

文章编号: 1000-4750(2013)04-0385-07

# 用浮阻力模型研究 Rayleigh-Taylor 不稳定性诱发混合现象

杨 玟, 王丽丽, 周海兵, 张树道

(北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100094)

**摘 要:** 采用浮阻力模型对不同加速度历史、不同密度比条件下 Rayleigh-Taylor 不稳定性诱发的物质渗透边界的演化过程进行了计算, 揭示了该混合在常加速度和复杂变加速度情况下不同的发展规律, 以及气泡和尖顶演化的不对称性随密度比的增大而增强的特性。通过与实验结果的分析, 验证了该文中模型参数的选取、方程中现象学比例因子的添加和模型假设是合适的。这些结果为将浮阻力模型直接应用到相关的工程设计, 取代现有的经验公式提供了理论依据, 大大推动了与不稳定性诱发混合现象相关的工程领域的发展。

**关键词:** 浮阻力模型; Rayleigh-Taylor 不稳定性; 混合现象; 加速度历史; 密度比

**中图分类号:** O351.2 **文献标志码:** A **doi:** 10.6052/j.issn.1000-4750.2011.11.0808

## STUDY ON MIXING INDUCED BY RAYLEIGH-TAYLOR INSTABILITY USING BUOYANCY-DRAG MODEL

YANG Min, WANG Li-li, ZHOU Hai-bing, ZHANG Shu-dao

(Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100094, China)

**Abstract:** The evolution of material interpenetration boundary induced by Rayleigh-Taylor instability is calculated under various acceleration histories and density ratios using a buoyancy-drag model, which reveals that the mixing development under a constant acceleration is very different from that under a variable acceleration, and that the asymmetry between a bubble and a spike enhances with the increase of the density ratio. The calculation results are compared with detailed experiment data to prove the validation of the choice of model constants, the addition of phenomenal ratio factors and model assumption used. These results provide theory guides for applying a buoyancy-drag model to related engineering designs directly and for replacing existing empirical expressions, which greatly promote the development of engineering fields related to mixing phenomenon induced by instabilities.

**Key words:** buoyancy-drag model; Rayleigh-Taylor instability; mixing; acceleration history; density ratio

当不同密度流体受到与密度梯度反向的加速度 ( $\nabla p \cdot \nabla \rho < 0$ ) 时发生 Rayleigh-Taylor 不稳定性 (RTI)<sup>[1-2]</sup>, 轻流体渗透到重流体中形成气泡 (bubble), 重流体渗透到轻流体中形成尖顶 (spike)。它在许多自然现象和实际应用中发挥重要作用, 如燃烧、旋转机械、惯性约束聚变 (ICF)、超新星爆炸

和地球物理学<sup>[3-4]</sup>。ICF 靶丸中 RTI 发生在低密度烧蚀物质向内推进球壳的烧蚀外层和低密度燃料压力开始减速进入外壳时的减速和停滞阶段的壳-燃料内界面。小扰动可能增长为较大振幅以致于点火前壳完全破裂。因此, RTI 被认为是 ICF 完成点火的主要障碍之一。

收稿日期: 2011-11-30; 修改日期: 2012-05-31

基金项目: 国家自然科学基金项目(11072040); 中国工程物理研究院科学技术发展基金项目(2011B0201042, 2012B0201030, 2009A0202014)

通讯作者: 杨 玟(1970-), 女, 江苏靖江人, 副研究员, 博士, 从事多相流、湍流模型研究(E-mail: yang\_min@iapam.ac.cn).

作者简介: 王丽丽(1968-), 女, 安徽涡阳人, 研究员, 博士, 从事界面不稳定性研究(E-mail: wanglili@iapam.ac.cn);

周海兵(1975-), 男, 山东日照人, 副研究员, 博士, 从事湍流及三维拉氏程序研究(E-mail: zhou\_haibing@iapam.ac.cn);

张树道(1965-), 男, 安徽全椒人, 研究员, 博士, 从事三维拉氏程序研究(E-mail: zhang\_shudao@iapam.ac.cn).

目前,随着计算机技术的迅猛发展,RTI的高精度高分辨率数值模拟(如直接模拟 DNS、大涡模拟 LES)<sup>[5-7]</sup>已成为该领域研究的重要手段之一,它为揭示不稳定性发展的内在规律发挥了一定的作用。但是,由于不稳定性现象以及与其相关物理过程的复杂性,高精度计算不仅费时,而且受计算机硬件条件限制,其模拟能力目前尚不能解决许多复杂的实际应用问题。因此,不稳定性诱发混合现象的模型研究近年来受到了越来越多的关注<sup>[8-13]</sup>。本文作者也对此进行了尝试,将传统的  $k-\varepsilon$  模型应用于界面不稳定性引起的混合,取得了令人满意的结果<sup>[14-15]</sup>。

但是,如上所述,由于与 RTI 相关的其它物理过程非常复杂,较复杂的混合模型(如  $k-\varepsilon$ )也难以直接应用到工程设计中。目前,很多实际应用中 RTI 诱发混合现象的处理都非常简单,通常采用经验公式  $h_{b,s} = \alpha_{b,s} A g t^2$  ( $h_{b,s}$  为气泡/尖顶宽度;  $\alpha_{b,s}$  为经验系数,可认为是势能释放有效性的度量;  $A = (\rho_2 - \rho_1) / (\rho_1 + \rho_2)$  为 Atwood 数,  $\rho_1$ 、 $\rho_2$  分别为轻重介质的密度;  $g$  为驱动加速度;  $t$  为时间)。文献资料<sup>[5,9,12]</sup>指出,该公式是将自相似条件 ( $\lambda \propto h$ ) 应用到描述不稳定性驱动中混合区物质渗透透边界演化过程的浮阻力模型得到的。而实际应用中 RTI 诱发混合大多不满足自相似条件<sup>[10-11,13]</sup>。最近,美国洛斯阿拉莫斯国家实验室(LANL)的 Chen<sup>[16]</sup>对浮阻力模型进行了解析求解,得到了混合层边缘作为时间函数的显式表达式。考虑  $t$  的主要阶,结果为:

$$|h_i(t)| \approx \frac{1}{4a_i^2} A g (t-t_0)^2 + \frac{\gamma_1}{a_i} (1+f_{i0})^{-1/2} a_i^2 \cdot \sqrt{A g |h_{i0}|} (t-t_0) + \frac{\gamma_1^2 |h_{i0}|}{(1+f_{i0})^{1/2} a_i^2}。$$

该精确解显示 RT 混合层早期指数增长,中间过程中线性增长,这依赖于初始条件,后来达到自相似阶段,以  $\alpha A g t^2$  增长。通常的  $\alpha A g t^2$  仅是后期的自相似解。事实上实际的物理过程经历从依赖于初始条件到不依赖的动力学转换。由此可见,工程设计中对 RTI 诱发混合现象的处理过于粗糙。

本文在简单介绍描述作用于混合层中产生的气泡和尖顶的浮阻力模型基础上,采用该模型对常加速度和复杂变加速度情况下 RTI 诱发混合层宽度(气泡与尖顶宽度之和)进行了计算,计算结果与实

验吻合得较好,表明本研究中模型参数的选取、方程中现象学比例因子的添加和模型假设是合适的。在此基础上,进一步探讨了不同密度比条件下模型的适用性。

## 1 模型方程

RTI 的演化通常分为线性、早期非线性、非线性后期和湍流混合阶段。如果界面初始扰动非常小,不稳定性增长的早期可以采用流体动力学方程的线性形式,即一阶扰动展开来分析。结果是波长  $\lambda$  的小振幅扰动随时间指数增长。早期的非线性演化可采用二阶扰动展开得到,它当振幅  $a \approx 0.1\lambda$  时发生。但当  $a > 0.1\lambda$  后不久,扰动展开的所有阶的大小变得相似,为了合理近似界面需要更多的项,这限制了扰动理论的适用范围,必须考虑新的技术。Layzer<sup>[17]</sup>第一个采用简单的势流模型成功预测 RTI 演化,并得到了描述气泡运动的最原始的浮阻力模型方程:

$$dV_b/dt = g \cdot (1-E)/(2+E) - (V_b^2/\lambda) \cdot 6\pi/(2+E),$$

其中,  $E = \exp(-6\pi a/\lambda)$ 。

目前,典型的浮阻力模型可写为如下形式<sup>[16]</sup>:

$$[(\rho_i + C_a \rho_i) dV_i/dt - \beta(\rho_i - \rho_j)g(t)]Volume = -C_d \rho_i V_i |V_i| Area。$$

方程左端第一项为惯性力,第二项为浮力,右端为阻力。重流体由  $i=s$  (尖顶)表示,轻流体由  $i=b$  (气泡)表示。 $V_i$  是气泡/尖顶的渗透速度,且  $V_i = dh_i/dt$ ,  $h_i$  表示气泡/尖顶的瞬时宽度。 $C_a$  是附加质量力系数,  $\beta$  是浮力产生的模型常数,  $C_d$  是阻力系数。模型方程的简单形式掩盖了许多突出的问题: 1) 由于被渗透的物质也被移动,惯性力是不确定的。该运动可以由附加质量力系数  $C_a$  描述,它随着渗透物质的形状和体积份额的变化而变化; 2) 由于物质混合,尤其是原子水平上的混合,降低了密度差异,RT 浮力被未知系数  $\beta < 1$  减小; 3) 虽然分离物质的阻力系数已被评估,但未对湍流气泡和尖顶进行; 4) 因为惯性力和浮力与体积成正比,而阻力正比于横截面,所以存在表示混合层纵向尺度的动力学长度  $L_i = Volume / Area$ 。它们可能依赖于气泡和尖顶前沿的曲率半径。如果混合层自相似增长,该不确定性可以在阻力系数中以复杂的方式从现象上被吸收。

上述问题可以通过探索性地模拟不同加速度历史、不同密度比条件下不稳定性诱发混合的演

化, 将计算结果与实验观测到的结果进行匹配来解决。本研究选取  $C_a=1$  和  $\beta=1$ , 这保证尖顶在  $A=1$  时自由下落。调整  $C_d$  来与实验比对。此外, 在阻力项中对气泡和尖顶分别添加现象学密度因子  $f_b=(\rho_2+\rho_1)/\rho_2$  和  $f_s=f_b\sqrt{\rho_2/\rho_1}$  (与阻力项相乘), 这有效地引入了对气泡和尖顶不同的依赖于密度的阻力系数。特定的容积与表面积之比的选择导致基本浮阻力模型的明显差异<sup>[13]</sup>, 本研究假设  $L_b=L_s=\min(h_b,h_s)=h_b$  来耦合气泡与尖顶的长度。

本文所求解的模型方程是一组二阶常微分方程, 将它们简化为一阶微分方程:  $dh_{b,s}/dt=V_{b,s}$ ;  $dV_{b,s}/dt=Ag-f_{b,s}C_dV_{b,s}|V_{b,s}|/h_{b,s}$ 。采用四阶 Runge-Kutta 方法进行求解:

$$\begin{aligned} k_1 &= \Delta t f(t_n, V_n); \\ k_2 &= \Delta t f(t_n + \Delta t/2, V_n + k_1/2); \\ k_3 &= \Delta t f(t_n + \Delta t/2, V_n + k_2/2); \\ k_4 &= \Delta t f(t_n + \Delta t, V_n + k_3); \\ V_{n+1} &= V_n + k_1/6 + k_2/3 + k_3/3 + k_4/6 + O(\Delta t^5)。 \end{aligned}$$

## 2 结果分析与讨论

采用上述模型和数值方法, 我们对工作中关注的不同的加速度剖面和 Atwood 数下模型的性能进行了考察。

### 2.1 常加速度和简单变加速度情况下的模拟

首先采用上述模型对四种不同加速度情况下气泡和尖顶宽度进行了计算。图 1 给出了所采用的四种加速度曲线, 标注为  $G_n$ , 编号  $n=1,2,3,\dots$ ,  $g_0$  为重力加速度。这些曲线为 LANL 的 Dimonte 等<sup>[18]</sup>LEM(Linear Electric Motor)实验的测量曲线, 分别为随时间递增和递减的加速度、振荡加速度和

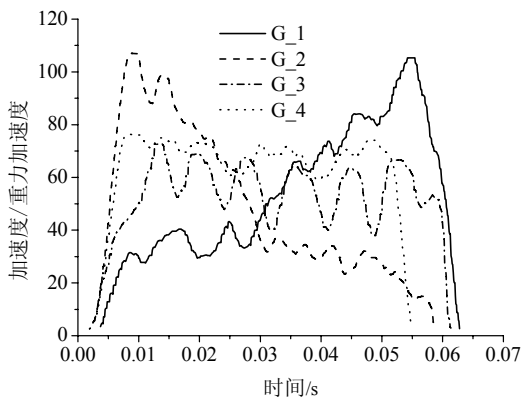
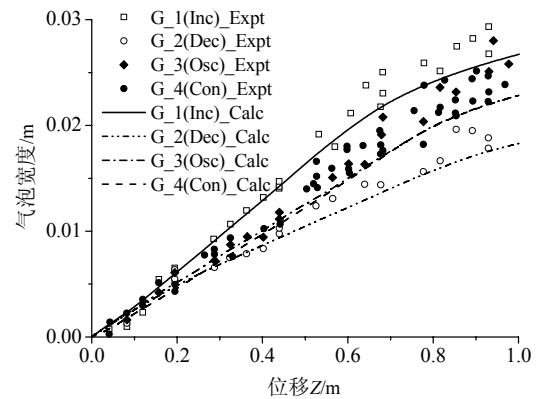


图 1 计算采用的四种不同加速度曲线

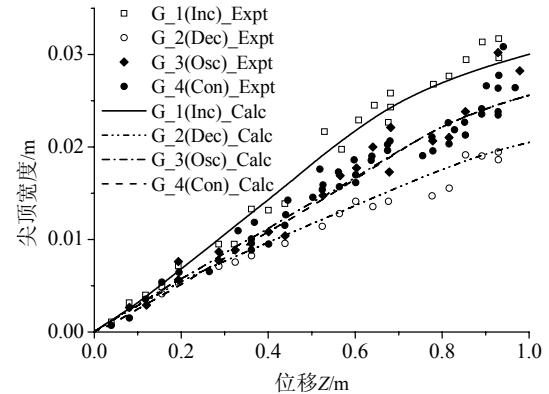
Fig.1 Four kinds of accelerations used in the calculation

常加速度。对于每一种情况, 通过调整阻力系数  $C_d$  和初始振幅  $h_{i0}$  来使随时间变化的解与实验数据相符。但是, 数值实验发现: 在大多数情况下  $h_{i0}$  对结果的影响远小于  $C_d$  的影响。

图 2 给出了这四种加速度驱动下气泡和尖顶宽度随位移  $Z$  的变化, 这里定义  $Z = \iint g dt^2/dt$ , 加速度为常数时  $Z = gt^2/2$ 。由图 2 可见, 四种加速度情况下计算的气泡和尖顶宽度与实验基本吻合, 但即使在常加速度时经验公式  $h = \alpha Agt^2$  也不满足。从图 2 中还可看出: 振荡加速度  $G_3$  和常加速度  $G_4$  情况下气泡和尖顶的宽度开始略有差别, 后期基本重合。这是由于  $G_4$  仅是名义上的常加速度, 实验中  $\delta g \sim 10\%$ , 而  $G_3$  的振荡幅度  $\delta g \sim 20\%$ , 与  $G_4$  的脉动是一个量级, 太小。此外, 气泡和尖顶的宽度明显依赖于斜率  $dg/dt$ ,  $dg/dt > 0$  混合增强, 反之, 混合减弱, 这与上文模型方程的精确解结果一致, 这表明递增的加速度是流体力学中最不稳定的加速度剖面, 这对于 ICF 可能是重要的<sup>[16]</sup>。由于这四种工况下两介质密度比 ( $R = \rho_2/\rho_1 = 1.57$ ) 小, 不稳定性发展中气泡和尖顶



(a)



(b)

图 2 气泡和尖顶宽度随位移  $Z$  的变化 ( $\rho_2/\rho_1=1.57$ )

Fig.2 The width of bubble and spike with  $Z$  ( $\rho_2/\rho_1=1.57$ )

的不对称性不显著，因此图中气泡和尖顶宽度的差别不大。

对于随时间变化的加速度  $g(t)$ ，Dimonte 等<sup>[19]</sup>通过在气泡极限速度  $dh_b/dt \propto \sqrt{g\lambda}$  中调用自相似条件 ( $\lambda \propto h$ ) 得到  $h = \alpha_s 2AS$ ，其中长度  $S = [\int \sqrt{g} dt]^2 / 2$ 。对于常数  $g$ ， $S = Z = gt^2 / 2$ ；但当加速度随时间变化时  $S \neq Z$ 。该公式也已应用到工程设计中。为了检验它的适用性，图 3 给出了气泡和尖顶宽度随长度  $S$  的变化。从图 3 中可看出：气泡和尖顶宽度不满足上述公式。这从理论分析<sup>[18]</sup>中清晰可见：该公式仅当  $dg/dt \ll (g/h)dh/dt$  时才满足浮阻力模型方程。需要指出的是该算例中两者差别不大，而该公式与模型方程的解之间的差别可以由更大的斜率  $dg/dt$  来辨别。

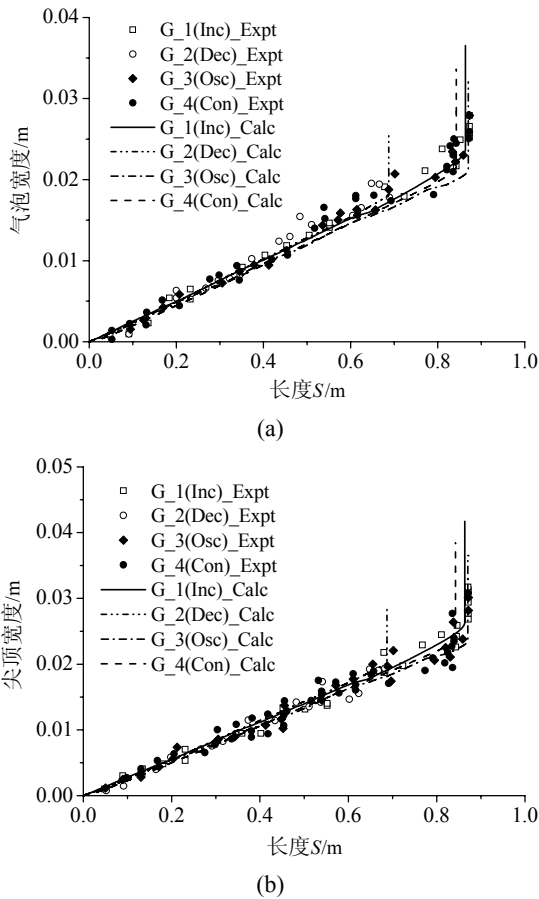


图 3 气泡和尖顶宽度随长度  $S$  的变化 ( $\rho_2/\rho_1=1.57$ )  
Fig.3 The width of bubble and spike with  $S$  ( $\rho_2/\rho_1=1.57$ )

### 2.2 加速-减速-再加速情况下的模拟

考虑到实际应用中加速度变化的复杂性，本文进一步考察了模型在加速-减速-再加速情况下的适用性。图 4 给出了 Dimonte 等<sup>[20]</sup>LEM 实验的加速度测量曲线。采用上述浮阻力模型对该加速度情况

下气泡和尖顶宽度进行了计算，结果示于图 5 中。由图 5 可见，模型结果与实验测量以及大涡模拟 (LES) 结果定性上一致：在最初的 RT 不稳定加速度中扰动增长至自相似状态；RT 稳定的负加速度过程中，主要气泡和尖顶倒转它们的流动，被拖曳的

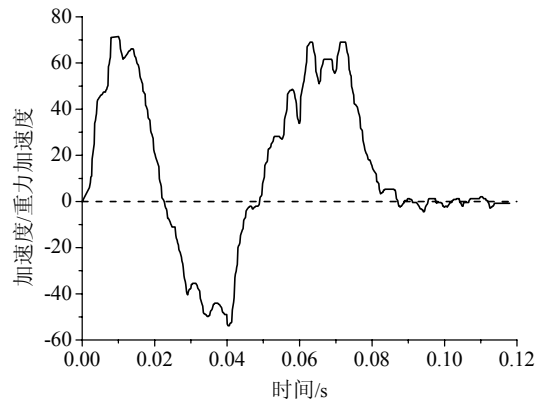


图 4 加速-减速-再加速情况下的加速度曲线  
Fig.4 Acceleration history under the acceleration-deceleration-reacceleration condition

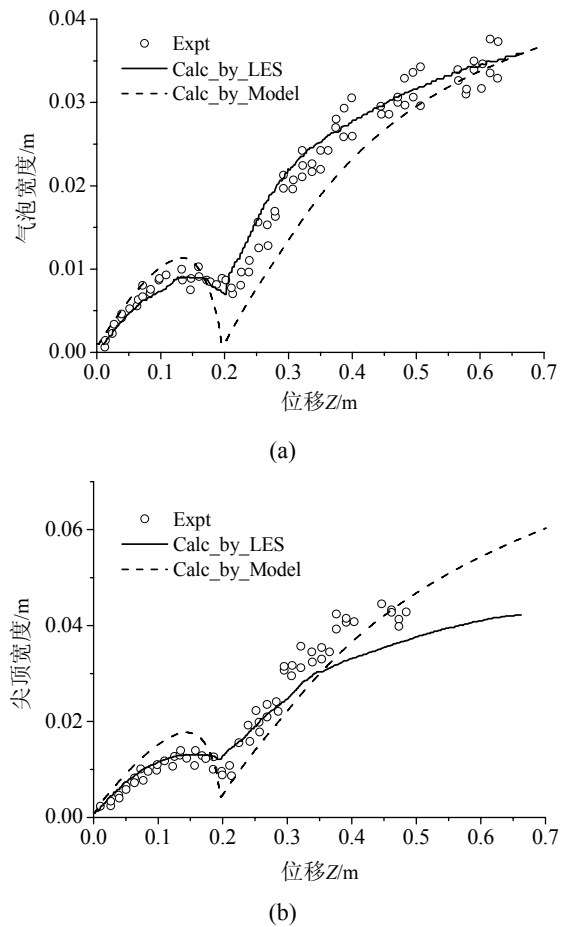


图 5 加速-减速-再加速情况下气泡和尖顶宽度随位移的变化曲线 ( $\rho_2/\rho_1=2.83$ )  
Fig.5 The width of bubble and spike under the acceleration-deceleration-reacceleration condition ( $\rho_2/\rho_1=2.83$ )

较小尺度结构破碎, 振幅减小; 在第二个不稳定加速度中, 不稳定性恢复, 接近渐近的自相似增长。但是, 稳定的负加速度过程中模型结果与实验和 LES 结果定量上的差别清晰可见, 尤其是气泡宽度。这表明模型在描述稳定的负加速度过程的特征上有待完善。而采用分离的浮力物质的微物理学(如气泡竞争模型等)来描述该特征更优的, 这部分工作正在进行中。另外, 即使是 LES 计算, 仅当采用宽带初始扰动时才能得到与实验较好的吻合(如图 5 所示)。而当初始扰动仅包含短波时 LES 结果与实验差别大(图中未给出)。尽管如此, 图中演化后期尖顶宽度的 LES 计算值与测量值差别较大。

### 2.3 不同密度比情况下的模拟

工程设计中经常遇到两种介质密度比相对较大的情况, 而前面的计算中密度比都比较小, 与实际情况有出入。因此我们还考察了不同密度比情况下模型的性能。采用该模型对常加速度时(图 6 所示, 图中曲线仍为 Dimonte 等<sup>[18]</sup>LEM 实验的实测曲线)  $1.3 \leq R \leq 50$  范围下气泡和尖顶宽度进行了计算。

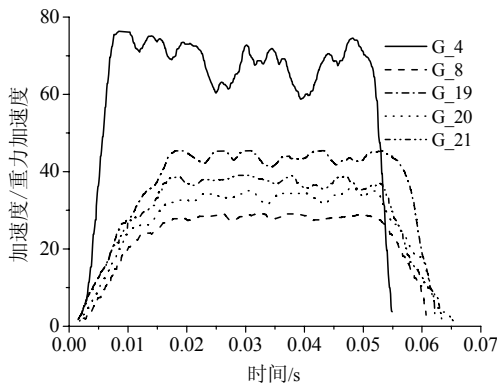
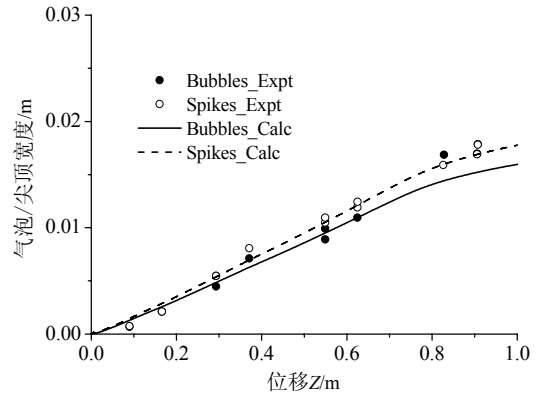


图 6 不同密度比对应的几种常加速度曲线

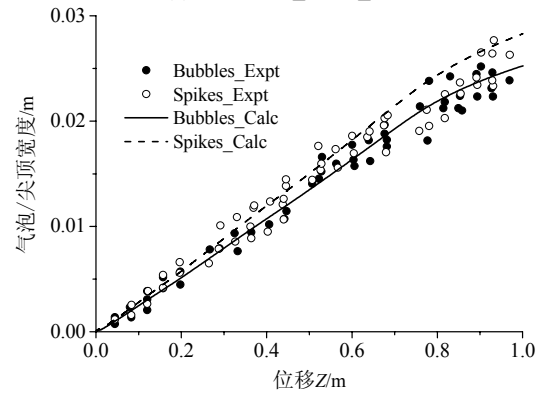
Fig.6 Several kinds of constant accelerations corresponded to different density ratios

图 7 给出了 8 种密度比下气泡和尖顶宽度随位移的变化(图 7(e)中无气泡宽度测量值是由于重流体采用不透明的液态铟/镓金属而导致的), 图 7 中实心圆点和空心圆点分别为气泡和尖顶宽度的测量值, 实线和虚线分别表示气泡和尖顶宽度的计算值。从图中可看出, 不同密度比时气泡和尖顶宽度的计算值都与实验吻合得较好。在实验或模拟中当  $h_{b,s} = \alpha_{b,s} Agt^2$  近似满足时,  $\alpha_b$  的取值也因初始条件、加速度历史等许多其它因素而变化, 范围为  $0.02 < \alpha_b < 0.07$ ,  $\alpha_s$  的取值范围更宽广<sup>[21]</sup>。而本

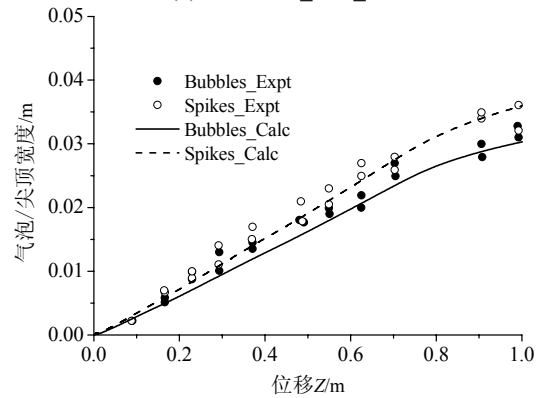
研究中浮阻力模型的可调参数的取值为  $h_{i0} = 1 \times 10^{-6}$  或  $h_{i0} = 1 \times 10^{-4}$ 、 $3.3 < C_d < 4.0$ , 其不



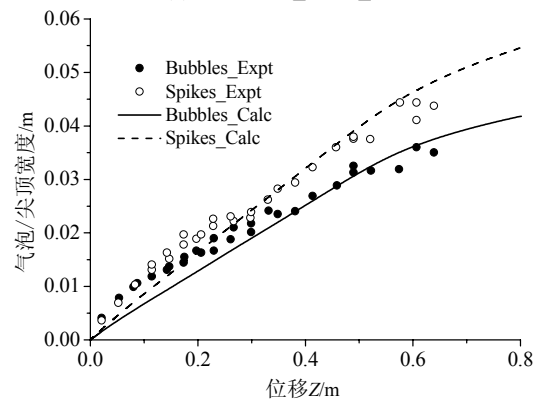
(a)  $R=1.51, F_{23}, G_4$



(b)  $R=1.57, F_7, G_4$



(c)  $R=1.96, F_{22}, G_4$



(d)  $R=2.83, F_{31}, G_{19}$

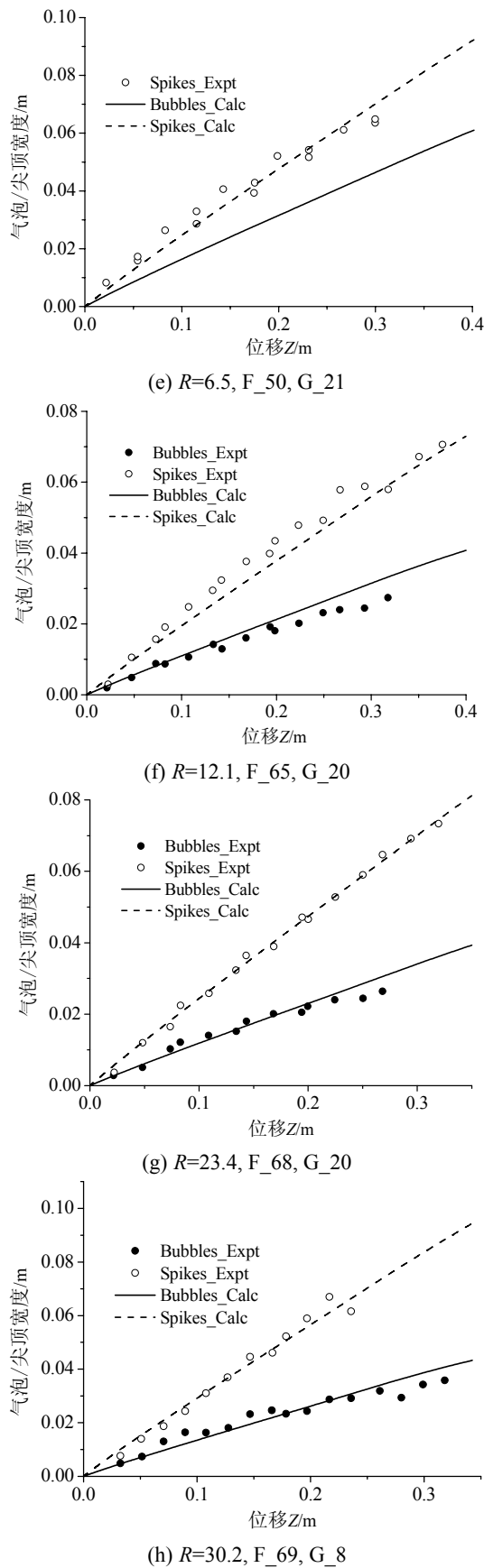


图7 不同密度比条件下气泡和尖顶宽度随位移的变化曲线  
Fig.7 Widths of bubble and spike under different density ratios

确定性小得多,且模型的结果明显优于经验公式。此外,从图中还可看出,对于大密度比模型仍适用,而且气泡和尖顶演化的不对称性随密度比的增大而增强,与理论分析结果<sup>[12]</sup>一致。

### 3 结论

本文采用浮阻力模型对常加速度和变加速度情况下Rayleigh-Taylor不稳定性诱发的物质渗透边界的演化过程进行了计算,计算结果与实验吻合得较好,而且模型在宽广的密度比范围下的适用性强。这表明本研究中模型参数的选取、方程中现象学比例因子的添加和模型假设是合适的。尽管研究中发现模型在描述加速-减速-再加速情况下稳定的负加速度过程的特征上的不足,有待完善,但是,本文模型明显优于当前实际应用中所采用的经验公式。这些研究为将浮阻力模型应用到相关的工程设计提供了理论依据,从而大大推动与不稳定性诱发混合现象相关的工程领域的发展。

#### 参考文献:

- [1] Rayleigh L. Investigation of the character of the equilibrium of an incompressible heavy fluid of variable density [C]. Proceedings of the London Mathematical Society, 1883, 14: 170—177.
- [2] Taylor G. The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes I [C]. Proceedings of the Royal Society of London, 1950, A201: 192—196.
- [3] Hansom J C V, Rosen P A, Goldack T J, Oades K, Fieldhouse P, Cowperthwaite N, Youngs D L, Mawhinney N, Baxter A J. Radiation driven planar foil instability and mix experiments at the AWE HELEN laser [J]. Laser and Particle Beams, 1990, 8(1): 51—71.
- [4] Sharp D H. An overview of Rayleigh-Taylor instability [J]. Physica D, 1984, 12: 3—18.
- [5] Young Y N, Tufo H, Dubey A, Rosner R. On the miscible Rayleigh-Taylor instability: two and three dimensions [J]. Journal of Fluid Mechanics, 2001, 447: 377—408.
- [6] Dalziel S B, Linden P F, Youngs D L. Self-similarity and internal structure of turbulence induced by Rayleigh-Taylor instability [J]. Journal of Fluid Mechanics, 1999, 399: 1—48.
- [7] Youngs D L. Three-dimensional numerical simulation of turbulent mixing by Rayleigh-Taylor instability [J]. Physics of Fluids A, 1991, 3(5): 1312—1320.
- [8] Hecht J, Alon U and Shvarts D. Potential flow models of Rayleigh-Taylor and Richtmyer-Meshkov bubble fronts [J]. Physics of Fluids, 1994, 6(12): 4019—4030.

- [9] Alon U, Hecht J, Ofer D, Shvarts D. Power laws and similarity of Rayleigh-Taylor and Richtmyer-Meshkov mixing fronts at all density ratios [J]. *Physical Review Letters*, 1995, 74(4): 534—537.
- [10] Shvarts D, Alon U, Ofer D, McCrory R J, Verdon C P. Nonlinear evolution of multimode Rayleigh-Taylor instability in two and three dimensions [J]. *Physics of Plasmas*, 1995, 2(6): 2465—2472.
- [11] Dimonte G. Nonlinear evolution of the Rayleigh-Taylor and Richtmyer-Meshkov instabilities [J]. *Physics of Plasmas*, 1999, 6(5): 2009—2015.
- [12] Oron D, Arazi L, Kartoon D, Rikanati A, Alon U, Shvarts D. Dimensionality dependence of the Rayleigh-Taylor and Richtmyer-Meshkov instability late-time scaling laws [J]. *Physics of Plasmas*, 2001, 8(6): 2883—2889.
- [13] Zhou Y, Robey H F, Buckingham A C. Onset of turbulence in accelerated high-Reynolds-number flow [J]. *Physical Review E*, 2003, 67: 056305.
- [14] 杨玟, 王丽丽, 张树道. Rayleigh-Taylor 不稳定性诱导湍流混合的数值模拟[J]. *工程力学*, 2011, 28(6): 236—241.  
Yang Min, Wang Lili, Zhang Shudao. Numerical simulation of turbulent mixing induced by Rayleigh-Taylor instability [J]. *Engineering Mechanics*, 2011, 28(6): 236—241. (in Chinese)
- [15] 杨玟, 王丽丽, 张树道, 何长江, 杭义洪. 用湍流模型研究 Richtmyer-Meshkov 不稳定性诱导的湍流混合[J]. *空气动力学学报*, 2010, 28(1): 119—123.  
Yang Min, Wang Lili, Zhang Shudao, He Changjiang, Hang Yihong. The study of turbulent mixing induced by Richtmyer-Meshkov instability using turbulence model [J]. *Acta Aerodynamica Sinica*, 2010, 28(1): 119—123. (in Chinese)
- [16] Chen B. Modeling chaotic mixing [J]. *Nuclear Weapons Journal*, 2010, 1: 8—17.
- [17] Layzer D. On the gravitational instability of two superposed fluids in a gravitational field [J]. *Astrophysics Journal*, 1955, 122: 1—12.
- [18] Dimonte G, Schneider M. Density ratio dependence of Rayleigh-Taylor mixing for sustained and impulsive acceleration histories [J]. *Physics of Fluids*, 2000, 12(2): 304—321.
- [19] Dimonte G, Schneider M. Turbulent Rayleigh-Taylor instability experiments with variable acceleration [J]. *Physical Review E*, 1996, 54(4): 3740—3743.
- [20] Dimonte G, Ramaprabhu P, Andrews M. Rayleigh-Taylor instability with complex acceleration history [J]. *Physical Review E*, 2007, 76: 046313.
- [21] Dimonte G, Youngs D L, Dimitis A, et al. A comparative study of the turbulent Rayleigh-Taylor instability using high-resolution three-dimensional numerical simulations: the Alpha-Group collaboration [J]. *Physics of Fluids*, 2004, 16(5): 1668—1693.

(上接第 379 页)

- [4] Barshinger J, Avioli Jr M J. Guided wave resonance tuning for pipe inspection [J]. *Journal of Pressure Vessel Technology*, 2002, 124: 303—310.
- [5] 他得安, 王威琪, 汪源源, 等. 管道导波检测中激发频率的选择及灵敏度分析[J]. *无损检测*, 2005, 27(2): 83—86.  
Ta Dean, Wang Weiqi, Wang Yuanyuan, et al. Excitation frequency choice and sensitivity analysis in the inspection of pipe with ultrasonic guided waves [J]. *Nondestructive Testing*, 2005, 27(2): 83—86. (in Chinese)
- [6] Silk M, Bainton K. The propagation in metal tubing of ultrasonic wave modes equivalent to Lamb waves [J]. *Ultrasonics*, 1979, 17(1): 11—19.
- [7] Lowe M J S. Matrix techniques for modeling ultrasonic waves in multilayered media [J]. *IEEE Transactions on Ultrasonics*, 1995, 42(4): 525—542.
- [8] Tang L, Liu S. Guided elastic waves in infinite free-clamped hollow cylinders [J]. *Progress in Natural Science*, 2009, 19(3): 313—320.
- [9] 他得安, 刘镇清. 超声导波频散特性与管材内径-壁厚比的关系[J]. *复旦学报(自然科学版)*, 2003, 42(1): 7—13.  
Ta Dean, Liu Zhenqing. Relationship between dispersive characteristics of ultrasonic guided waves and inner-radius-thickness ratio of pipes [J]. *Journal of Fudan University (Natural Science)*, 2003, 42(1): 7—13. (in Chinese)
- [10] 郑祥明, 赵玉珍, 史耀武. 兰姆波频散曲线的计算[J]. *无损检测*, 2003, 25(2): 66—68.  
Zheng Xiangming, Zhao Yuzhen, Shi Yaowu. Calculation for lamb wave dispersion curves [J]. *Nondestructive Testing*, 2003, 25(2): 66—68. (in Chinese)
- [11] Demenko A, Ma Eika L. Calculation of Lamb waves dispersion curves in multi-layered planar structures [J]. *Ultrasonics*, 2002, 44(3): 15—17.