文章编号: 1000-5641(2011)03-0040-04

图的符号边控制数的下界

焦 姣[1]， 尚华辉[2]， 张 埂[1]

(1. 中国矿业大学 理学院, 江苏 徐州 221008; 2. 永城职业学院 基础部, 河南 永城 476600)

摘要: 对于任意的n阶图G, 当存在一个最大的奇元素子图是图G的导出子图, 给出了图G的符号边控制数的一个下界. 此外, 还改进了任意非平凡的n阶树T的符号边控制数的下界.

关键词: 符号边控制数; 奇圈; 树

中图分类号: O157.5　　**文献标识码**: A　　**DOI**: 10.3969/j.issn.1000-5641.2011.03.006

Lower bounds of signed edge domination numbers in graphs

JIAO Jiao[1], SHANG Hua-hui[2], ZHANG Geng[1]

(1. *College of Sciences, China University of Mining and Technology, Xuzhou Jiangsu* 211008, *China;*
2. *Department of Basic Courses, Yongcheng Vocational College, Yongcheng Henan* 476600, *China)*

Abstract: This paper showed the lower bounds of signed edge domination number of G, if there is a maximum elementary graph which is an induced subgraph of G; Also showed the lower bounds of signed edge domination number for every nontrivial tree T of order n.

Key words: signed edge domination number; odd cycle; tree

0 引　　言

本文研究的图均为无向简单图, 文中未说明的符号、术语同于文献[1]. 设$G=(V(G),E(G))$为一个图, $V(G)$和$E(G)$分别为图G的顶点集和边集,$|V(G)|$为图G的阶. 对任意的$v\in V(G)$, $d(v)$为点v在图G中的度, $E(v)$为与点v关联的所有边的集合. 若$e=uv\in E(G)$, 记$N[e]=\{u'v'\in E(G)|u'=u$或$v'=v\}$. 如果$V(G')\subseteq V(G)$, $E(G')\subseteq E(G)$, 称图G'是G的子图. 以$V(G')$为顶点集, 以两端均在$V(G')$中的边的全体为边集所组成的子图G'称为G的导出子图. 只有一个顶点的图称为平凡图, 其他所有的图都称为非平凡的; 连通的且不含圈的图称为树. 若一棵树的阶大于1, 则称这棵树为非平凡树. 对任意的图, 其每个连通分支均为1-正则或奇圈, 则称这个图为奇元素图. 设$f:E(G)\rightarrow\{-1,1\}$为图$G$的一个函数, 对任意的$v\in V(G)$, 定义$s_v=\sum_{e\in E(v)}f(e)$. 在图$G$中, 一度点称为叶点, 与一度点相邻的点称为茎点, $L(G)$, $S(G)$分别表示叶点、茎点的集合. 与叶点相关联的边称为悬挂边, 与悬挂边邻接但本身不是悬挂边的边称为支边, 用$Z(G)$表示图G的所有支边的集合. 此外, 对任意的实数x, [x]表示不超过数x最大的整数.

在文献[4]中, 介绍了图的符号边控制数, 如下.

收稿日期: 2010-03

第一作者: 焦姣, 女, 硕士, 研究方向为图论、运筹学. E-mail: jiaojiao860518@163.com.

设 $G=(V(G),E(G))$ 为一个非空图, 函数 $f:E(G)\rightarrow\ \{-1,1\}$ 被称为图 G 的一个符号边控制函数, 如果对任意的 $e\in E(G)$, 均有 $\sum_{e'\in N[e]}f(e')\geqslant 1$ 成立. 图 G 的符号边控制数被定义为

$$\gamma_s'(G)=\min\left\{\sum_{e\in E(G)}f(e)|f\text{ 为 }G\text{ 的符号边控制函数}\right\}.$$

有几篇关于图的符号边控制数的文章已经发表, 比如文献[2-7]. 本文主要给出了某些特殊图的符号边控制数更好的下界.

1　引　理

一般情况下, 图的符号边控制数的下界与图的很多参数有关, 比如图的阶数、最大度和最小度等. S. Akbari[5]等人给出了只与阶数有关的符号边控制数的下界.

引理 1.1[5]　对任意的 n 阶图 G, 有 $\gamma_s'\geqslant-\frac{n^2}{16}$.

对一般图 G, 确定其符号边控制数往往是比较困难的. 徐保根[6,7]给出了一些特殊图的符号边控制数, 及其树图的符号边控制数的下界.

引理 1.2[6]　对任意的正整数 $n\geqslant 3$, $\gamma_s'(C_n)=n-2[\frac{n}{3}]$.

引理 1.3[7]　对于任意非平凡的 n 阶树 T, 均有 $\gamma_s'(T)\geqslant 1$.

2　定理及证明

下面的定理部分改进了引理 1.1的结果.

定理 2.1　对任意的 n 阶图 G, 如果存在一个最大的奇元素子图是 G 的导出子图, 则有 $\gamma_s'(G)\geqslant-\frac{n^2}{16}+\frac{n}{6}+\frac{17}{9}$.

证　明　设图 H 为图 G 的最大(最多顶点数)的一个奇元素子图且为图 G 的导出子图. 设 $\alpha=|V(G)|-|V(H)|$.

断言 1　对任意的点 $v\notin V(H)$, 有 $d(v)\leqslant\frac{n-\alpha}{2}$ 成立.

(1) 点 v 与其余 $\alpha-1$ 个不属于 $V(G)$ 的任意点不相邻. 否则, 如果相邻, 我们可以找到奇元素子图 H', 且 $V(H')>V(H)$, 与假设矛盾.

(2) 点 v 与 H 中奇圈的顶点不相邻. 否则, 假设点 v 与奇圈 C 中点 u 相邻, 则 $E(C)\cup uv$ 可分解为不相邻的边集, 其顶点为 $V(C)\cup v$, 其构成了另一奇元素子图 H', 且 $V(H')>V(H)$, 与假设矛盾.

(3) 点 v 与 e 的两个端点不能同时相邻, 其中 $e\in E(H)$, 且 e 不是 H 中的任何奇圈上的边. 假设点 v 与 e 的两个端点相邻, 则形成了一个长度为 3的奇圈, 于是就得到另一奇元素子图 H', 且 $V(H')>V(H)$, 与假设矛盾.

由以上三点的分析可得: 对任意的点 $v\notin V(H)$, 有 $d(v)\leqslant\frac{n-\alpha}{2}$, 即断言 1成立.

断言 2　对任意的 m 个奇圈 $C_{k_1},C_{k_2},\cdots,C_{k_m}$, 设 $k=\sum_{i=1}^m|V(C_{k_i})|$, 有 $\sum_{i=1}^m\gamma_s'(C_{k_i})\geqslant k-2[\frac{k}{3}]$.

对任意的 m 个奇圈 $C_{k_1},C_{k_2},\cdots,C_{k_m}$, 设 $\sum_{i=1}^m k_i=k$, 由引理 1.2可推得:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m\gamma_s'(C_{k_i})&=\sum_{i=1}^m\left(k_i-2\left[\frac{k_i}{3}\right]\right)=k-2\sum_{i=1}^m\left[\frac{k_i}{3}\right]\\&\geqslant k-2\left[\frac{k}{3}\right]=\gamma_s'(C_k).\end{aligned}$$

所以, 断言 2 成立.

设图 H 中有 m 个奇圈, t 个单边, 则

$$\begin{aligned}\gamma_s'(H)&=\sum_{i=1}^{m}\gamma_s'(C_i)+t\geqslant n-\alpha-2t-2\left[\frac{n-\alpha-2t}{3}\right]+t\\&=n-\alpha-t-2\left[\frac{n-\alpha-2t}{3}\right]\geqslant n-\alpha-2\left[\frac{n-\alpha}{3}\right].\end{aligned}$$

根据以上结论, 可得

$$\begin{aligned}\gamma_s'(G)&=\sum_{e\in E(G)}f(e)=\frac{1}{2}\Bigg(\sum_{v\in V(H)}s_v+\sum_{v\in V(G)\setminus V(H)}s_v\Bigg)\\&\geqslant(n-\alpha)-2\left[\frac{n-\alpha}{3}\right]+\frac{1}{2}\sum_{v\in V(G)\setminus V(H)}s_v\\&\geqslant\left(n-\alpha-2\left[\frac{n-\alpha}{3}\right]\right)-\frac{1}{2}\sum_{v\in V(G)\setminus V(H)}d(v)\\&\geqslant n-\alpha-2\left[\frac{n-\alpha}{3}\right]-\frac{\alpha(n-\alpha)}{4}\\&\geqslant n-\alpha-2\left(\frac{n-\alpha}{3}-1\right)-\frac{\alpha(n-\alpha)}{4}\\&=\frac{\alpha^2}{4}-\left(\frac{n}{4}+\frac{1}{3}\right)\alpha+\frac{n}{3}+2\\&\geqslant-\frac{n^2}{16}+\frac{n}{6}+\frac{17}{9}.\end{aligned}$$

定理 2.1 证毕.

下面的定理改进了引理 1.3 的结果.

定理 2.2 对于任意非平凡的 n 阶树 T, 均有 $\gamma_s'(T)\geqslant 1+|O'(T)|$, 其中 $O'(T)=\{v\,|\,d_T(v)=0(\mathrm{mod}\ 2)且v\in S(T)\}$.

证 明 当 T 为星图时, 易知上述下界成立. 故下面假设 T 不是星图, 即 T 中包含非悬挂边. 设 f 为 T 的一个符号边控制函数, 且满足 $\gamma_s'(T)=\sum_{e\in E(T)}f(e)$.

下面对情况 1 时树 T 的阶数 n 用归纳法.

当 $n=2$ 或 3 时, 显然成立. 若对于一切阶数不大于 $n-1$ 的非平凡树 T', 均有 $\gamma_s'(T)\geqslant 1+|O'(T')|$ 成立.

情况 1 若 T 中存在非悬挂边 e, 使得 $f(e)=-1$, 但 $e\notin Z(T)$. 记

$$O'(T_1)=\{v\,|\,d_{T_1}(v)=0(\mathrm{mod}\ 2)且v\in S(T_1)\};\quad O'(T_2)=\{v\,|\,d_{T_2}(v)=0(\mathrm{mod}\ 2)且v\in S(T_2)\}.$$

令 $T-e=T_1\cup T_2$, 则 T_1 与 T_2 均为非平凡的树, 由归纳假设知: $\gamma_s'(T_1)\geqslant 1+|O'(T_1)|$, $\gamma_s'(T_2)\geqslant 1+|O'(T_2)|$. 由 $f(e)=-1$, 知: f 在 T_1,T_2 上的限制 $f|_{T_1},f|_{T_2}$ 分别为 T_1,T_2 上的符号边控制函数, 从而有

$$\begin{aligned}\gamma_s'(T)&=\sum_{e'\in E(T)}f(e')=\sum_{e'\in E(T_1)}f(e')+\sum_{e'\in E(T_2)}f(e')+f(e)\\&\geqslant\gamma_s'(T_1)+\gamma_s'(T_2)+f(e)\geqslant 1+|O'(T_1)|+1+|O'(T_2)|+f(e)\geqslant 1+|O'(T)|.\end{aligned}$$

情况 2　T 中的任意非悬挂边 e, 若 $f(e)=-1$, 则一定有 $e\in Z(T)$. 或者对于每一条非悬挂边 e, 均有 $f(e)=+1$.

令 $T_0=T-L(T)$, 则 T_0 为一颗非平凡的树. 设 $E(T_0)=m_0\geqslant 1$, 则 $|V(T_0)|=m_0+1, |L(T)|=n-|V(T_0)|=n-m_0-1$. 由情况 2 的假设, T 中着 -1 的边一定至少关联 T 的一个茎点. 对于每个顶点 $v\in S(T)$, 其中 $S(T)$ 表示茎点的集合, 在函数 f 下, 点 v 在 $T[T^-]$ 中的度, 点 v 在 T 中所关联的边着 -1 的条数分别记为 $d_{T[T^-]}(v), l_v$. 其中 $T[T^-]$ 表示, T 中全部着 -1 的边集 T^- 所构成的 T 的边导出子图. 则下述的结论成立.

(1) 对任意的点 $v\in O'(T)$, 有 $l_v=d_{T[T^-]}(v)\leqslant\{d_T(v)-2\}/2$;

(2) 对任意的 $v\in\{V(T_0)/O'(T)\}\cap S(T)$, 有 $l_v=d_{T[T^-]}(v)\leqslant\{d_T(v)-1\}/2$;

(3) $S^-\leqslant\sum_{v\in S(T)}l_v=\sum_{v\in S(T)}d_{T[T^-]}(v)$, 其中 $S(T)$ 表示茎点的集合(当着 –1 的某条边与两个茎点关联时, 不等式取“$<$”), S^- 表示 T 中所有着 –1 的边的总数.

在 f 下, 则有

$$\begin{aligned}\sum_{v\in S(T)}l_v=&\sum_{v\in S(T)}d_{T[T^-]}(v)\\ &\leqslant\frac{1}{2}\Big\{\sum_{v\in V(T_0)\backslash O'(T)}\{d_T(v)-1\}+\sum_{v\in O'(T)}\{d_T(v)-2\}\Big\}\\ &=\frac{1}{2}\Big\{\sum_{v\in V(T_0)\backslash O'(T)}d_T(v)+\sum_{v\in O'(T)}d_T(v)+\Big\{\sum_{v\in V(T_0)\backslash O'(T)}\{-1\}+\sum_{v\in O'(T)}\{-2\}\Big\}\Big\}\\ &=\frac{1}{2}\Big\{\sum_{v\in V(T_0)}d_T(v)+\Big\{\sum_{v\in V(T_0)\backslash O'(T)}\{-1\}+\sum_{v\in O'(T)}\{-1\}\Big\}+\sum_{v\in O'(T)}\{-1\}\Big\}\\ &=\frac{1}{2}\Big\{\sum_{v\in V(T_0)}d_{T_0}(v)+|L(T)|-\sum_{v\in V(T_0)}\{+1\}-|O'(T)|\Big\}\\ &=\frac{1}{2}\{2m_0-(m_0+1)+(n-(m_0+1))\}-\frac{|O'(T)|}{2}\\ &=\frac{1}{2}(n-2)-\frac{|O'(T)|}{2}.\end{aligned}$$

在 f 下, T 中标 $+1$ 的边数记为 S^+, 则 $S^+\geqslant(n-1)-\{\frac{1}{2}(n-2)-\frac{|O'(T)|}{2}\}=\frac{1}{2}n+\frac{|O'(T)|}{2}$. 于是符号边控制数

$$\gamma_s'(T)=\sum_{e\in E(T)}f(e)\geqslant\frac{1}{2}n+\frac{|O'(T)|}{2}-\Big\{\frac{1}{2}(n-2)-\frac{|O'(T)|}{2}\Big\}=1+|O'(T)|.$$

定理 2.2 证毕.

[参　考　文　献]

[1] BONDY J A, MURTY U S R. Graph Theory with Applications[M]. New York: Macmilan Press, 1976.

[2] XU B G. Two classes of edge domination in graphs[J]. Discrete Appl Math, 2006, 154(10): 1541-1546.

[3] XU B G. On edge domination numbers of graphs[J]. Discrete Math, 2005, 294(3): 311-316.

[4] XU B G. On signed edge domination numbers of graphs[J]. Discrete Math, 2001, 239: 179-189.

[5] AKBARI S, BOLOUKI S, HATAMI P. On the signed edge domination number of graphs[J]. Discrete Math, 2009, 309: 587-594.

(下转第 72 页)

作函数 $f(x)=2^{x+1}-\{x(x+1)+\log_2 x(x+1)+2\}$, 则

$$f'(x)=2^{x+1}\ln 2-2x-1-\frac{2x+1}{x(x+1)\ln 2}.$$

当 $x\geqslant 4$ 时, $0<\frac{2x+1}{x(x+1)\ln 2}<1$，所以 $f'(x)>2^{x+1}\ln 2-2x-2>0$, $f(x)$ 为单调递增函数. 又 $f(4)=2^5-(4\times 5+\log_2 4\times 5+2)=8-\log_2 5>0$, 所以 $x\geqslant 4$ 时, $f(x)>0$ 恒成立. 故当 $k\geqslant 4$ 时, $2^{k+1}-\{k(k+1)+\log_2 k(k+1)+2\}>0$. 即当 $k\geqslant 4$, $n=2^{k+1}\times 3$ 时, $\varphi(n)-S(n^k)>0$.

因此 $k\geqslant 4$, $n=2^{k+1}\times 3$ 不是方程 $S(n^k)=\varphi(n)$ 的解. 这就完成了定理3的证明.

[参　考　文　献]

[1] SMARANDACHE F. Only Problems, Not Solution [M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] 潘承洞, 潘承彪. 初等数论[M]. 2版. 北京: 北京大学出版社, 2003.
PAN C D, PAN C B. Elementary Number Theory [M]. 2nd ed. Beijing: Peking University Press, 2003.

[3] MURTHY A. Some notions on least common multiples [J]. Smarandache Notions Journal, 2001, 12: 307-309.

[4] LE Maohua. An Equation concerning the Smarandache LCM Function [J]. Smarandache Notions Journal, 2004, 14: 186-18.

[5] FU Jing. An Equation Involving the Smarandache Function [J]. Scientia Magna, 2006, 2(4): 83-86.

[6] MA Jinping. An equation involving the Smarandache function [J]. Scientia Magna, 2005, 1(2): 89-90.

[7] ZHAO Yanlin. Some divisibility of Smarandache numerical carpet [J]. Scientia Magna, 2008, 4(3): 29-32.

[8] REN Zhibin. On the equation involving the Smarandache reciprocal function and its positive integer solutions [J]. Scientia Magna, 2008, 4(1): 23-25.

[9] WU Qibin. A conjecture involing the F.Smarandache LCM function [J]. Scientia Magna, 2007, 3(1): 26-28.

[10] APOSTOL T. M. Introduction to Analytic Number Theory [M]. New York, Spring: Verlag, 1976.

[11] MA Jinping, An equation involving the Smarandache function[J]. Scientia Magna, 2005, 1(2): 89-90.

[12] 易媛, 亢小玉. Smarandache问题研究[M]. [S.L.] High American Press, 2006: 99-100.
YI Y, KANG X Y. Smarandache Problems Research [M]. [S.L.] High American Press, 2006: 99-100.

[13] MARK Farris. Patrick Mitshell, Bounding the Smarandache function [J]. Smrandache Notions Journal, 2002, 13(1): 37-42.

(上接第 43 页)

[6] 徐保根. 关于图的符号边控制数[J]. 华东交通大学学报, 2003, 20(2): 102-105.
XU B G. On signed edge domination in graphs[J]. Journal of East China Jiaotong University, 2003, 20(2): 102-105.

[7] 徐保根. 关于图的符号边控制数的下界[J]. 华东交通大学学报, 2004, 21(1): 110-113.
XU B G. On the lower bounds of signed edge domination numbers in graphs[J]. Journal of East China Jiaotong University, 2004, 21(1): 110-113.