

文章编号: 1000-4750(2013)04-0380-05

# 多体系统动力学微分-代数方程广义- $\alpha$ 投影法

丁洁玉, 潘振宽

(青岛大学信息工程学院, 青岛 266071)

**摘 要:** 高效、稳定的微分-代数方程数值求解方法是多体系统动力学领域的关键问题之一。该文针对多体系统动力学指标 3 微分-代数方程, 对目前多体系统动力学中引入的隐式时域逐步积分方法进行了深入研究, 提出了适用于一般质量矩阵的广义- $\alpha$ -S 法, 并结合约束投影方法, 构造了广义- $\alpha$ -S 投影法。该方法既能较好地保持系统总能量, 又能较高程度地同时满足位移约束、速度级约束和加速度级约束, 并且在步长较大时可稳定求解, 计算效率较高。

**关键词:** 多体系统动力学; 微分-代数方程; 广义- $\alpha$  方法; 约束投影法; 广义- $\alpha$ -S 投影法

**中图分类号:** O313.7    **文献标志码:** A    **doi:** 10.6052/j.issn.1000-4750.2011.11.0799

## GENERALIZED- $\alpha$ PROJECTION METHOD FOR DIFFERENTIAL-ALGEBRAIC EQUATIONS OF MULTIBODY DYNAMICS

DING Jie-yu, PAN Zhen-kuan

(College of Information Engineering, Qingdao University, Qingdao 266071, China)

**Abstract:** An efficient and stable numerical method of differential-algebraic equations (DAEs) is one of the key problems in multi-body dynamics. For index 3 DAEs with a general mass matrix, a generalized- $\alpha$ -S method is presented after the deep study of implicit time-stepping methods introduced into multi-body dynamics. Based on the projection method of constraints, the generalized- $\alpha$ -S projection method is developed, which can keep the total energy of the system, the displacement constraints, as well as the velocity and acceleration constraints in higher degree of accuracy. With a longer time step, the method shows good stability to obtain higher computation efficiency.

**Key words:** multi-body dynamics; differential-algebraic equations; generalized- $\alpha$  method; constraints projection; generalized- $\alpha$ -S projection method

随着科学技术的发展, 航空、车辆等领域对复杂机械系统的设计、分析、仿真等提出了新的更高的要求, 其中关键问题是由多个刚体或弹性体通过一定方式相互连接构成的多体系统的建模和数值计算。多体系统建模得到的动力学方程通常为指标 3 的微分-代数方程组(DAEs), 这类方程的数值求解方法是目前计算多体系统动力学的难点问题。

自从 Cardona 和 Geradin<sup>[1]</sup>将结构动力学经典的 Newmark 方法以及在此基础上提出的 HHT 方法引入到完整约束系统动力学方程求解以来, 许多学者

对多体系统动力学方程求解的时域逐步积分方法进行了研究。其中 Yen 等<sup>[2]</sup>针对指标 2 微分/代数方程, 结合投影法和 HHT 方法提出了 DAE  $\alpha$  方法。Arnold 和 Brüls<sup>[3]</sup>在结构力学广义- $\alpha$  方法<sup>[4]</sup>的基础上讨论了完整约束系统动力学方程广义- $\alpha$  方法的收敛性, 指出其具有二阶收敛性, 最近又给出了李群广义- $\alpha$  方法<sup>[5]</sup>。Negrut 等<sup>[6-8]</sup>对 HHT 方法展开了一系列研究, 并在文献[8]中综述了多体系统动力学六类低阶数值积分方法, 其中包括 Newmark 法、HHT-I3 方法、HHT-ADD 方法、HHT-SI2 方法。姚

收稿日期: 2011-11-25; 修改日期: 2012-03-17

基金项目: 国家自然科学基金项目(11002075, 10972110)

通讯作者: 丁洁玉(1978-), 女, 山东青岛人, 副教授, 博士, 硕导, 从事数值计算、优化设计研究(E-mail: djy@qdu.edu.cn).

作者简介: 潘振宽(1966-), 男, 山东昌邑人, 教授, 博士, 硕导, 院长, 从事多体系统动力学研究(E-mail: zkpan@qdu.edu.cn).

廷强等<sup>[9]</sup>针对指标 1 超定微分-代数方程(ODAEs), 结合隐式数值积分解耦法, 提出新型广义- $\alpha$  方法。马秀腾等<sup>[10]</sup>将  $\theta_1$  方法拓展到指标 3DAEs 和指标 2ODAEs 的求解中, 与广义- $\alpha$  方法等进行了比较。

上述研究指出, 约束系统广义- $\alpha$  方法(涵盖了 HHT 等方法)具有二阶收敛性, 可以有效应用于多体系统动力学方程求解。但从约束违约角度来看, 目前的方法最多只能保持位移约束和速度级约束, 加速度级约束违约情况仍然存在。本文通过对隐式时域逐步积分方法的深入研究, 设计能同时满足位移约束、速度级约束和加速度级约束方程的 DAEs 求解方法, 并提高能量保持精度。研究结果可应用于车辆、航空等领域的动力学仿真及分析。

### 1 隐式时域逐步积分法

多体系统动力学方程通常为指标 3 微分-代数方程组(DAEs):

$$\begin{cases} \mathbf{M}(\mathbf{q}, t)\ddot{\mathbf{q}} + \Phi_{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) \\ \Phi(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $\Phi$  为广义坐标  $\mathbf{q}$  的约束方程;  $\Phi_{\mathbf{q}}$  为约束方程的 Jacobi 矩阵;  $\boldsymbol{\lambda}$  为 Lagrange 乘子。

使用经典 Newmark 方法求解方程组(1)的基本思路是采用等距步长  $h$  离散时间区间  $[t_0, t_N]$ , 设时间段  $[t_i, t_{i+1}]$ ,  $0 \leq i \leq N-1$  内的加速度为常数, 取:

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) = (1-\gamma)\ddot{\mathbf{q}}_i + \gamma\ddot{\mathbf{q}}_{i+1}, \quad 0 \leq \gamma \leq 1 \quad (2)$$

则

$$\dot{\mathbf{q}}_{i+1} = \dot{\mathbf{q}}_i + h[(1-\gamma)\ddot{\mathbf{q}}_i + \gamma\ddot{\mathbf{q}}_{i+1}] \quad (3)$$

再取

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) = (1-2\beta)\ddot{\mathbf{q}}_i + 2\beta\ddot{\mathbf{q}}_{i+1}, \quad 0 \leq \beta \leq 1/2 \quad (4)$$

可得

$$\mathbf{q}_{i+1} = \mathbf{q}_i + h\dot{\mathbf{q}}_i + \frac{h^2}{2}[(1-2\beta)\ddot{\mathbf{q}}_i + 2\beta\ddot{\mathbf{q}}_{i+1}] \quad (5)$$

结合式(1)在  $[t_i, t_{i+1}]$  上的离散形式:

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{i+1}\ddot{\mathbf{q}}_{i+1} + \Phi_{\mathbf{q}_{i+1}}^T \boldsymbol{\lambda}_{i+1} - \mathbf{F}_{i+1} = \mathbf{0} \\ \Phi(\mathbf{q}_{i+1}, t_{i+1}) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (6)$$

可以迭代求解。该方法为隐式时域逐步积分方法, 其中  $\beta$ ,  $\gamma$  为控制参数, 当  $\gamma=1/2$ ,  $\beta=1/4$  时, 为平均常加速度法; 当  $\gamma=1/2$ ,  $\beta=1/6$  时, 为线性加速度法。直接使用该方法求解多体系统动力学方程, 其稳定性较差, 在此基础上加以改进的 HHT-I3 方法也可以使用常数加速度思路进行推导。若  $\mathbf{M}$  为常质量矩阵且可逆, 则由式(6)可得:

$$\ddot{\mathbf{q}}_{i+1} = (\mathbf{M}_{i+1})^{-1}(\mathbf{F}_{i+1} - \Phi_{\mathbf{q}_{i+1}}^T \boldsymbol{\lambda}_{i+1}) \quad (7)$$

设  $\ddot{\mathbf{q}}_{i+1}$  取如下常值:

$$\ddot{\mathbf{q}}_{i+1} = (1-\alpha)\ddot{\mathbf{q}}_i + \alpha\ddot{\mathbf{q}}_{i+1}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (8)$$

由式(7)可得:

$$\mathbf{M}_{i+1}\ddot{\mathbf{q}}_{i+1} + (1-\alpha)(\Phi_{\mathbf{q}_i}^T \boldsymbol{\lambda}_i - \mathbf{F}_i) + \alpha(\Phi_{\mathbf{q}_{i+1}}^T \boldsymbol{\lambda}_{i+1} - \mathbf{F}_{i+1}) = \mathbf{0} \quad (9)$$

此处  $\ddot{\mathbf{q}}_{i+1}$  取值与 Newmark 方法中常数加速度取值形式相对应, 所得式(9)与常见 HHT-I3 方法稍有不同, 参数可取  $2/3 \leq \alpha \leq 1$ ,  $\gamma = -1/2 + \alpha$ ,  $\beta = \alpha^2/4$ 。当  $\alpha=1$  时, 退化为 Newmark 方法。进一步地, 若  $\ddot{\mathbf{q}}_{i+1}$  取值如下:

$$\ddot{\mathbf{q}}_{i+1} = (1-\alpha_m)\ddot{\mathbf{q}}_i + \alpha_m\ddot{\mathbf{q}}_{i+1}, \quad 0 \leq \alpha_m \leq 1 \quad (10)$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_{i+1} = (1-\alpha_f)\ddot{\mathbf{q}}_i + \alpha_f\ddot{\mathbf{q}}_{i+1}, \quad 0 \leq \alpha_f \leq 1 \quad (11)$$

由式(7)可得:

$$(1-\alpha_m)\mathbf{M}_i\ddot{\mathbf{q}}_i + \alpha_m\mathbf{M}_{i+1}\ddot{\mathbf{q}}_{i+1} + (1-\alpha_f)(\Phi_{\mathbf{q}_i}^T \boldsymbol{\lambda}_i - \mathbf{F}_i) + \alpha_f(\Phi_{\mathbf{q}_{i+1}}^T \boldsymbol{\lambda}_{i+1} - \mathbf{F}_{i+1}) = \mathbf{0} \quad (12)$$

此即广义- $\alpha$  方法, 此处  $\ddot{\mathbf{q}}_{i+1}$  取值形式也与 Newmark 方法中对应, 式(12)与常见广义- $\alpha$  方法也稍有不同。参数可取  $\gamma = 1/2 + \alpha_m - \alpha_f$ ,  $\beta = (1 + \alpha_m - \alpha_f)^2/4$ ,  $1 - \alpha_m = \frac{2\rho - 1}{\rho + 1}$ ,  $1 - \alpha_f = \frac{\rho}{\rho + 1}$ ,  $\rho \in [0, 1]$ 。当  $\alpha_m = \alpha_f = 1$  时, 退化为 Newmark 方法。当  $\alpha_m = 1$ ,  $\alpha_f = \alpha$  时, 退化为 HHT-I3 方法。

由上述推导过程可知, 目前多体动力学中常用的 HHT-I3 方法和广义- $\alpha$  方法可以求解  $\mathbf{M}$  为常质量矩阵的方程, 当  $\mathbf{M}$  为非常质量矩阵时, 上述方法不适用。本文将式(11)看作  $\ddot{\mathbf{q}}_{i+1}$  在  $(1-\alpha_f)t_i + \alpha_f t_{i+1}$  时刻的取值, 记为  $\ddot{\mathbf{q}}_{i+1-\alpha_f}$ , 其值由下式确定:

$$\mathbf{M}_{i+1-\alpha_f}\ddot{\mathbf{q}}_{i+1-\alpha_f} + \Phi_{\mathbf{q}_{i+1-\alpha_f}}^T \boldsymbol{\lambda}_{i+1-\alpha_f} - \mathbf{F}_{i+1-\alpha_f} = \mathbf{0} \quad (13)$$

记形如式(10)的  $\ddot{\mathbf{q}}_{i+1}$  为  $\ddot{\mathbf{q}}_{i+1-\alpha_m}$ , 与式(13)结合可得如下新的广义- $\alpha$  方法:

$$\mathbf{M}_{i+1-\alpha_f}\ddot{\mathbf{q}}_{i+1-\alpha_m} + \Phi_{\mathbf{q}_{i+1-\alpha_f}}^T \boldsymbol{\lambda}_{i+1-\alpha_f} - \mathbf{F}_{i+1-\alpha_f} = \mathbf{0} \quad (14)$$

该方法适用于一般质量矩阵  $\mathbf{M}$ , 以下称之为广义- $\alpha$ -S 方法, 其参数取值同广义- $\alpha$  方法。

### 2 使用约束投影的广义- $\alpha$ 方法

由于直接对指标 3 微分-代数方程(1)进行求解, 上述各种隐式时域逐步积分方法仅能使位移约束保持较高的精度, 而随着时间的增长, 速度级、加速度级约束违约现象较为严重。为了提高各级约

束保持的精度, 本文利用位移、速度、加速度等向各自约束方程的投影, 构造综合性的隐式时域逐步积分投影方法, 在迭代过程中强制其结果同时满足各级约束方程。

在  $t_{i+1}$  时刻, 定义  $\Omega_{q_{i+1}} = \{q_{i+1} | \Phi(q_{i+1}, t_{i+1}) = 0\}$ ,  $\tilde{q}_{i+1}$  为  $q_{i+1} \in \Omega_{q_{i+1}}$  的近似值, 将  $\tilde{q}_{i+1}$  向  $\Omega_{q_{i+1}}$  投影可得:

$$\begin{cases} q_{i+1} - \tilde{q}_{i+1} + \Phi_q^T(q_{i+1}, t_{i+1})\mu_{i+1} = 0 \\ \Phi(q_{i+1}, t_{i+1}) = 0 \end{cases} \quad (15)$$

同理, 设  $\Omega_{\dot{q}_{i+1}} = \{\dot{q}_{i+1} | \dot{\Phi}(\dot{q}_{i+1}, q_{i+1}, t_{i+1}) = 0\}$ , 将近似值  $\tilde{\dot{q}}_{i+1}$  向  $\Omega_{\dot{q}_{i+1}}$  投影可得:

$$\begin{cases} \dot{q}_{i+1} - \tilde{\dot{q}}_{i+1} + \Phi_q^T(q_{i+1}, t_{i+1})\nu_{i+1} = 0 \\ \dot{\Phi}(\dot{q}_{i+1}, q_{i+1}, t_{i+1}) = 0 \end{cases} \quad (16)$$

设  $\Omega_{\ddot{q}_{i+1}} = \{\ddot{q}_{i+1} | \ddot{\Phi}(\ddot{q}_{i+1}, \dot{q}_{i+1}, q_{i+1}, t_{i+1}) = 0\}$ , 将近似值  $\tilde{\ddot{q}}_{i+1}$  向  $\Omega_{\ddot{q}_{i+1}}$  投影可得:

$$\begin{cases} \ddot{q}_{i+1} - \tilde{\ddot{q}}_{i+1} + \Phi_q^T(q_{i+1}, t_{i+1})\omega_{i+1} = 0 \\ \ddot{\Phi}(\ddot{q}_{i+1}, \dot{q}_{i+1}, q_{i+1}, t_{i+1}) = 0 \end{cases} \quad (17)$$

将式(15)~式(17)与 Newmark 方法结合可构造如下 Newmark 投影法。

$$\begin{cases} M(\tilde{q}_{i+1}, t_{i+1})\tilde{\ddot{q}}_{i+1} + \Phi_q^T(\tilde{q}_{i+1}, t_{i+1})\lambda_{i+1} - F(\tilde{q}_{i+1}, \tilde{\dot{q}}_{i+1}, t_{i+1}) = 0 \\ \Phi(\tilde{q}_{i+1}, t_{i+1}) = 0 \\ q_{i+1} - \tilde{q}_{i+1} + \Phi_q^T(q_{i+1}, t_{i+1})\mu_{i+1} = 0 \\ \Phi(q_{i+1}, t_{i+1}) = 0 \\ \dot{q}_{i+1} - \tilde{\dot{q}}_{i+1} + \Phi_q^T(q_{i+1}, t_{i+1})\nu_{i+1} = 0 \\ \Phi_{q_{i+1}}\dot{q}_{i+1} + \Phi_{t_{i+1}} = 0 \\ \ddot{q}_{i+1} - \tilde{\ddot{q}}_{i+1} + \Phi_q^T(q_{i+1}, t_{i+1})\omega_{i+1} = 0 \\ \Phi_{q_{i+1}}\ddot{q}_{i+1} + (\Phi_{q_{i+1}}\dot{q}_{i+1})_{q_{i+1}} + 2\Phi_{q_{i+1}t_{i+1}}\dot{q}_{i+1} + \Phi_{t_{i+1}t_{i+1}} = 0 \end{cases} \quad (18)$$

其中:

$$\begin{cases} \tilde{\dot{q}}_{i+1} = \tilde{\dot{q}}_i + h[(1-\gamma)\tilde{\ddot{q}}_i + \gamma\tilde{\ddot{q}}_{i+1}] \\ \tilde{\ddot{q}}_{i+1} = \tilde{\ddot{q}}_i + h\tilde{\ddot{q}}_i + \frac{h^2}{2}[(1-2\beta)\tilde{\ddot{q}}_i + 2\beta\tilde{\ddot{q}}_{i+1}] \end{cases} \quad (19)$$

$$M = \begin{bmatrix} m_B & 0 & 0 & 0 & -m_B x_i \sin \theta & m_B \cos \theta \\ 0 & m_B & 0 & 0 & m_B x_i \cos \theta & m_B \sin \theta \\ 0 & 0 & m_A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_A & 0 & 0 \\ -m_B x_i \sin \theta & m_B x_i \cos \theta & 0 & 0 & \frac{1}{3} m_A l^2 + m_B x_i^2 & 0 \\ m_B \cos \theta & m_B \sin \theta & 0 & 0 & 0 & m_B \end{bmatrix} \quad (23)$$

与 Newmark 投影法类似, 将式(18)第一个式子改为:

$$M(\tilde{q}_{i+1}, t_{i+1})\tilde{\ddot{q}}_{i+1} + (1-\alpha)(\Phi_q^T(\tilde{q}_i, t_i)\lambda_i - F(\tilde{q}_i, \tilde{\dot{q}}_i, t_i)) + \alpha(\Phi_q^T(\tilde{q}_{i+1}, t_{i+1})\lambda_{i+1} - F(\tilde{q}_{i+1}, \tilde{\dot{q}}_{i+1}, t_{i+1})) = 0 \quad (20)$$

可得 HHT-I3 投影法。同理, 将式(18)第一个式子改为:

$$(1-\alpha_m)M(\tilde{q}_i, t_i)\tilde{\ddot{q}}_i + \alpha_m M(\tilde{q}_{i+1}, t_{i+1})\tilde{\ddot{q}}_{i+1} + (1-\alpha_f)(\Phi_q^T(\tilde{q}_i, t_i)\lambda_i - F(\tilde{q}_i, \tilde{\dot{q}}_i, t_i)) + \alpha_f(\Phi_q^T(\tilde{q}_{i+1}, t_{i+1})\lambda_{i+1} - F(\tilde{q}_{i+1}, \tilde{\dot{q}}_{i+1}, t_{i+1})) = 0 \quad (21)$$

可得广义- $\alpha$  投影法。将式(18)第一个式子改为:

$$M(\tilde{q}_{i+1-\alpha_f}, t_{i+1-\alpha_f})\tilde{\ddot{q}}_{i+1-\alpha_m} + \Phi_q^T(\tilde{q}_{i+1-\alpha_f}, t_{i+1-\alpha_f})\lambda_{i+1-\alpha_f} - F(\tilde{q}_{i+1-\alpha_f}, \tilde{\dot{q}}_{i+1-\alpha_f}, t_{i+1-\alpha_f}) = 0 \quad (22)$$

可得广义- $\alpha$ -S 投影法。

### 3 数值算例

下面以旋转杆-滑块系统为例, 对上述各方法进行验证和分析。如图 1 所示,  $OA$  为均质光滑刚性杆, 在水平面内绕  $O$  点转动, 长度为  $l$ , 质量为  $m_A$ ,  $B$  为滑块, 视为质点, 质量为  $m_B$ , 其上的弹簧刚度为  $k$ , 不计质量, 假设系统只受重力作用。

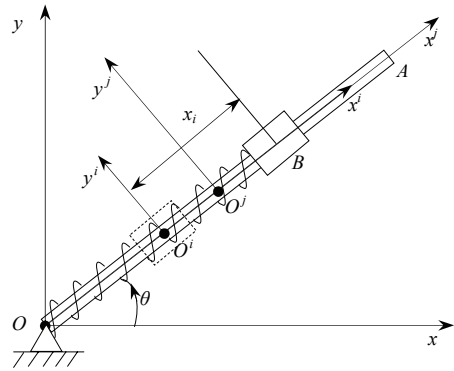


图 1 旋转杆-滑块系统

Fig.1 Rotary rod slider system

取状态变量  $q = [R_{x_i} \ R_{y_i} \ R_{x'_i} \ R_{y'_i} \ \theta \ x_i]^T$ , 则系统动力学方程为指标 3 微分-代数方程, 其广义质量矩阵为非常质量矩阵:

取  $l_1 = 2\text{m}$  ,  $m_A = 2\text{kg}$  ,  $m_B = 5\text{kg}$  ,  $k = 1000\text{N/m}$  , 步长  $h = 0.01\text{s}$  , 在指标 3 情况下, 使用 Newmark 法、HHT-I3 法、广义- $\alpha$  法、广义- $\alpha$ -S 法以及与其结合的投影法求解, 比较计算耗时和能量保持及各级约束保持情况, 所得结果见表 1。其中总时长为 300s, 参数取值为  $\gamma = 1/2$  ,  $\beta = 1/4$  ,  $\alpha = 1$  ,  $\rho = 1$ 。

从表 1 中可以看出,  $\alpha = 1$  时, HHT-I3 法退化为 Newmark 法, 稳定性较差, 但从图 2 可以看出, 发散前其能量没有产生耗散; 减小  $\alpha$  的取值可以提高稳定性, 但能量误差增大, 且速度、加速度级约束误差增大, 精度较低; 使用约束投影后可提高稳定性, 并提高各级约束保持精度, 但从图 3、图 4 可以看出, 系统能量产生耗散。  $\rho = 1$  时, 广义- $\alpha$  法稳定性也较差; 减小  $\rho$  的取值可提高稳定性, 但

能量误差增大, 且速度、加速度级约束误差增大, 精度较低; 使用约束投影后稳定性仍较差, 但相比相同  $\rho$  值的广义- $\alpha$  法, 其能量及各级约束精度均有提高, 特别是速度、加速度级约束提高程度较高; 并且从图 2 可以看出, 发散前其能量没有产生耗散。  $\rho = 1$  时, 本文提出的广义- $\alpha$ -S 法稳定性较高, 能量保持精度也较高, 且从图 3、图 4 可以看出, 在长时间仿真情况下该方法能量没有产生耗散; 但此时速度级约束和加速度级约束误差仍较大; 而广义- $\alpha$ -S 投影法的各级约束均保持较高精度(图 5), 其代价是能量保持精度的稍微降低及运行时间的增加, 但长时间仿真情况下能量仍不会产生耗散。随着  $\rho$  值的减小, 广义- $\alpha$ -S 法和广义- $\alpha$ -S 投影法中能量及各级约束误差均增大, 但相比相同  $\rho$  值的广义- $\alpha$  法和广义- $\alpha$  投影法, 其精度均有所提高。

表 1 时间步长  $h=0.01$  时各方法结果比较

Table 1 Comparison of the methods mentioned with time step  $h=0.01$

数值方法	耗时/s	$\max  \varepsilon(H) $	$\max  \varepsilon(\phi) $	$\max  \varepsilon(\dot{\phi}) $	$\max  \varepsilon(\ddot{\phi}) $
Newmark 法	约 15.52s 后发散				
Newmark 投影法	119.4656	0.0214	$3.8858 \times 10^{-16}$	$1.7764 \times 10^{-15}$	$1.1623 \times 10^{-9}$
HHT-I3 法, $\alpha=1$	约 15.52s 后发散				
HHT-I3 法, $\alpha=0.9$	128.3264	0.4519	$6.1062 \times 10^{-16}$	$3.2530 \times 10^{-4}$	0.0381
HHT-I3 法, $\alpha=2/3$	172.2719	1.4185	$5.5511 \times 10^{-16}$	$4.2121 \times 10^{-4}$	0.1267
HHT-I3 投影法, $\alpha=1$	122.2268	0.0214	$3.8858 \times 10^{-16}$	$1.7764 \times 10^{-15}$	$1.1623 \times 10^{-9}$
广义- $\alpha$ 法, $\rho=1$	约 15.52s 后发散				
广义- $\alpha$ 法, $\rho=0.9$	65.0212	0.2321	$5.5511 \times 10^{-16}$	$3.1850 \times 10^{-4}$	0.0204
广义- $\alpha$ 法, $\rho=0$	63.5080	4.4524	$5.5511 \times 10^{-16}$	0.0013	0.3808
广义- $\alpha$ 投影法, $\rho=1$	约 16.73s 后发散				
广义- $\alpha$ 投影法, $\rho=0.9$	118.9352	0.1488	$3.8858 \times 10^{-16}$	$1.7764 \times 10^{-15}$	$1.1559 \times 10^{-9}$
广义- $\alpha$ -S 法, $\rho=1$	65.4580	0.0029	$5.5511 \times 10^{-16}$	$3.1628 \times 10^{-4}$	0.0052
广义- $\alpha$ -S 法, $\rho=0.9$	54.8656	0.0044	$4.9960 \times 10^{-16}$	$3.1892 \times 10^{-4}$	0.0204
广义- $\alpha$ -S 投影法, $\rho=1$	128.3576	0.0033	$3.8858 \times 10^{-16}$	$1.3323 \times 10^{-15}$	$4.7479 \times 10^{-10}$
广义- $\alpha$ -S 投影法, $\rho=0.9$	122.6480	0.0893	$3.3307 \times 10^{-16}$	$1.7764 \times 10^{-15}$	$4.2654 \times 10^{-10}$

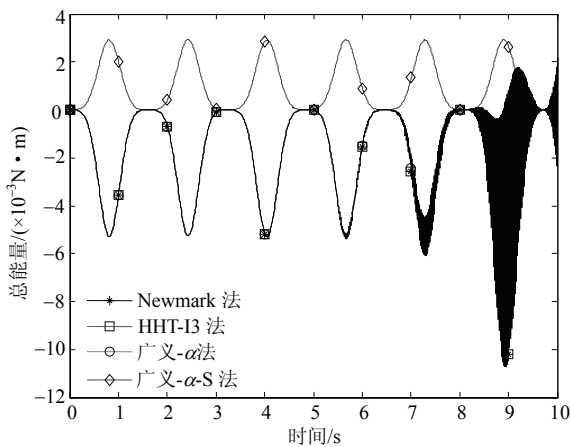


图 2 不使用约束投影各方法系统总能量比较( $t=10\text{s}$ ,  $h=0.01$ )

Fig.2 Comparison of total energy of different methods without projection ( $t=10\text{s}$ ,  $h=0.01$ )

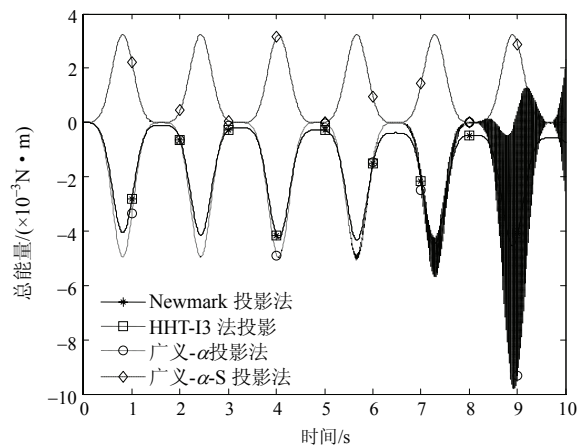


图 3 使用约束投影后各方法系统总能量比较( $t=10\text{s}$ ,  $h=0.01$ )

Fig.3 Comparison of total energy of different methods with projection ( $t=10\text{s}$ ,  $h=0.01$ )

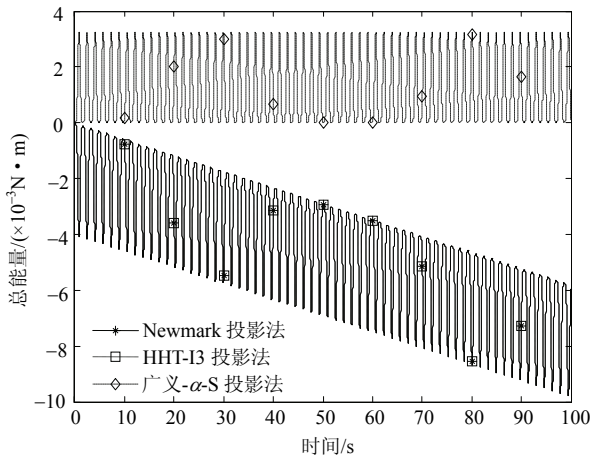


图4 使用约束投影后各方法系统总能量比较  
( $t=100s, h=0.01$ )

Fig.4 Comparison of total energy of different methods with projection ( $t=100s, h=0.01$ )

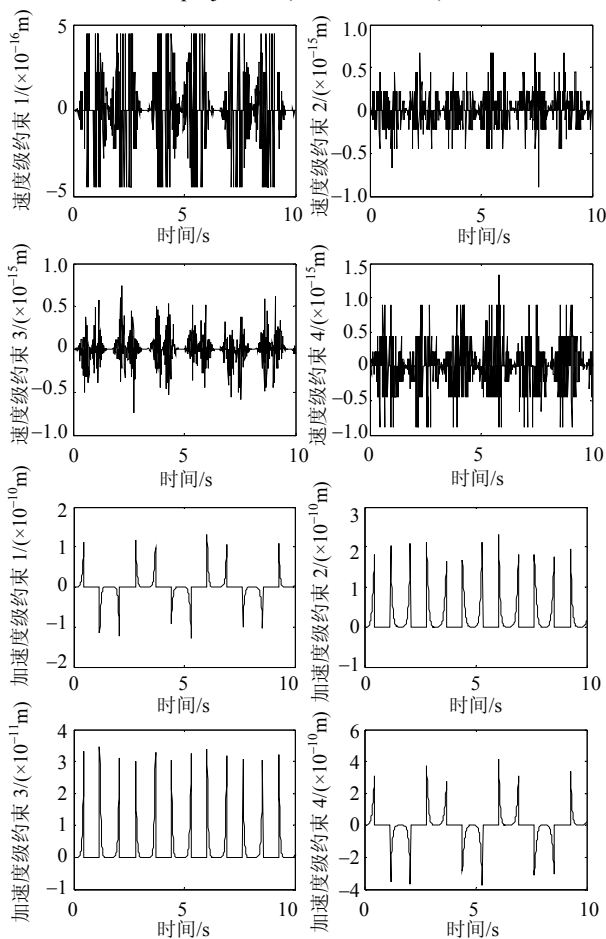


图5 广义- $\alpha$ -S 投影法速度、加速度级各约束误差  
( $t=10s, h=0.01$ )

Fig.5 Errors of each velocity and acceleration constraint of generalized- $\alpha$ -S projection method ( $t=10s, h=0.01$ )

## 4 结论

本文针对指标3的完整约束多体系统动力学微分-代数方程,结合约束投影方法提出了既能较好地

保持系统总能量,又能较高程度同时满足位移约束、速度级约束和加速度级约束方程的广义- $\alpha$ -S 投影法,该方法可方便地推广至非完整约束多体系统动力学。旋转杆-滑块系统数值算例验证了广义- $\alpha$ -S 投影法的有效性,并且在该方法中,当 $\rho=1$ 时,能量保持及各级约束保持精度最高。本文方法可应用于柔性或含碰撞的多体系统动力学仿真。

## 参考文献:

- [1] Cardona A, Geradin M. Time integration of the equations of motion in mechanism analysis [J]. Computers & Structures, 1989, 33(3): 801—820.
- [2] Yen J, Petzold L, Raha S. A time integration algorithm for flexible mechanism dynamics: The DAE  $\alpha$ -method [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1998, 158: 341—355.
- [3] Arnold M, Brüls O. Convergence of the generalized- $\alpha$  scheme for constrained mechanical systems [J]. Multibody System Dynamics, 2007, 6: 22—40.
- [4] Chung J, Hulbert G M. A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: The generalized- $\alpha$  method [J]. Journal of Applied Mechanics, 1993, 60(2): 371—375.
- [5] Brüls O, Cardona A, Arnold M. Lie group generalized- $\alpha$  time integration of constrained flexible multibody systems [J]. Mechanism and Machine Theory, 2012, 48: 121—137.
- [6] Negrut D, Rampalli R, Ottarsson G, Sajdak A. On an Implementation of the HHT method in the context of index 3 differential algebraic equations of multibody dynamics [J]. Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, 2007, 2(1): 73—85.
- [7] Jay L O, Negrut D. A second order extension of the generalized-alpha method for constrained systems in mechanics [C]// Bottasso C L, Masarati P, Trainelli L. Multibody Dynamics: Computational Methods and Applications. Berlin: Springer, 2008: 143—158.
- [8] Negrut D, Jay L O, Khude N. A discussion of low-order numerical integration formulas for rigid and flexible multibody dynamics [J]. Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, 2009, 4: 1—11.
- [9] 姚廷强, 迟毅林, 黄亚宇. 柔性多体系统动力学新型广义- $\alpha$  数值分析方法[J]. 机械工程学报, 2009, 45(10): 53—60.  
Yao Tingqiang, Chi Yilin, Huang Yayu. New generalized- $\alpha$  algorithms for multibody dynamics [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2009, 45(10): 53—60. (in Chinese)
- [10] 马秀腾, 翟彦博, 罗书强. 基于  $\theta_1$  方法的多体动力学数值算法研究[J]. 力学学报, 2011, 43(5): 931—938.  
Ma Xiuteng, Zhai Yanbo, Luo Shuqiang. Numerical method of multibody dynamics based on  $\theta_1$  method [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2011, 43(5): 931—938. (in Chinese)