]. Review of Financial Studies, 1990(3): 493-521.

[3] AHN C M, CHO D C, PARK K. The pricing of foreign currency options under jump-diffusion processes[J]. Journal of Futures Markets, 2007, 27: 669-695.

[4] KOU S G. A jump diffusion model for option pricing[J]. Management Science, 2002, 48: 1086-1101.

[5] KOU S G., WANG H. Option pricing under a double exponential jump diffusion model[J]. Management Science, 2004, 50: 1178-1192.

[6] BIGER N, HULL J. The valuation of currency options[J]. Financial Manage, 1983(12): 24-28.

[7] COX J C, INGERSOLL J E, ROSS S A. A theory of the term structure of interest rates[J]. Ecomometrica, 1985, 53: 385-407.

[8] AMIN K I, Jarrow R. Pricing foreign currency options under stochastic interest rates [J]. Journal of International Money and Finance, 1991(10): 310-329.

[9] HULL J. Options, Futures, and Other Derivatives[M] 5th ed. New York: Prentice Hall International Inc, 2003.

[10] BLENMAN L P, Clark S P. Power exchange options[J]. Finance Research Letters, 2005 (2): 97-106.

[11] JAIMUNGAL S, Wang T. Catastrophe options with stochastic interest rates and compound Poisson losses.[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2006, 38: 469-483.

[12] SHREVE. Stochatic Calculus for Finance II: Continuous time models[M]. New York: Springer, 2000.