

文章编号: 1000-4750(2013)04-0367-06

# 轴向运动超薄梁的非局部动力学分析

李 成, 姚林泉

(苏州大学城市轨道交通学院, 苏州 215006)

**摘 要:** 基于非局部弹性理论, 建立了两端受初始张力的轴向运动超薄梁横向振动的控制方程。与现有的一些仅在控制方程中考虑非局部效应的研究不同, 该文同时将非局部效应引入到两种典型的边界条件中, 考察了非局部参数对超薄梁横向振动行为尤其是固有频率和临界速度的影响。结果表明: 超薄性使得轴向运动梁的自由振动固有频率及临界速度降低, 经典弹性理论高估了纳米尺度结构的弯曲刚度, 轴向运动超薄梁的动力学行为存在明显的非局部尺寸效应。

**关键词:** 固体力学; 非局部理论; 超薄梁; 轴向运动; 固有频率; 临界速度

中图分类号: O313; O326 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2011.11.0797

## NONLOCAL DYNAMICAL ANALYSIS ON AXIALLY TRAVELLING ULTRA-THIN BEAMS

LI Cheng, YAO Lin-quan

(School of Urban Rail Transportation, Soochow University, Suzhou 215006, China)

**Abstract:** Based on the nonlocal elasticity theory, the equation of motion that governs the transverse vibration of an axially travelling ultra-thin beam subjected to initial axial tension is established. Unlike some previous work which only employs nonlocal effects in the governing equation, the nonlocal small scale parameter is also adopted into two typical kinds of boundary conditions to investigate the effects of nonlocal elasticity on vibration behaviors, including the natural frequency and critical velocity. It is shown that the ultra-thin character causes the natural frequency and critical velocity to decrease, and the classical elasticity theory overestimates the bending stiffness of nanostructures. The nonlocal size effects exist obviously in the dynamic properties of such an axially travelling ultra-thin beam.

**Key words:** solid mechanics; nonlocal theory; ultra-thin beam; axially travelling; natural frequency; critical velocity

轴向运动系统在工程中非常常见, 比如磁带、带锯、缆索、生产过程中的纸张、纤维等, 这些设备中有很多可以简化为两端受初始张力的轴向运动梁。考虑到轴向运动速度以及张力的影响, 此类系统往往会发生振动现象, 而其中又以横向振动为主, 纵向振动及扭转振动等相比可忽略不计。对于轴向运动宏观梁的动力学问题, 目前已有很多研究<sup>[1-4]</sup>。这些研究对于指导宏观尺度下的轴向运动

类梁结构有一定的工程意义, 但是却无法直接移植到小尺度的物体中, 这其中一个重要的原因就是尺寸效应问题。

很多研究表明, 小尺度下物体的力学性能与宏观尺度下有着很大的不同, 甚至完全相反, 因此这也给宏观经典力学在处理小尺度结构时带来了一定的困难。例如, 经典弹性理论给出的微裂纹尖端应力是奇异的, 这在物理意义上难以解释, 同时与

收稿日期: 2011-11-25; 修改日期: 2012-02-02

基金项目: 国家自然科学基金项目(11172192, 11202145)

通讯作者: 姚林泉(1961-), 男, 江苏苏州人, 教授, 博士, 从事计算力学、压电智能结构力学分析、有限元法及无网格法等方面的研究  
(E-mail: lqyao@suda.edu.cn).

作者简介: 李 成(1983-), 男, 江苏徐州人, 副教授, 博士, 从事车辆工程、微系统动力学等方面研究(E-mail: licheng@suda.edu.cn).

实验现象和原子模拟结果也背道而驰<sup>[5]</sup>。既然宏观尺度下的经典弹性理论在处理小尺度问题时, 显得无能为力, 在这种情况下, 各种新理论体系也就应运而生, 比如本文将要应用到的非局部理论<sup>[6]</sup>。该理论认为原子间的作用力是长程力, 而长程力的思想导致了某点的状态不仅取决于该点自身, 还与“长程”之外的其它各点都有关系。因此对于一点的应力状态, 不能再像经典连续介质力学那样, 简单地认为是同一点应变的函数, 而要将其视为连续体内所有点的应变的函数, 据此建立了非局部的本构关系, 代替了经典弹性力学中的广义 Hooke 定律。事实上, 经典弹性理论认为整体的任何一个组成部分的性能都等同于整体本身, 或者说可以从整体中任意取出一小部分, 取出的部分将保持整体的性质不变。非局部思想恰恰是质疑了这个观点。非局部理论最初由 Eringen 等人<sup>[5-6]</sup>建立, 随后虞吉林等发展了一种非局部的弹塑性连续体模型, 并研究了裂纹尖端的应力分布, 结果表明在非局部理论下裂纹尖端的应力奇异性不再出现<sup>[7]</sup>。

目前非局部弹性理论的发展日趋完善, 并广泛应用于位错力学、断裂力学、复合材料中波的传播、流体表面张力等研究中<sup>[8-16]</sup>。值得一提的是, 关于纳米结构中非局部效应问题, 目前存在两种观点。第一种观点认为非局部效应的增强将使得结构的刚度减小<sup>[8-12]</sup>, 但另一种观点却恰好相反, 即非局部效应的增大会引起结构刚度的增强, 从而导致了弯曲挠度的减小及自由振动的频率提高等<sup>[13-16]</sup>。最近有研究<sup>[17]</sup>从超薄结构的梁结构弯曲分析对上述两种观点做了对比, 证明两种可能性都是存在的, 纳米结构的刚度是增强还是削弱, 与结构表面原子的弛豫系数有关。本文将以刚度削弱非局部模型为基础, 对轴向运动超薄梁的动力学行为做一系统分析。轴向运动微梁有着广阔的应用前景, 比如微/纳机电系统中的微型传送带, 以及生物力学中红细胞等的运动传输都可近似认为是轴向运动超薄微结构。同时, 目前很多研究非局部力学的工作, 一般都是仅把非局部效应引入控制方程, 但对于边界条件, 却依然采用了经典连续力学的表达式<sup>[10,18]</sup>。然而, 在有些情况下, 边界条件所体现的非局部效应可能会更大些。因此, 在控制方程和边界条件中同时考虑非局部作用非常有必要。本文将考虑一个厚度在纳米量级的轴向运动超薄梁, 基于非局部弹性理论建立运动的控制方程, 结合具体的非局部边

界条件, 研究超薄梁横向振动的非局部效应。

## 1 非局部运动方程

考虑一个厚度  $H$  在纳米量级的超薄梁, 设其质量密度为  $\rho$ , 横截面积为  $A$ , 两端受初始张力  $P$ , 以速度  $U$  做轴向运动。轴向坐标  $X$  始于梁的最左端, 横向坐标  $Y$  与轴向垂直, 建立笛卡尔坐标系。分析横向振动时, 只考虑小变形, 由受力分析可得平衡方程为<sup>[1-3]</sup>:

$$PW_{,XX} - M_{,XX} - \rho A(W_{,TT} + 2UW_{,XT} + U^2W_{,XX}) = 0 \quad (1)$$

其中:  $W$  为横向振动位移;  $M$  为非局部弯矩; 右下标表示对物理量求相应次导数。

非局部理论认为, 连续体内一点的应力与其体内所有点的应变都有关系。根据 Eringen 提出的非局部弹性理论, 材料本构关系由下式确定<sup>[6]</sup>:

$$[1 - (e_0 a)^2 \nabla^2] t_{kl} = \lambda \varepsilon_{rr} \delta_{kl} + 2\mu \varepsilon_{kl} \quad (2)$$

其中:  $t_{kl}$  是非局部应力张量;  $\varepsilon_{kl}$  为应变张量;  $\lambda$  和  $\mu$  为材料的拉梅常数;  $e_0$  是一个依赖于各种不同材料的常数;  $a$  为材料的内特征长度(比如, 晶格常数、裂纹长度等)。非局部的弹性关系在一维情形下可以简化为:

$$\sigma - (e_0 a)^2 \sigma_{,XX} = \sigma' \quad (3)$$

其中:  $\sigma$  是非局部应力, 而  $\sigma'$  是经典应力。

对式(3)两端同时乘以  $-YdA$  并且同时对整个横截面积分得<sup>[8]</sup>:

$$M - (e_0 a)^2 M_{,XX} = EIW_{,XX} \quad (4)$$

其中:  $M = -\iint_A \sigma Y dA$ ;  $I = \iint_A Y^2 dA$  是截面对  $X$  的惯性矩。

由式(1)、式(4)两式可得轴向运动超薄梁横向振动的控制方程、非局部弯矩  $M$  及剪力  $S$  分别为:

$$PW_{,XX} - \rho A(W_{,TT} + 2UW_{,XT} + U^2W_{,XX}) - (e_0 a)^2 [PW_{,XXXX} - \rho A(W_{,XXTT} + 2UW_{,XXXT} + U^2W_{,XXXX})] = EIW_{,XXXX} \quad (5)$$

$$M = (e_0 a)^2 [PW_{,XX} - \rho A(W_{,TT} + 2UW_{,XT} + U^2W_{,XX})] + EIW_{,XX} \quad (6)$$

$$S = (e_0 a)^2 [PW_{,XXX} - \rho A(W_{,XTT} + 2UW_{,XXT} + U^2W_{,XXX})] + EIW_{,XXX} - PW_{,X} \quad (7)$$

采用如下的无量纲量:

$$x = XH^{-1}, \quad w = WH^{-1}, \quad u = U(\rho AH^2 / (EI))^{1/2},$$

$$t = T(EI / (\rho AH^4))^{1/2} \quad (8)$$

那么式(5)、式(6)、式(7)三式相应变为:

$$w_{,tt} + (u^2 - p)w_{,xx} + 2uw_{,xt} - \tau^2 w_{,xxt} - 2u\tau^2 w_{,xxx} - (u^2\tau^2 - p\tau^2 - 1)w_{,xxxx} = 0 \quad (9)$$

$$m = (p\tau^2 - u^2\tau^2 + 1)w_{,xx} - \tau^2 w_{,tt} - 2u\tau^2 w_{,xt} \quad (10)$$

$$s = (p\tau^2 - u^2\tau^2 + 1)w_{,xxx} - \tau^2 w_{,xxt} - 2u\tau^2 w_{,xxt} - pw_{,x} \quad (11)$$

其中,  $\tau = e_0 a / H$ 、 $p = PH^2 / (EI)$ 、 $m = MH / (EI)$ 、 $s = SH^2 / (EI)$  分别为非局部参数(内外特征长度之比)、无量纲的初始张力、非局部弯矩及剪力。

对于横向小变形的超薄梁,可设其横向位移为:

$$w(x,t) = \phi_n(x)e^{i\omega_n t}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (12)$$

其中:  $\phi_n(x)$  是主振型函数;  $\omega_n$  是无量纲化的固有频率;  $i$  是虚数单位。

把式(12)代入式(9)可得:

$$-\omega_n^2 \phi_n + 2i\omega_n u \phi_{n,x} + (u^2 + \tau^2 \omega_n^2 - p)\phi_{n,xx} - 2i\omega_n \tau^2 u \phi_{n,xxx} - (u^2 \tau^2 - p\tau^2 - 1)\phi_{n,xxxx} = 0 \quad (13)$$

既然式(13)是一个四阶的常微分方程,其解可以设为:

$$\phi_n(x) = C_{1n}(e^{i\lambda_{1n}x} + C_{2n}e^{i\lambda_{2n}x} + C_{3n}e^{i\lambda_{3n}x} + C_{4n}e^{i\lambda_{4n}x}) \quad (14)$$

这里  $C_{jn} (j = 1, 2, 3, 4)$  是 4 个积分常数,可由具体的边界条件定出,  $\lambda_{jn} (j = 1, 2, 3, 4)$  满足下面的色散方程,此方程也可将试解  $\phi_n(x) = C_n e^{i\lambda_n x}$  代入式(13)而得:

$$\omega_n^2 + 2\omega_n u \lambda_n + (u^2 + \tau^2 \omega_n^2 - p)\lambda_n^2 + 2\tau^2 \omega_n u \lambda_n^3 + (u^2 \tau^2 - p\tau^2 - 1)\lambda_n^4 = 0 \quad (15)$$

## 2 边界条件

为了具体探寻非局部效应对超薄梁动力学行为的影响,本节将讨论两种常见的边界条件,包括两端简支以及悬臂梁。此外,对无量纲化的运动速度以及初始张力的影响也将做出详细分析。

### 2.1 两端简支超薄梁

对于两端简支梁,要求其位移和弯矩在两端分别为零。如前所述,弯矩应该使用非局部表达式,而非经典形式(对经典形式即令非局部弯矩表达式中  $\tau = 0$ , 得  $m_c = w_{,xx}$ ), 如下式所示:

$$m(0,t) = 0, \quad m(1,t) = 0, \quad w(0,t) = 0, \quad w(1,t) = 0 \quad (16)$$

把式(10)代入式(16)得:

$$\begin{aligned} & (p\tau^2 - u^2\tau^2 + 1)w_{,xx}(0,t) - \tau^2 w_{,tt}(0,t) - 2u\tau^2 w_{,xt}(0,t) = 0, \\ & w(0,t) = 0, \\ & (p\tau^2 - u^2\tau^2 + 1)w_{,xx}(1,t) - \tau^2 w_{,tt}(1,t) - 2u\tau^2 w_{,xt}(1,t) = 0, \\ & w(1,t) = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

再把式(12)代入式(17),对所得结果考虑式(14)式,化简整理可得:

$$C_{1n} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{i\lambda_{1n}} & e^{i\lambda_{2n}} & e^{i\lambda_{3n}} & e^{i\lambda_{4n}} \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \\ \delta_1 e^{i\lambda_{1n}} & \delta_2 e^{i\lambda_{2n}} & \delta_3 e^{i\lambda_{3n}} & \delta_4 e^{i\lambda_{4n}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{2n} \\ C_{3n} \\ C_{4n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (18)$$

其中:

$$\begin{aligned} \delta_j &= -k_{jn} + \mu_{jn}, \quad k_{jn} = \lambda_{jn}^2 (p\tau^2 - u^2\tau^2 + 1), \\ \mu_{jn} &= 2\omega_n u \tau^2 \lambda_{jn} + \tau^2 \omega_n^2, \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

为了求得非平庸系数解,式(18)左边矩阵的系数行列式必须为零,即:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{i\lambda_{1n}} & e^{i\lambda_{2n}} & e^{i\lambda_{3n}} & e^{i\lambda_{4n}} \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \\ \delta_1 e^{i\lambda_{1n}} & \delta_2 e^{i\lambda_{2n}} & \delta_3 e^{i\lambda_{3n}} & \delta_4 e^{i\lambda_{4n}} \end{vmatrix} = 0 \quad (19)$$

### 2.2 悬臂超薄梁

设悬臂超薄梁固定端在  $x = 0$ , 自由端在  $x = 1$ , 边界条件要求固定端位移和转角、自由端非局部的弯矩和剪力均为零,如下式所示:

$$\begin{aligned} w(0,t) &= 0, \quad w_{,x}(0,t) = 0, \\ m(1,t) &= 0, \quad s(1,t) = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

类似地,综合式(10)、式(12)、式(14)及式(20),可得:

$$C_{1n} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ i\lambda_{1n} & i\lambda_{2n} & i\lambda_{3n} & i\lambda_{4n} \\ \xi_{1n} & \xi_{2n} & \xi_{3n} & \xi_{4n} \\ i\alpha_1 & i\alpha_2 & i\alpha_3 & i\alpha_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{2n} \\ C_{3n} \\ C_{4n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

其中,  $\alpha_j = \lambda_{jn}(\xi_{jn} - \zeta_{jn})$ ,  $\zeta_{jn} = pe^{i\lambda_{jn}}$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ ,  $\xi_{jn} = [-\lambda_{jn}^2 (p\tau^2 - u^2\tau^2 + 1) + \omega_n^2 \tau^2 + 2\omega_n u \tau^2 \lambda_{jn}] e^{i\lambda_{jn}}$ 。

同样由系数行列式为零可得:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ i\lambda_{1n} & i\lambda_{2n} & i\lambda_{3n} & i\lambda_{4n} \\ \xi_{1n} & \xi_{2n} & \xi_{3n} & \xi_{4n} \\ i\lambda_{1n}\alpha_1 & i\lambda_{2n}\alpha_2 & i\lambda_{3n}\alpha_3 & i\lambda_{4n}\alpha_4 \end{vmatrix} = 0 \quad (22)$$

### 2.3 结果及讨论

综合式(15)及式(19)两式,可以得到两端简支轴向运动超薄梁的固有频率与非局部参数、轴向运动速度及轴向张力等的关系,如图1所示,其中第1阶固有频率(图1(a))还同时表示出了非超薄梁的结果<sup>[2-3]</sup>(非超薄梁即  $H \gg e_0 a$  或者  $\tau = e_0 a / H$  趋于零),以便与超薄梁结果作对比。可见考虑非局部效应之后,轴向运动超薄梁的固有频率减小,并且随着频率阶数的增加,频率下降幅度也在增大。因此就梁的厚度来说,结构的超薄性引起了振动固有频率的降低,亦即结构的弯曲刚度减小,这也印证了本文研究是以非局部刚度削弱模型为基础。以  $u = 1$ ,

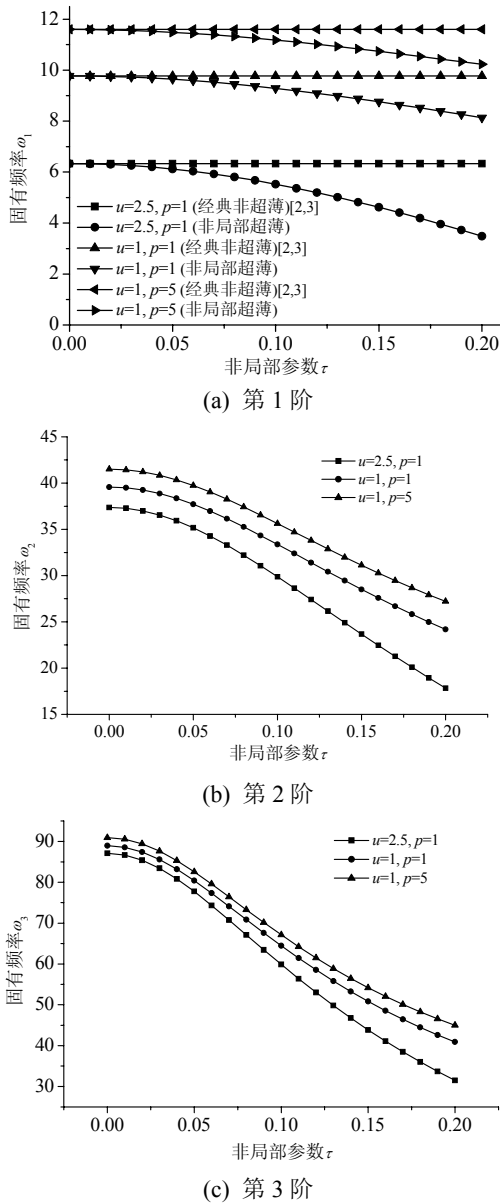


图1 两端简支条件下固有频率随非局部参数的变化  
Fig.1 Variations of the natural frequencies with respect to nonlocal parameter under simple supports condition

$p=1$ 时为例,相比于经典非超薄梁解( $\tau=0$ ),当非局部参量 $\tau$ 增加到0.2时,前3阶无量纲频率分别下降16.8%、38.9%和54.0%,可见传统的连续介质力学高估了微结构横向自由振动的固有频率,对于纳米量级的超薄梁,尺寸效应无法忽略。除了非局部参量之外,无量纲运动速度的增加也使得固有频率降低;同时,随着无量纲初始张力的提高,无量纲振动频率随之增大。

图2给出了前3阶无量纲固有频率与轴向运动速度的关系,其中 $\tau=0.1, p=1$ 。前两阶频率与Öz和Pakdemirli的轴向运动宏观简支梁结果<sup>[2]</sup>做了对比,本文 $p = PH^2 / (EI) = 1$ 对应于文献[2]中无量纲化的刚度 $\nu_f = (EI / (PH^2))^{1/2} = 1$ 。对比再次揭示了经典连续介质力学高估了轴向运动微梁的固有频率。同时发现,在轴向速度不太大的情况下,非局部效应下的频率随着运动速度增加而减小。当速度到达一定大小时,前3阶频率都会出现接近于零频率的临界点,此后将随着轴向速度的增加而增加,并且增加到一定时,又会到达第2个临界点,使得频率再次随轴向速度的增加而减小。如果将第1阶频率的第1个临界点下的速度称为临界速度 $u_{cr}$ ,那么可以求得临界速度随非局部参数的变化,如图3所示。这里需要指出的两点是,第一,本文所研究的临界速度指的是使基频达到最小值的运动速度,这与传统意义上的临界速度概念有所区别。传统的临界速度是指速度达到某个值时,振动特别剧烈。第二,Öz和Pakdemirli关于轴向运动宏观简支梁的研究<sup>[2]</sup>,并未涉及到临界速度现象,但随着轴向运动速度的增大,轴向运动的宏观梁也会出现临界速度现象<sup>[1]</sup>。由图3可见临界速度随着非局部参数的增加而减小,但随着轴向拉力的增加而增大。

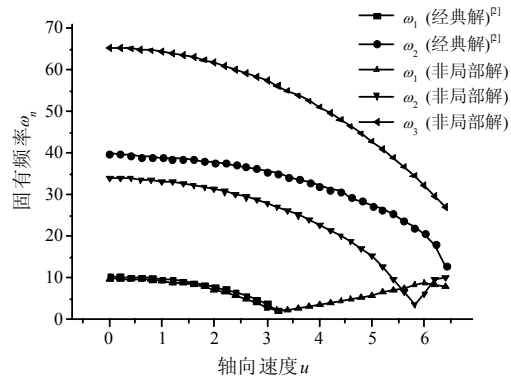


图2 两端简支条件下固有频率随轴向速度的变化  
Fig.2 Variations of the natural frequencies with respect to axial velocity under simple supports condition

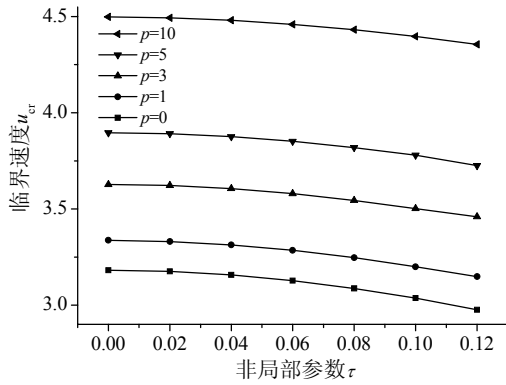
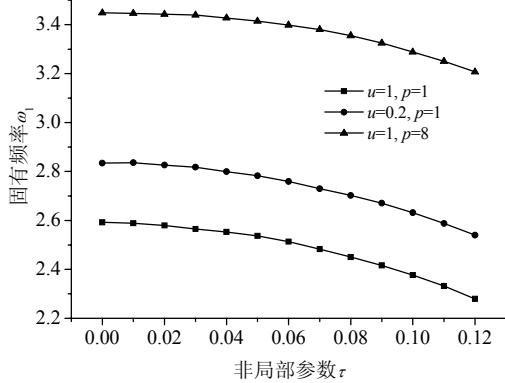
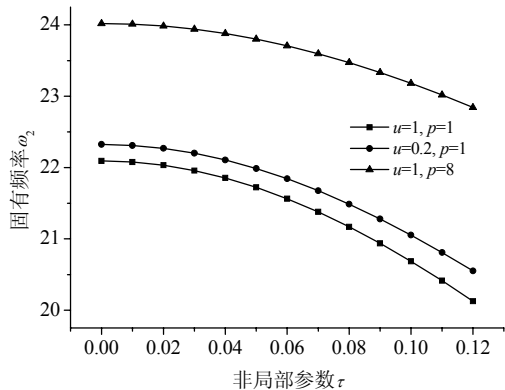


图3 两端简支条件下临界速度随非局部参数的变化  
Fig.3 Variations of critical speed with respect to nonlocal parameter under simple supports condition

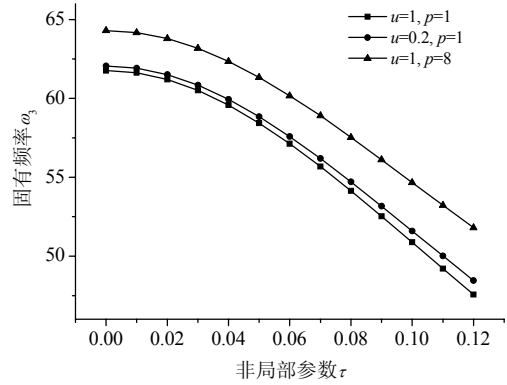
同样地, 综合式(15)及式(22), 类似结论也体现在悬臂超薄梁的固有频率上, 如图4所示。同时也可以发现, 悬臂超薄梁比起两端简支时频率偏小。这里横坐标即非局部参量我们选取0到0.12, 实际上当 $\tau=0$ 可视为梁厚度相比于内特征尺度相当大, 即宏观尺度下的梁结构; 而当 $\tau=0.12$ 时, 以硅材料为例,  $a=0.543\text{nm}$ ,  $e_0=0.39$  [6], 那么对应的厚度约为1.76nm。也就是说, 这里我们考虑的是梁(假如是硅梁)厚度从1.76nm变化到宏观尺度时的频率改变情况。



(a) 第1阶



(b) 第2阶



(c) 第3阶

图4 悬臂超薄梁固有频率随非局部参数的变化  
Fig.4 Variations of the natural frequencies with respect to nonlocal parameter under cantilever condition

图5给出了固有频率随轴向运动速度的关系, 类似的频率临界点现象描述了轴向运动超薄梁的临界速度, 如图6所示。对比发现, 非局部参数对于超薄悬臂梁临界速度的影响没有对于两端简支情况那么明显。

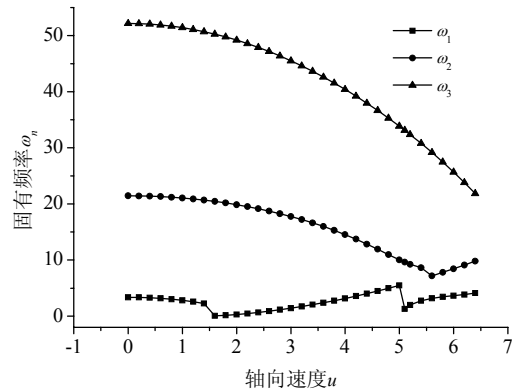


图5 悬臂超薄梁固有频率随轴向速度的变化  
Fig.5 Variations of the natural frequencies with respect to axial velocity under cantilever condition

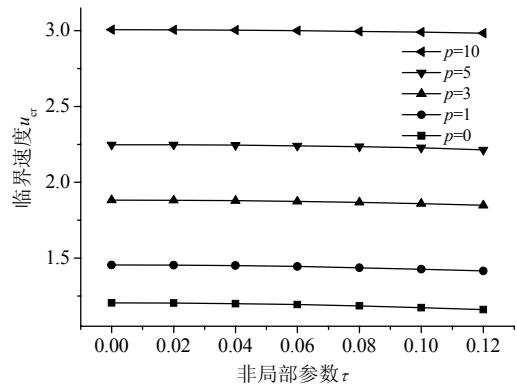


图6 悬臂超薄梁临界速度随非局部参数的变化  
Fig.6 Variations of critical speed with respect to nonlocal parameter under cantilever condition

此外, 本文的研究思路也可适应于分析轴向运动超薄梁横向振动的振型模态, 即只要根据式(15)、式(18)、式(19)、式(21)和式(22)等确定出给定边界条件下的  $C_{jn}$  和  $\lambda_{jn}$ , 再结合式(14), 即可得到振型的相关表达。限于篇幅, 本文不再对此作具体讨论。

### 3 结论

本文研究了轴向运动超薄梁的横向振动行为, 引入非局部理论来考察其动力学行为的尺寸效应现象, 结论如下:

(1) 当梁的厚度非常小时(比如纳米量级), 轴向运动梁的动力学行为尤其是固有频率的非局部效应显著。非局部参量及轴向运动速度的增加使得固有频率下降, 而大的初始张力则增加了梁的固有频率。另外, 超薄性使得梁的自由振动固有频率对比于经典非超薄梁显著降低。

(2) 阶数越高, 固有频率的下降幅度越明显; 同时可以推知轴向运动超薄梁的主振型函数及横向位移也存在非局部效应。

(3) 轴向运动超薄梁存在临界速度, 使得固有频率接近于零。临界速度也受到非局部参量及初始张力的影响, 前者使其减小, 后者则使其增大。

#### 参考文献:

- [1] Wickert J A, Mote C D Jr. Classical vibration analysis of axially moving continua [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1990, 57(3): 738—744.
- [2] Öz H R, Pakdemirli M. Vibrations of an axially moving beam with time-dependent velocity [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1999, 227(2): 239—257.
- [3] Yang X D, Chen L Q. Determination of the natural frequencies of axially moving beams by the method of multiple scales [J]. *Journal of Shanghai University*, 2007, 11(3): 251—254.
- [4] Yang X D, Tang Y Q, Chen L Q, Lim C W. Dynamic stability of axially accelerating Timoshenko beam: Average method [J]. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 2010, 29(1): 81—90.
- [5] Eringen A C, Kim B S. Stress concentration at the tip of the crack [J]. *Mechanics Research Communications*, 1974, 2(1): 233—237.
- [6] Eringen A C. On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves [J]. *Journal of Applied Physics*, 1983, 54(9): 4703—4710.
- [7] 虞吉林, 郑哲敏. 一种非局部弹塑性连续体模型与裂纹尖端附近的应力分布[J]. *力学学报*, 1984, 16(5): 485—494.  
Yu Jilin, Zheng Zhemin. A model of nonlocal elastic-plastic continuum applied to the stress distribution near a crack tip [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 1984, 16(5): 485—494. (in Chinese)
- [8] Peddieson J, Buchanan G G, McNitt R P. Application of nonlocal continuum models to nanotechnology [J]. *International Journal of Engineering Science*, 2003, 41(3/4/5): 305—312.
- [9] Zhang Y Q, Liu G R, Wang J S. Small-scale effects on buckling of multiwalled carbon nanotubes under axial compression [J]. *Physical Review B*, 2004, 70(20): 205430(6pages).
- [10] Wang Q, Varadan V K. Vibration of carbon nanotubes studied using nonlocal continuum mechanics [J]. *Smart Materials and Structures*, 2006, 15(2): 659—666.
- [11] Ece M C, Aydogdu M. Nonlocal elasticity effect on vibration of in-plane loaded double-walled carbon nano-tubes [J]. *Acta Mechanica*, 2007, 190(1/2/3/4): 185—195.
- [12] Reddy J N. Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams [J]. *International Journal of Engineering Science*, 2007, 45(2/3/4/5/6/7/8): 288—307.
- [13] Lim C W. Equilibrium and static deflection for bending of a nonlocal nanobeams [J]. *Advances in Vibration Engineering*, 2009, 8(4): 277—300.
- [14] Lim C W, Niu J C, Yu Y M. Nonlocal stress theory for buckling instability of nanotubes: New predictions on stiffness strengthening effects of nanoscales [J]. *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience*, 2010, 7(10): 2104—2111.
- [15] Li C, Lim C W, Yu J L. Dynamics and stability of transverse vibrations of nonlocal nanobeams with a variable axial load [J]. *Smart Materials and Structures*, 2011, 20(1): 015023(7pages).
- [16] Li C, Lim C W, Yu J L, Zeng Q C. Analytical solutions for vibration of simply supported nonlocal nanobeams with an axial force [J]. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2011, 11(2): 257—271.
- [17] Li C, Zheng Z J, Yu J L, Lim C W. Static analysis of ultra-thin beams based on a semi-continuum model [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2011, 27(5): 713—719.
- [18] Zhang Y Q, Liu G R, Xie X Y. Free transverse vibration of double-walled carbon nanotubes using a theory of nonlocal elasticity [J]. *Physical Review B*, 2005, 71(19): 195404.