文章编号: 1000-5641(2011)03-0059-09

非凸集值优化问题弱 Benson 真有效解的高阶最优性条件

王开荣, 王义利, 曹 伟

(重庆大学 数学与统计学院, 重庆 401331)

摘要: 首先, 给出了一些必要的基本概念和重要引理. 其次, 讨论了高阶广义切集的一些重要性质. 最后, 利用这些性质和 Gerstewitz 非凸分离泛函, 在目标映射以及约束映射没有任何凸性假设的条件下, 获得了带广义不等式约束的集值优化问题弱 Benson 真有效解的高阶必要和充分最优性条件. 同时, 给出例子说明了所获得的结果推广了文献中的相应结果.

关键词: 集值优化; 广义高阶相依集; 非凸分离泛函; Benson 真有效解; 高阶最优性条件

中图分类号: O224 **文献标识码**: A **DOI:** 10.3969/j.issn.1000-5641.2011.03.009

Higher order optimality conditions for weakly Benson proper efficient solutions of nonconvex set-valued optimization problems

WANG Kai-rong, WANG Yi-li, CAO Wei

(*College of Mathematics and Statistics, Chongqing University, Chongqing* 401331, *China*)

Abstract: Firstly, some necessarily basic concepts and an important lemma were given. Secondly, some important properties of generalized higher-order tangent sets were discussed. Finally, by virtue of those properties and the Gerstewitz's nonconvex separation functional, necessary and sufficient optimality conditions were obtained for weakly Benson proper efficient solutions of set-valued optimization problems without any convexity assumption on objective and constraint mappings. Moreover, two examples were given to show that the result obtained is a generalization to the corresponding results in literatures.

Key words: set-valued optimization; generalized higher order contingent sets; non-convex separation functional; Benson proper efficient solutions; higher-order optimality conditions

0 引 言

集值优化在经济、管理、工程等领域有广泛应用[1,2]. 集值优化问题的最优性条件也一直是众多学者研究的热点. 盛宝怀等[3]借助于 Clarke 切锥, 用集值映射的上图引入了一

收稿日期: 2010-05

基金项目：重庆市科委资助项目(2008BB0346)

第一作者：王开荣, 男, 副教授, 研究方向为最优化理论及应用. E-mail: kairong@cqu.edu.cn.

第二作者：王义利, 男, 硕士研究生, 研究方向为集值优化理论及应用. E-mail: wangyili1015@163.com

种关于集值映射的 Clarke 切导数, 建立了弱 Benson 真有效意义下约束向量集值优化最优性的一种 Fritz-John 条件. 盛宝怀和刘三阳[4]利用集值映射的切导数讨论了集值优化问题的一阶 Fritz-John 型最优性条件. 最近, 王其林[5]利用文献 [6] 中引入的高阶切集和凸集分离定理, 在锥似凸假设下, 获得了带广义不等式约束的集值优化问题 Benson 真有效解的高阶 Fritz-John 型必要和充分最优性条件. 李声杰等[7]研究了文献 [6] 中定义的高阶切集和高阶导数的一些基本性质, 并借助于高阶导数获得了集值优化问题的高阶必要和充分最优性条件. 王其林和李声杰[8]引入了集值映射的高阶广义相依和邻接导数的概念, 并利用其建立了约束集值优化问题在 Henig 真有效意义下的高阶 Kuhn-Tucker 型必要和充分最优性条件. 李声杰等[9]讨论了 Gerstewitz 非凸分离函数的单调性、连续性等性质, 并利用它得到了非凸集值优化问题的最优性条件.

本文基于文献[3–5, 8, 10]所做的工作, 分别在凸与非凸的假设下, 探讨了高阶广义相依和邻接集的一些性质, 利用高阶广义相依(邻接)集以及 Gerstewitz 非凸分离函数, 获得了带广义不等式约束的非凸集值优化问题的高阶必要和充分最优性条件.

1 预备知识

假设 X, Y, Z 均为实赋范线性空间, $C\subset Y$, $D\subset Z$ 分别为 Y, Z 中内部非空的点闭凸锥, Y^* 为 Y 的拓扑对偶空间. 锥 C 的对偶锥定义为 $C^+=\{f\in Y^*|f(c)\geqslant 0,\forall c\in C\}$.

设 $M\subset Y$ 为非空, 集合 M 的生成锥定义为$\mathrm{cone}\,(M)=\{ty|t\geqslant 0,y\in M\}$. 设 E 是 X 的非空子集, $F:E\to 2^Y$, $G:E\to 2^Z$ 均为非空集值映射, 映射 F 的定义域和图像分别定义为$\mathrm{dom}(F)=\{x\in E|F(x)\neq\phi\}$, $\mathrm{Graph}(F)=\{(x,y)\in E\times Y|x\in E,y\in F(x)\}$. 集值映射 $F_+:E\to 2^Y$ 定义为 $F_+(x)=F(x)+C,\forall x\in\mathrm{dom}(F)$. 给定 $e\in\mathrm{int}\,C$ 及$a\in Y$, 则Gerstewitz非凸分离泛函 $\xi_{ea}:Y\to\mathbf{R}$ 定义为

$$\xi_{ea}(y)=\min\{t\in\mathbf{R}|y\in a+te-C\},\forall y\in Y.$$

引理 1.1[9,10] 设$k\in\mathrm{int}\,C$, $a\in Y$, $y\in Y$, $r\in\mathbf{R}$. 则

(i) $\xi_{ka}(y)>r\Leftrightarrow y\notin a+rk-C$;

(ii) 存在 $\Gamma\subset C_k^+=\{f\in Y^*|f(c)\geqslant 0,\forall c\in C,f(k)=1\}$, 使得

$$C=\{y\in Y|f(y)\geqslant 0,\forall f\in\Gamma\},\quad \xi_{ka}(y)=\sup_{f\in\Gamma}\{f(y)-f(a)\}.$$

关于 Gerstewitz 非凸分离泛函性质的详细讨论, 可参见文献[9-11].

定义 1.1[3] 设 $M\subset Y$, $y\in M$ 叫做集合 M 的弱 Benson 真有效点, 如果满足

$$(-\mathrm{int}\,C)\cap\mathrm{clcone}(M+C-y_0)=\phi.$$

集合 M 的所有弱 Benson 真有效点组成的集合记作 $P_w\min[M,C]$.

本文讨论如下的集值优化问题:

$$(\mathrm{GSVOP})\begin{cases}\min F(x),\\ s.t.G(x)\cap(-D)\neq\phi,x\in E.\end{cases}$$

令集合 $K:=\{x\in E|G(x)\cap(-D)\neq\phi\}$. 设 $x_0\in K,y_0\in F(x_0)$, 称 (x_0,y_0) 为问题 (GSVOP) 的弱 Benson 真有效解, 如果 $y_0\in F(x_0)\cap P_w\min[F(K),C]$.

2　高阶切集

设 m 为一正整数, X 为赋以距离 d 的赋范空间, $K \subset X$ 为 X 的子集, 则点 x 到集合 K 的距离定义为: $d(x,K)=\inf\limits_{y\in K}\{d(x,y)\}$. 特别地, 令 $d(x,\phi)=+\infty$.

定义 2.1[8]　设 $K\subset X, x\in K, \upsilon_i\in X(i=1,2,\cdots,m-1)$, 则

(i) 集合 $G-T_k^{(m)}(x,\upsilon_1,\cdots,\upsilon_{m-1})=\limsup\limits_{h\to 0^+}\dfrac{cone(K-x)-h\upsilon_1-\cdots-h^{m-1}\upsilon_{m-1}}{h^m}$

$$=\left\{y\in X|\liminf_{h\to 0^+} d\left(y,\frac{cone(K-x)-h\upsilon_1-\cdots-h^{m-1}\upsilon_{m-1}}{h^m}\right)=0\right\}$$

称为集合 K 在点 x 处关于 $\upsilon_1,\cdots,\upsilon_{m-1}$ 的 m 阶广义相依集.

(ii) 集合 $G-T_k^{b(m)}(x,\upsilon_1,\cdots,\upsilon_{m-1})=\liminf\limits_{h\to 0^+}\dfrac{cone(K-x)-h\upsilon_1-\cdots-h^{m-1}\upsilon_{m-1}}{h^m}$

$$=\left\{y\in X|\lim_{h\to 0^+} d\left(y,\frac{cone(K-x)-h\upsilon_1-\cdots-h^{m-1}\upsilon_{m-1}}{h^m}\right)=0\right\}$$

称为集合 K 在点 x 处关于 $\upsilon_1,\cdots,\upsilon_{m-1}$ 的 m 阶广义邻接集.

命题 2.1　若 $K\subset X$ 为凸集, 且 $x\in K$, $\upsilon_i\in K(i=1,2,\cdots,m-1)$, 则

$$\begin{aligned}&G-T_k^{b(m)}(x,\upsilon_1-x,\cdots,\upsilon_{m-1}-x)=G-T_k^{(m)}(x,\upsilon_1-x,\cdots,\upsilon_{m-1}-x)\\&=cl\left(\cup_{h>0}\frac{cone(K-x)-h(\upsilon_1-x)-\cdots-h^{m-1}(\upsilon_{m-1}-x)}{h^m}\right).\end{aligned}$$

证　明　由 m 阶广义相依集及邻接集的定义易得

$$\begin{aligned}&G-T_k^{b(m)}(x,\upsilon_1-x,\cdots,\upsilon_{m-1}-x)\subseteq G-T_k^{(m)}(x,\upsilon_1-x,\cdots,\upsilon_{m-1}-x)\\&\subseteq cl\left(\bigcup_{h>0}\frac{cone(K-x)-h(\upsilon_1-x)-\cdots-h^{m-1}(\upsilon_{m-1}-x)}{h^m}\right)\end{aligned}$$

于是只需证对任意的 $u_0\in cl\left(\cup_{h>0}\dfrac{cone(K-x)-h(\upsilon_1-x)-\cdots-h^{m-1}(\upsilon_{m-1}-x)}{h^m}\right)$, 有

$$u_0\in G-T_k^{b(m)}(x,\upsilon_1-x,\cdots,\upsilon_{m-1}-x).$$

由 $u_0\in cl\left(\cup_{h>0}\dfrac{cone(K-x)-h(\upsilon_1-x)-\cdots-h^{m-1}(\upsilon_{m-1}-x)}{h^m}\right)$ 可知, 对任一取定的 $\varepsilon>0$, 设 B 为单位球,则存在 $y\in cone(K-x)$ 及 $\beta>0$, 使得

$$u_0-\frac{y-\beta(\upsilon_1-x)-\cdots-\beta^{m-1}(\upsilon_{m-1}-x)}{\beta^m}\in\varepsilon B. \tag{2.1}$$

令 $u=\dfrac{y-\beta(\upsilon_1-x)-\cdots-\beta^{m-1}(\upsilon_{m-1}-x)}{\beta^m}$, $h\in(0,\mu)$, 其中 $0<\mu\leqslant\beta$. 则有

$$\begin{aligned}&h(\upsilon_1-x)+\cdots+h^{m-1}(\upsilon_{m-1}-x)+h^m u\\&=h(\upsilon_1-x)+\cdots+h^{m-1}(\upsilon_{m-1}-x)+h^m\frac{y-\beta(\upsilon_1-x)-\cdots-\beta^{m-1}(\upsilon_{m-1}-x)}{\beta^m}\\&=h\left(1-\left(\frac{h}{\beta}\right)^{m-1}\right)(\upsilon_1-x)+\cdots+h^{m-1}\left(1-\frac{h}{\beta}\right)(\upsilon_{m-1}-x)+\frac{h^m}{\beta^m}y.\end{aligned}$$

由 K 为凸集, 知 $K-x$ 为凸集, 从而 $cone(K-x)$ 为凸锥. 故有

$$h\left(1-\left(\frac{h}{\beta}\right)^{m-1}\right)(\upsilon_1-x)+\cdots+h^{m-1}\left(1-\frac{h}{\beta}\right)(\upsilon_{m-1}-x)+\frac{h^m}{\beta^m}y\in cone(K-x).$$

从而有 $h(\upsilon_1-x)+\cdots+h^{m-1}(\upsilon_{m-1}-x)+h^m u\in cone(K-x)$. 故有

$$u\in\frac{cone(K-x)-h(\upsilon_1-x)-\cdots-h^{m-1}(\upsilon_{m-1}-x)}{h^m} \tag{2.2}$$

从而由式 (2.1), (2.2) 以及 m 阶广义邻接集的定义,可得

$$u_0\in G-T_k^{b(m)}(x,\upsilon_1-x,\cdots,\upsilon_{m-1}-x).\ (\text{证毕})$$

命题 2.2 若 $K\subset X$ 为凸集, 且 $x\in K$, $\upsilon_i\in X(i=1,2,\cdots,m-1)$, 则集合 $G-T_k^{b(m)}(x,\upsilon_1,\cdots,\upsilon_{m-1})$ 为凸集.

证 明 (1) 若$G-T_k^{b(m)}(x,\upsilon_1,\cdots,\upsilon_{m-1})=\phi$, 命题结论显然成立.

(2) 若 $G-T_k^{b(m)}(x,\upsilon_1,\cdots,\upsilon_{m-1})\neq\phi$. 设 $u_1,u_2\in G-T_k^{b(m)}(x,\upsilon_1,\cdots,\upsilon_{m-1})$, 则由 m 阶广义邻接集的定义可得, 对任意的序列 $\{h_n\}$, 满足 $h_n\to 0^+(n\to\infty)$, 存在序列 $\{w_n^1\}$ 和 $\{w_n^2\}$, 使得 $w_n^1\to u_1, w_n^2\to u_2$, 且有

$$h_n\upsilon_1+\cdots+h_n^{m-1}\upsilon_{m-1}+h_n^m w_n^1\in cone(K-x),\ \ h_n\upsilon_1+\cdots+h_n^{m-1}\upsilon_{m-1}+h_n^m w_n^2\in cone(K-x).$$

又由 K 为凸集, 可知 $K-x$ 为凸集, 从而 $cone(K-x)$ 为凸锥. 故对 $\forall\lambda\in(0,1)$, 有 $h_n\upsilon_1+\cdots+h_n^{m-1}\upsilon_{m-1}+h_n^m(\lambda w_n^1+(1-\lambda)w_n^2)\in cone(K-x)$. 从而有

$$\lambda w_n^1+(1-\lambda)w_n^2\in\frac{cone(K-x)-h_n\upsilon_1-\cdots-h_n^{m-1}\upsilon_{m-1}}{h_n^m}.$$

于是, 由 m 阶广义邻接集的定义可得, $\lambda u_1+(1-\lambda)u_2\in G-T_k^{b(m)}(x,\upsilon_1,\cdots,\upsilon_{m-1})$. 故 $G-T_k^{b(m)}(x,\upsilon_1,\cdots,\upsilon_{m-1})$ 为凸集. (证毕)

推论 2.1 如果 $K\subset X$ 为凸集, 且 $x\in K$, $\upsilon_i\in K(i=1,2,\cdots,m-1)$, 那么集合 $G-T_k^{(m)}(x,\upsilon_1-x,\cdots,\upsilon_{m-1}-x)$ 和 $cl(\bigcup\limits_{h>0}\frac{cone(K-x)-h(\upsilon_1-x)-\cdots-h^{m-1}(\upsilon_{m-1}-x)}{h^m})$ 也均为凸集.

证 明 由命题 2.1 和命题 2.2 可直接得证.

命题 2.3 若 $K\subset X$ 为凸集, 且 $x\in K$, $\upsilon_i\in K(i=1,2,\cdots,m-1)$, 那么

$$cone(K-x)\subset G-T_k^{b(m)}(x,\upsilon_1-x,\cdots,\upsilon_{m-1}-x).$$

证 明 由命题 2.1 易知

$$G-T_k^{b(m)}(x,\upsilon_1-x,\cdots,\upsilon_{m-1}-x)=cl\left(\bigcup_{h>0}\frac{cone(K-x)-h(\upsilon_1-x)-\cdots-h^{m-1}(\upsilon_{m-1}-x)}{h^m}\right).$$

取 $h>0$, 则对任意的 $y\in cone(K-x)$, 可得

$$h(\upsilon_1-x)+\cdots+h^{m-1}(\upsilon_{m-1}-x)+h^m y\in cone(K-x).$$

从而有 $y \in \dfrac{cone(K-x)-h(\upsilon_1-x)-\cdots-h^{m-1}(\upsilon_{m-1}-x)}{h^m}$

$$\subset cl(\bigcup_{h>0}\frac{cone(K-x)-h(\upsilon_1-x)-\cdots-h^{m-1}(\upsilon_{m-1}-x)}{h^m})$$

$$=G-T_k^{b(m)}(x,\upsilon_1-x,\cdots,\upsilon_{m-1}-x)$$

由 y 的任意性, 可得 $cone(K-x)\subset G-T_k^{b(m)}(x,\upsilon_1-x,\cdots,\upsilon_{m-1}-x)$. (证毕)

推论 2.2　如果 $K\subset X$ 为凸集, 且 $x\in K$, $\upsilon_i\in K(i=1,2,\cdots,m-1)$, 则

$$cone(K-x)\subset G-T_k^{(m)}(x,\upsilon_1-x,\cdots,\upsilon_{m-1}-x).$$

证　明　由命题 2.1 和命题 2.3 可直接得证.

下面给出高阶广义相依(邻接)集的重要性质.

命题 2.4　设 $x_0\in E$, $y_0\in F(x_0)$, $z_0\in G(x_0)$, $(\upsilon_i,\omega_i)\in C\times D(i=1,2,\cdots,m-1)$. 则

$$(F-y_0,G-z_0)(x)\subset G-T^{(m)}_{(F_+,G_+)(E)}(y_0,z_0,\upsilon_1,\omega_1,\cdots,\upsilon_{m-1},\omega_{m-1}),\ \ \forall x\in E.$$

证　明　由 $x_0\in E$, $y_0\in F(x_0)$, $z_0\in G(x_0)$, 知对 $\forall x\in E, y\in F(x), z\in G(x)$, 有

$$(y-y_0,z-z_0)\in(F_+-y_0,G_+-z_0)(E).$$

任取序列 $\{h_n\}$, 满足 $h_n\to 0^+(n\to\infty)$, 可得

$$h_n^m(y-y_0,z-z_0)\in cone((F_+-y_0,G_+-z_0)(E)).$$

又由 $(\upsilon_i,\omega_i)\in C\times D(i=1,2,\cdots,m-1)$, 以及 C、D 均为凸锥, 可得

$$h_n(\upsilon_1,\omega_1)+h_n^2(\upsilon_2,\omega_2)+\cdots+h_n^{m-1}(\upsilon_{m-1},\omega_{m-1})\in C\times D.$$

于是有

$$(y_n,z_n):=h_n(\upsilon_1,\omega_1)+\cdots+h_n^{m-1}(\upsilon_{m-1},\omega_{m-1})+h_n^m(y-y_0,z-z_0)\in cone((F_+-y_0,G_+-z_0)(E))$$

所以有,

$$(y-y_0,z-z_0)=\frac{(y_n,z_n)-h_n(\upsilon_1,\omega_1)-\cdots-h_n^{m-1}(\upsilon_{m-1},\omega_{m-1})}{h_n^m}.$$

故由 m 阶广义相依集的定义, 可得

$$(y-y_0,z-z_0)\in G-T^{(m)}_{(F_+,G_+)(E)}(y_0,z_0,\upsilon_1,\omega_1,\cdots,\upsilon_{m-1},\omega_{m-1}).\ (证毕)$$

与命题 2.4 的证明过程类似, 可得下面的结论.

命题 2.5　设 $x_0\in E$, $y_0\in F(x_0)$, $z_0\in G(x_0)$, $(\upsilon_i,\omega_i)\in C\times D(i=1,2,\cdots,m-1)$. 则

$$(F-y_0,G-z_0)(x)\subset G-T^{b(m)}_{(F_+,G_+)(E)}(y_0,z_0,\upsilon_1,\omega_1,\cdots,\upsilon_{m-1},\omega_{m-1}),\forall x\in E.$$

注 2.1　在命题 2.4 和命题 2.5 中, 集值映射 F 和 G 没有任何凸性假设.

3 高阶最优性条件

Wang[5]在目标映射以及约束映射均为锥似凸映射的条件下, 给出了带广义不等式约束的集值优化问题 (GSVOP)Benson 真有效解的高阶 Fritz-John 型必要和充分最优性条件. 本小节在目标映射以及约束映射没有任何凸性假设的条件下, 讨论集值优化问题弱 Benson 真有效解的高阶必要和充分最优性条件.

在本节中, 设 $(x_0,y_0)\in \mathrm{Graph}\,(F)$, $z_0\in G(x_0)\cap(-D),(e,k)\in(\mathrm{int}\,C,\mathrm{int}\,D),(F-y_0,G-z_0)(x)=(F(x),G(x))-(y_0,z_0),(F-y_0,G-z_0)(E)=\underset{x\in E}{\cup}(F-y_0,G-z_0)(x)$.

定理 3.1 假设下面的条件成立:

(i) $(\upsilon_i,\omega_i)\in(-C)\times(-D),i=1,2,\cdots,m-1$;

(ii) (x_0,y_0) 是问题 (GSVOP) 的一个弱 Benson 真有效解.

则 $\exists(L,T)\subset(C^+\times D^+)\backslash(\theta_{Y^*},\theta_{Z^*}),s.t.f(e)+g(k)=1,\forall(f,g)\in(L,T)$.

$$C:=\{x\in Y|f(x)\geqslant 0,\forall f\in L\},D:=\{x\in Z|g(x)\geqslant 0,\forall g\in T\}.$$

且

$$\sup_{(f,g)\in(L,T)}\{f(y)+g(z)\}\geqslant 0,\forall(y,z)\in G-T^{(m)}_{(F,G)(E)}(y_0,z_0,\upsilon_1,\omega_1,\cdots,\upsilon_{m-1},\omega_{m-1}).$$

证 明 由条件 (ii) 以及弱 Benson 真有效解的定义, 可知

$$(-\mathrm{int}\,C)\cap clcone(F(K)+C-y_0)=\phi. \tag{3.1}$$

先证 $$G-T^{(m)}_{(F,G)(E)}(y_0,z_0,\upsilon_1,\omega_1,\cdots,\upsilon_{m-1},\omega_{m-1})\cap(-\mathrm{int}\,C,-\mathrm{int}\,D)=\phi. \tag{3.2}$$

假设式 (3.2) 不成立, 则存在 $(\bar{y},\bar{z})$, $s.t.(\bar{y},\bar{z})\in G-T^{(m)}_{(F,G)(E)}(y_0,\ z_0,\ \upsilon_1,\ \omega_1,\ \cdots,\ \upsilon_{m-1},\ \omega_{m-1})$, 且

$$(\bar{y},\bar{z})\in(-\mathrm{int}\,C,\ -\mathrm{int}\,D). \tag{3.3}$$

由 m 阶广义相依集的定义知, 存在序列 $\{h_n\}$, 满足 $h_n\to 0^+(n\to\infty)$, 和序列 $\{(y_n,z_n)\}$, 满足$(y_n,z_n)\in cone((F-y_0,G-z_0)(E))$, 使得

$$\frac{(y_n,z_n)-h_n(\upsilon_1,\omega_1)-\cdots-h_n^{m-1}(\upsilon_{m-1},\omega_{m-1})}{h_n^m}\to(\bar{y},\bar{z}). \tag{3.4}$$

由式 (3.3), (3.4) 可知, 存在充分大的 N, 当 $n>N$ 时, 有

$$\frac{(y_n,z_n)-h_n(\upsilon_1,\omega_1)-\cdots-h_n^{m-1}(\upsilon_{m-1},\omega_{m-1})}{h_n^m}\in(-\mathrm{int}\,C,-\mathrm{int}\,D).$$

从而, 当 $n>N$ 时, 有

$$y_n-h_n\upsilon_1-\cdots-h_n^{m-1}\upsilon_{m-1}\in-\mathrm{int}\,C,z_n-h_n\omega_1-\cdots-h_n^{m-1}\omega_{m-1}\in-\mathrm{int}\,D. \tag{3.5}$$

又因为 $h_n>0,\upsilon_1,\cdots,\upsilon_{m-1}\in-C,\omega_1,\cdots,\omega_{m-1}\in-D$, 从而有

$$h_n\upsilon_1+\cdots+h_n^{m-1}\upsilon_{m-1}\in-C,h_n\omega_1+\cdots+h_n^{m-1}\omega_{m-1}\in-D.$$

于是, 由式 (3.5) 可得, 当 $n>N$ 时, 有

$$y_n \in -\mathrm{int}\, C, \quad z_n \in -\mathrm{int}\, D. \tag{3.6}$$

又因为 $(y_n, z_n) \in cone((F-y_0, G-z_0)(E))$, 故存在 $\bar{x}_n \in E, \varepsilon_n \geqslant 0$, 使得

$$(\bar{y}_n, \bar{z}_n) \in (F-y_0, G-z_0)(\bar{x}_n), \quad \varepsilon_n(\bar{y}_n, \bar{z}_n) = (y_n, z_n).$$

由式 (3.6) 可知, 当 $n>N$ 时, 有 $\varepsilon_n > 0$, 及

$$\bar{y}_n \in -\mathrm{int}\, C, \quad \bar{z}_n \in -\mathrm{int}\, D. \tag{3.7}$$

又由 $(\bar{y}_n, \bar{z}_n) \in (F-y_0, G-z_0)(\bar{x}_n)$, 可知存在 $(\bar{y}'_n, \bar{z}'_n) \in (F, G)(\bar{x}_n)$, 使得

$$\bar{y}_n = \bar{y}'_n - y_0, \quad \bar{z}_n = \bar{z}'_n - z_0,$$

由式 (3.7) 以及 $z_0 \in -D$, 可知 $\bar{z}'_n = \bar{z}_n + z_0 \in -\mathrm{int}\, D - D = -\mathrm{int}\, D$. 从而当 $n>N$ 时, 有 $\bar{z}'_n \in G(\bar{x}_n) \cap (-D)$, 故 $\bar{x}_n \in K$. 从而

$$\bar{y}_n = \bar{y}'_n - y_0 \in F(\bar{x}_n) - y_0 \subset clcone(F(K) + C - y_0).$$

又由式 (3.7) 知, $\bar{y}_n = \bar{y}'_n - y_0 \in -\mathrm{int}\, C$, 从而有

$$\bar{y}_n \in (-\mathrm{int}\, C) \cap clcone(F(K) + C - y_0).$$

这就与式 (3.1) 矛盾, 故式 (3.2) 成立. 于是由引理1.1知, $\exists (L, T) \subset (C^+ \times D^+) \backslash (\theta_{Y^*}, \theta_{Z^*}), s.t.$

$$\begin{aligned} &f(e) + g(k) = 1, \forall (f, g) \in (L, T), \\ &C := \{x \in Y | f(x) \geqslant 0, \forall f \in L\}, D := \{x \in Z | g(x) \geqslant 0, \forall g \in T\}. \end{aligned}$$

且

$$\sup_{(f,g)\in(L,T)} \{f(y) + g(z)\} \geqslant 0, \forall (y, z) \in G - T^{(m)}_{(F,G)(E)}(y_0, z_0, \upsilon_1, \omega_1, \cdots, \upsilon_{m-1}, \omega_{m-1}). \quad \text{(证毕)}$$

注 3.1 在定理3.1中, 由于集值映射 F, G 没有任何凸性要求, 因此, 定理 3.1 推广了文献 [3] 中的定理 4.1, 文献 [4] 中的定理 1 和文献 [5] 中的定理 4.1. 下面给出例子, 来解释之.

例 3.1 假设 $X=Y=Z=R$, $E=Q$, $C=D=R_+$, $e=\frac{1}{2}$, $k=\frac{1}{2}$. 设 $F(x)=\{y \in R | y \geqslant x^{\frac{4}{3}}\}$, $\forall x \in E$, $G(x) = \{z \in R | z \geqslant x^{\frac{6}{5}} - 2\}$, $\forall x \in E$. 考虑集值优化问题:

$$\text{(GSVOP)} \begin{cases} \min & F(x), \\ s.t. & G(x) \cap (-D) \neq \phi, x \in E. \end{cases}$$

取 $(x_0, y_0) = (0, 0) \in \mathrm{Graph}\,(F)$, $z_0 = -2 \in G(x_0) \cap (-D)$. 由弱 Benson 真有效解的定义, 易知 (x_0, y_0) 是上述集值优化问题的一个弱Benson真有效解. 取 $(\upsilon, \omega) = (0, 0)$, 则

$$G - T^{(2)}_{(F,G)(E)}(y_0, z_0, \upsilon, \omega) = \{(y, z) | y \geqslant 0, z \geqslant 0\}.$$

取 $f(x) = \frac{2x}{3}$, $g(x) = \frac{4x}{3}$, 且令 $L = \{f\} \subset C^+ \backslash \{\theta_{Y^*}\}, T = \{g\} \subset D^+ \backslash \{\theta_{Z^*}\}$, 则有

$$C = R^+ = \{x \in Y | f(x) \geqslant 0, \forall f \in L\}, \quad D = R^+ = \{x \in Z | g(x) \geqslant 0, \forall g \in T\}.$$

易知, $f(e)+g(k)=f(\frac{1}{2})+g(\frac{1}{2})=1,\ \forall(f,g)\in(L,T)\backslash(\theta_{Y^*},\ \theta_{Z^*})$. 且有

$$\sup_{(f,g)\in(L,T)}\{f(y)+g(z)\}\geqslant 0,\quad \forall(y,z)\in G-T^{(2)}_{(F,G)(E)}(y_0,z_0,\upsilon,\omega).$$

从而定理 3.1 给出的二阶必要最优性条件成立.

由于定义域 E 不是凸集, 从而集值映射 F、G 在 E 上不是锥凸的, 于是文献 [4] 中定理 1 的条件不满足, 因此, 文献 [4] 中定理 1 对于本例是不适用的.

例 3.2 假设 $X=Y=Z=R^2, C=D=R^2_+, e=(\frac{1}{2},\frac{1}{2}), k=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $E=\{(x_1,x_2)\in R^2|x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0, x_1^2+x_2^2=1\}$. 设 $F(x_1,x_2)=\{(x_1,x_2),(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})\},\forall(x_1,x_2)\in E$. $G(x_1,x_2)=\{(0,0)\},\forall(x_1,x_2)\in E$. 考虑集值优化问题:

$$(\text{GSVOP})\begin{cases}\min & F(x),\\ s.t. & G(x)\cap(-D)\neq\phi, x\in E.\end{cases}$$

令 $(x_0,y_0)=\{(0,1),(0,1)\}\in \text{Graph}\ (F), z_0=(0,0)\in G(x_0)\cap(-D)$. 由弱 Benson 真有效解的定义知, (x_0,y_0) 是问题 $(GSVOP)$ 的一个弱 Benson 真有效解.

取 $(\upsilon,\omega)=((0,0),(0,0))$, 则有

$$G-T^{(2)}_{(F,G)(E)}(y_0,z_0,\upsilon,\omega)=\{((x_1,x_2),(0,0))|x_1\geqslant 0, x_2\geqslant -x_1\}.$$

这里, 可取 $f_1(x_1,\ x_2)=x_1,\ f_2(x_1,\ x_2)=x_2,\ g_1(x_1,\ x_2)=x_2,\ g_2(x_1,\ x_2)=x_1$. 且令

$$L=\{f_1,f_2\}\subset C^+\backslash\{\theta_{Y^*}\},\quad T=\{g_1,g_2\}\subset D^+\backslash\{\theta_{Z^*}\}.$$

则有

$$C=R^2_+=\{(x_1,x_2)\in Y|f(x_1,x_2)\geqslant 0,\forall f\in L\}, D=R^2_+=\{(y_1,y_2)\in Z|g(y_1,y_2)\geqslant 0,\forall g\in T\}.$$

易知, $f(e)+g(k)=f(\frac{1}{2},\frac{1}{2})+g(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=1,\forall(f,g)\in(L,T)\backslash(\theta_{Y^*},\theta_{Z^*})$. 且有

$$\sup_{(f,g)\in(L,T)}\{f(x_1,x_2)+g(y_1,y_2)\}\geqslant 0,\quad \forall((x_1,x_2),(y_1,y_2))\in G-T^{(2)}_{(F,G)(E)}(y_0,z_0,\upsilon,\omega).$$

从而定理 3.1 给出的二阶最优性必要条件成立.

由于 $F(E)+\text{int}\ R^2_+$ 不是凸集, 从而 F 不是 R^2_+ -似凸的. 因此文献 [3] 中定理 4.1 和文献 [5] 中定理 4.1 的条件不满足, 所以它们对于本例是不适用的.

定理 3.2 假设下面的条件成立.

(i) $(\upsilon_i,\omega_i)\in C\times D,\quad i=1,2,\cdots,m-1$;

(ii) $\exists(L,T)\subset(C^+\times D^+)\backslash(\theta_{Y^*},\theta_{Z^*}), s.t. f(e)+g(k)=1,\forall(f,g)\in(L,T)$;

$C:=\{x\in Y|f(x)\geqslant 0,\forall f\in L\},\quad D:=\{x\in Z|g(x)\geqslant 0,\forall g\in T\}$;

$\sup\limits_{(f,g)\in(L,T)}\{f(\theta_Y)+g(-z_0)\}=0,\quad \sup\limits_{(f,g)\in(L,T)}\{f(y)+g(z)\}>0$,

$\forall(y,z)\in G-T^{(m)}_{(F_+,G_+)(E)}(y_0,z_0,\upsilon_1,\omega_1,\cdots,\upsilon_{m-1},\omega_{m-1})$. 则 $(x_0,\ y_0)$ 是问题 (GSVOP) 的一个弱 Benson 真有效解.

证　明 假设 (x_0,y_0) 不是问题 (GSVOP) 的一个弱 Benson 真有效解, 则存在 $x^*\in K$, 使得 $(-\text{int}\ C)\cap\ clcone\ (F(x^*)+C-y_0)\neq\phi$.

故存在 $y^*\in F(x^*)$, $c\in C$, 以及 $\varepsilon>0$, 使得 $\varepsilon(y^*+c-y_0)\in -\mathrm{int}\,C$, 从而有 $y^*+c-y_0\in -\mathrm{int}\,C$. 又由 $x^*\in K$ 可知, 存在 $z^*\in G(x^*)\cap(-D)$, 使得

$$f(y^*-y_0)+g(z^*)\leqslant 0,\quad \forall(f,g)\in(L,T). \tag{3.8}$$

故由式 (3.8) 以及 $\sup\limits_{(f,g)\in(L,T)}\{f(\theta_Y)+g(-z_0)\}=0$, 可得

$$\begin{aligned}\sup_{(f,g)\in(L,T)}\{f(y^*-y_0)+g(z^*-z_0)\}\leqslant &\sup_{(f,g)\in(L,T)}\{f(y^*-y_0)+g(z^*)\}+\\ &\sup_{(f,g)\in(L,T)}\{f(\theta_Y)+g(-z_0)\}\leqslant 0.\end{aligned} \tag{3.9}$$

由命题 2.4 知, $(y^*-y_0,\ z^*-z_0)\in G-T^{(m)}_{(F_+,G_+)(E)}(y_0,\ z_0,\ \upsilon_1,\ \omega_1,\ \cdots,\ \upsilon_{m-1},\omega_{m-1})$. 则由(ii)得

$$\sup_{(f,g)\in(L,T)}\{f(y^*-y_0)+g(z^*-z_0)\}>0.$$

这与式 (3.9) 矛盾, 从而 (x_0,y_0) 是问题 (GSVOP) 的一个弱 Benson 真有效解. (证毕)

定理 3.3　假设下面的条件成立.

(i) $(\upsilon_i,\omega_i)\in C\times D,\quad i=1,2,\cdots,m-1$;

(ii) $\exists(L,T)\subset(C^+\times D^+)\backslash(\theta_{Y^*},\theta_{Z^*}), s.t.$

$f(e)+g(k)=1,\forall(f,g)\in(L,T)$;

$C:=\{x\in Y|f(x)\geqslant 0,\forall f\in L\},\quad D:=\{x\in Z|g(x)\geqslant 0,\forall g\in T\}$;

$\sup\limits_{(f,g)\in(L,T)}\{f(\theta_Y)+g(-z_0)\}=0,\qquad \sup\limits_{(f,g)\in(L,T)}\{f(y)+g(z)\}>0,$

$\forall(y,z)\in G-T^{b(m)}_{(F_+,G_+)(E)}(y_0,z_0,\upsilon_1,\omega_1,\cdots,\upsilon_{m-1},\omega_{m-1})$. 则 (x_0,y_0) 是问题 (GSVOP) 的一个弱 Benson 真有效解.

证　明　由命题 2.5 和定理 3.2 可直接得证. (证毕)

[参　考　文　献]

[1] JAHN J. Vector Optimization-Theory Applications and Extensions[M]. Berlin: Springer-verlag, 2004.

[2] LUC D T. Theory of Vector Optimization[M]. Berlin: Springer-verlag, 1989.

[3] 盛宝怀, 刘三阳, 熊胜君. Benson真有效意义下向量集值优化的广义Fritz-John条件[J]. 经济数学, 2000, 17(1): 59-65. SHENG B H, LIU S Y, XIONG S J. The generalized optimality Fritz-John conditions of vector optimization of set-valued maps with weak Benson proper efficiency. Mathematics Eccnomics.

[4] SHENG B H, LIU S Y. On the generalized Fritz John optimality conditions of vector optimization with set-valued maps under Benson proper efficiency[J]. Appl Math Mechanics, 2002, 23(12): 1444-1451.

[5] WANG Q L. Higher-order Fritz John type optimality conditions for Benson proper efficient solutions in set-valued optimization problems[J]. Operations Research Transactions, 2009, 13(3): 1-9.

[6] AUBIN J P, FRANKOWSKA H. Set-Valued Analysis[M]. Boston: Birkhauser, 1990.

[7] LI S J, TEO K L, YANG X Q. Higher-order optimality conditions for set-valued optimization[J]. J Optim Theory Appl, 2008, 137(3): 533-553.

(下转第 99 页)

REFERENCES

[1] QIU S, SHEN G Y. Cohomology of graded Lie algebras of Cartan type of characteristic p[J]. Abh Math Semin Univ Hamb, 1987, 57: 139-156.
[2] SHU B. On the cohomology of generalized restricted Lie algebras[J]. Chinese Ann Math Ser B, 1998, 19: 421-432.
[3] FARNSTEINER R, STRADE H. Shapiro's lemma and its consequences in the cohomology theory of modular Lie algebras[J]. Math Z, 1991, 206: 153-168.
[4] SHEN G Y. Graded modules of graded Lie algebras of Cartan type, I[J]. Scientica Sinica, 1986, 29: 570-581.
[5] FARNSTEINER R. Extension functors of modular Lie algebras[J]. Math Ann, 1990, 288: 713-730.
[6] ZHANG C W. Representations of the restricted Lie algebras of the Cartan type[J]. J Algebra, 2005, 290(2): 408-432.
[7] YAO Y F, SHU B. Irreducible representations of the special algebras in prime characteristic[J]. Contemp Math, 2009, 478: 273-295.
[8] SHU B, ZHANT C W. Restricted representations of the witt superalgebras[J]. J Algebra, 2010, 324: 652-672.
[9] STRADE H, FARNSTEINER R. Modular Lie Algebras and Their Representations[M]. New York: Marcel Dekker, 1988.
[10] SHU B. The generalized restricted representations of graded Lie algebras of cartan type[J]. J Algebra, 1997, 194: 157-177.
[11] SHU B. Generalized restricted Lie algebras and representations of the Zassenhaus algebra[J]. J Algebra, 1998, 204: 549-572.

(上接第 67 页)

[8] WANG Q L, LI S J. Generalized higher-order optimality conditions for set-valued optimization under Henig efficiency[J]. Numer Funct Anal Optim, 2009, 30(7-8): 849-869.
[9] LI S J, YANG X Q, CHEN G Y. Nonconvex vector optimization of set-valued mappings[J]. J Math Anal Appl, 2003, 283: 337-350.
[10] CERTH C, WEIDNER P. Nonconvex separation theorems and some applications in vector optimization[J]. J Optim Theory Appl, 1990, 67: 297-320.
[11] CHEN G Y, GOH C J, YANG X Q. Vector network equilibrium problems and nonlinear scalarization methods[J]. Math Meth Oper Res , 1999, 49: 239-253.

(上接第 84 页)

[11] FAN Y Z, TAM B S, ZHOU J. Maximizing spectral radius of unoriented Laplacian matrix over bicyclic graphs of a given order[J]. Linear Multilinear Algebra, 2008, 56(4): 381-397.
[12] FENG L H, GUI G. The signless laplacian spectral radius of unicyclic graphs with graph constraints[J]. KYUNG-POOK Math J, 2009, 49: 123-131.
[13] FENG L H. The signless laplacian spectral radius for bicyclic graphs with k Pendant Vertices[J]. KYUNGPOOK Math J, 2010, 50: 109-116.
[14] DAS K C. A characterization on graphs which achieve the upper bound for the largest Laplacian eigenvalue of graphs[J]. Linear Algebra and its Applications, 2004, 376: 173-186.
[15] OLIVEIRA C S, DE LIMA L S, DE ABRREU N M M, et al. Bounds on the index of the signless Laplacian of a graph[J]. Discrete Appl Math, 2010, 158(4): 355-360.
[16] HONG Y, ZHANG X D. Sharp upper and lower bounds for largest eigenvalue of the Laplacian matrices of trees[J]. Discrete Math, 2005, 296: 187-197.