文章编号: 1000-5641(2013)02-0136-10

无限时间终端 BSDE 生成元的一个表示定理

张恒敏, 范胜君

(中国矿业大学 理学院, 江苏 徐州 221116)

摘要: 在生成元 g 关于 (y,z) 满足对 t 非一致的 Lipschitz 条件下, 建立了有限或无限时间终端倒向随机微分方程 (简称为 BSDE) 生成元的一个表示定理, 并且得到了此条件下 BSDE 解的一个逆比较定理, 推广了一些已有结果.

关键词: 倒向随机微分方程; 非一致 Lipschitz 条件; 表示定理; 逆比较定理

中图分类号: O211.63 **文献标志码**: A **DOI:** 10.3969/j.issn.1000-5641.2013.02.017

Representation theorem of generators for BSDEs with infinite time intervals

ZHANG Heng-min, FAN Sheng-jun

(*College of Sciences, China University of Mining and Technology, Xuzhou Jiangsu* 221116, *China*)

Abstract: Under the non-uniform Lipschitz condition (in t) of the generator g with respect to (y,z) for backward stochastic differential equations (BSDEs), a representation theorem of generators and a converse theorem of solutions were established for BSDEs with a finite or an infinite time intervals, which extend some existing results.

Key words: backward stochastic differential equation (BSDE); non-uniform Lipschitz condition; representation theorem; converse comparison theorems

0 引 言

1990 年, Pardoux 和 Peng 在生成元 g 关于 (y,z) 满足对 t 一致的 Lipschitz 条件下, 证明了有限时间终端倒向随机微分方程 (简称为 BSDE) 平方可积解的存在惟一性定理. 为了研究 BSDE 中的逆比较问题, 文献 [1] 在生成元 g 关于 (y,z) 满足对 t 一致的 Lipschitz 条件, $\{g(t,0,0)\}_{t\in[0,T]}$ 平方可积和两个附加条件下, 建立了随机变量空间 L^2 中 BSDE 生成元的一

收稿日期: 2012-03

基金项目: 国家自然科学基金青年基金项目(11101422); 中央高校基本科研业务费专项基金项目(2010LKSX04, JK111729)

第一作者: 张恒敏, 男, 硕士研究生, 研究方向为数理统计和倒向随机微分方程.
E-mail: zhanghengmin@126.com.

通信作者: 范胜君, 男, 副教授, 研究方向为倒向随机微分方程、非线性数学期望、金融数学和概率论.
E-mail: f_s_j@126.com; shengjunfan@cumt.edu.cn.

个表示定理. 很多学者致力于减弱或去掉文献 [1] 中的两个附加条件, 最终文献 [2] 在生成元 g 关于 (y,z) 满足对 t 一致的 Lipschitz 条件和 $\{g(t,0,0)\}_{t\in[0,T]}$ 平方可积的条件下, 证明了随机变量空间 $L^p(1\leqslant p<2)$ 中 BSDE 生成元的一个表示定理; 文献 [3] 在生成元 g 是连续且线性增长的条件下, 以及文献 [4] 在生成元 g 关于 (y,z) 连续, 关于 y 单调且多项式增长及关于 z 线性增长的条件下, 分别得到了随机过程空间中 BSDE 生成元的表示定理及逆比较定理.

值得注意的是, 文献 [1-4] 中的这些表示定理及逆比较定理都是在生成元 g 关于 (y,z) 满足对 t 一致的 Lipschitz 条件或其他条件下针对有限时间终端的 BSDE 给出的. 本文运用 BSDE 理论的相关知识, 首次在文献 [5] 中提出的 "生成元 g 关于 (y,z) 满足对 t 非一致的 Lipschitz 条件" 下, 建立了随机变量空间 $L^p(1\leqslant p<2)$ 中有限或无限时间终端 BSDE 生成元的一个表示定理 (定理 2.1), 进而得到了此条件下 BSDE 解的一个逆比较定理 (定理 2.2), 推广了一些已有结果 (注 3).

1　预备知识及引理

假定 $T>0$ 为一个给定的终端时刻, 它可以为有限数, 也可以为 $+\infty$. 若 $T=+\infty$, 则 $[0,T]$ 在本文中意味着 $[0,+\infty)$. 设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为一完备的概率空间, $(B_t)_{t\geqslant 0}$ 为此空间上的 d 维布朗运动且 $B_0=0$, $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 是该布朗运动生成的完备自然 σ 域流:

$$\mathcal{F}_t=\sigma\{B_s,s\in[0,t]\}\vee\mathcal{N},\ t\in[0,T].$$

其中 $\mathcal{N}$ 是由所有 P- 零测度集生成的子集类.

本文总假定在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F}_T,P)$ 上研究问题, 现给定一些记号如下:

$S^2_{\mathcal{F}}(0,T,\mathbf{R})=\{(\psi_t)_{t\in[0,T]}:\psi_t$ 是连续的, $(\mathcal{F}_t)$- 循序可测且满足 $\mathrm{E}[\,\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\psi_t|^2\,]<+\infty$ 的过程$\}$; $H^2_{\mathcal{F}}(0,T,\mathbf{R}^d)=\{(\psi_t)_{t\in[0,T]}:\psi_t$ 是 $(\mathcal{F}_t)$- 循序可测且满足 $\mathrm{E}[\,\int_0^{\mathrm{T}}|\psi_t|^2\,\mathrm{d}t\,]<+\infty$ 的 $\mathbf{R}^d$- 值过程$\}$; $L^p(\Omega,\mathcal{F}_T,P)=\{X:X$ 是 $\mathcal{F}_T$- 可测且满足 $\mathrm{E}[\,|X|^p\,]<+\infty$ 的随机变量$\}$, $p\in[1,2]$.

考虑下面形式的一维倒向随机微分方程:

$$Y_t=\xi+\int_t^{\mathrm{T}}g(s,Y_s,Z_s)\,\mathrm{d}s-\int_t^{\mathrm{T}}Z_s\cdot\mathrm{d}B_s,\qquad t\in[0,T],\tag{1}$$

其中 T 称为 BSDE (1) 的终端时刻, 终端变量 $\xi\in\mathcal{F}_T$ 取实值, $Z_s\cdot\mathrm{d}B_s$ 表示 Z_s 与 $\mathrm{d}B_s$ 的内积, 对任意给定的 $(y,z)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d$, 随机函数

$$g(\omega,t,y,z):\Omega\times[0,T]\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d\to\mathbf{R}$$

是$(\mathcal{F}_t)$-循序可测的, 称为 BSDE (1) 的生成元. 有时我们把 BSDE (1) 简记为 BSDE(ξ,T,g).

假定生成元 g 满足下面的两个假设:

(A1) g 关于 (y,z) 满足对 t 非一致的 Lipschitz 条件, 即存在两个定义在 $[0,T]$ 上的正值非随机函数 $\mu(t)$ 和 $\nu(t)$ 满足 $\int_0^{\mathrm{T}}[\,\mu(t)+\nu^2(t)\,]\,\mathrm{d}t<+\infty$ 且使得 $\mathrm{d}P\times\mathrm{d}t-a.e.$,

$$|g(t,y_1,z_1)-g(t,y_2,z_2)|\leqslant\mu(t)|y_1-y_2|+\nu(t)|z_1-z_2|,\quad\forall\,(y_i,z_i)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d,\ \ i=1,2.$$

(A2) $\mathrm{E}\left[\left(\int_0^{\mathrm{T}}|g(t,0,0)|\,\mathrm{d}t\right)^2\right]<+\infty.$

下面给出后面将要用到的几个引理. 其中引理1.1来源于文献[5]中的定理1.2, 引理1.2可由Lebesgue引理(见文献[6]中的Lemma 18.4)得到, 引理1.3可由文献[7]中的命题2.4.4和命题2.4.11得到.

引理1.1 假定$0<T\leqslant+\infty$并且生成元g满足假设(A1)和(A2). 那么对于任意的$\xi\in L^2(\Omega,\mathcal{F}_T,P)$, BSDE (1)在空间$S^2_{\mathcal{F}}(0,T,\mathbf{R})\times H^2_{\mathcal{F}}(0,T,\mathbf{R}^d)$中存在惟一解, 通常记作$(Y_t(\xi,T,g),Z_t(\xi,T,g))_{t\in[0,T]}$. 有时把BSDE (1)的解$Y_t(\xi,T,g)$简记为$Y_t$.

引理1.2 假定$0<T\leqslant+\infty$且对于每个$m\in\mathbf{N}$, 函数$\psi(s)$在$[0,T\wedge m]$上都Lebesgue可积. 则

$$\lim_{n\to+\infty}n\int_t^{t+\frac{1}{n}}|\psi(s)-\psi(t)|\,\mathrm{d}s=0,\ \ \mathrm{d}t-a.e.\ t\in[0,T).$$

证 明 由Lebesgue引理和已知条件可知: 对每个$m\in\mathbf{N}$, 都有

$$\lim_{n\to+\infty}n\int_t^{t+\frac{1}{n}}|\psi(s)-\psi(t)|\,\mathrm{d}s=0,\ \ \mathrm{d}t-a.e.\ t\in[0,T\wedge m].$$

接下来，注意到

$$\begin{aligned}&\left\{t\in[0,T):\lim_{n\to+\infty}n\int_t^{t+\frac{1}{n}}|\psi(s)-\psi(t)|\,\mathrm{d}s\neq0\right\}\\&=\bigcup_{m=1}^{\infty}\left\{t\in[0,T\wedge m]:\lim_{n\to+\infty}n\int_t^{t+\frac{1}{n}}|\psi(s)-\psi(t)|\,\mathrm{d}s\neq0\right\},\end{aligned}$$

可知引理1.2的结论成立.

引理1.3 设$X_n\in L^2(\Omega,\mathcal{F}_T,P)$, $n\in\mathbf{N}$, 若$\sup\limits_n \mathrm{E}[\,|X_n|^2\,]<+\infty$且$\lim\limits_{n\to+\infty}X_n=0$, $\mathrm{d}P-a.s.$. 则对任意的$p\in[1,2)$, 有$L^p-\lim\limits_{n\to+\infty}X_n=0$.

类似于文献[1]中的命题2.2, 可以证明下面的引理1.4, 它给出了无限时间终端BSDE解的一个先验估计, 在本文主要结果的证明中发挥着重要作用.

引理1.4 假定$0<T\leqslant+\infty$, $\xi\in L^2(\Omega,\mathcal{F}_T,P)$且生成元$g$满足假设(A1)和(A2), 设$(Y_t,Z_t)_{t\in[0,T]}$为BSDE (1)在空间$S^2_{\mathcal{F}}(0,T,\mathbf{R})\times H^2_{\mathcal{F}}(0,T,\mathbf{R}^d)$中的惟一解. 那么对任意的$t\in[0,T]$, 有

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}\left[\sup_{t\leqslant s\leqslant T}\left(\mathrm{e}^{\int_0^s\beta(r)\,\mathrm{d}r}|Y_s|^2\right)+\int_t^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{\int_0^s\beta(r)\,\mathrm{d}r}|Z_s|^2\,\mathrm{d}s\middle|\mathcal{F}_t\right]\\&\leqslant C\mathrm{E}\left[\mathrm{e}^{\int_0^{\mathrm{T}}\beta(r)\,\mathrm{d}r}|\xi|^2+\left(\int_t^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\int_0^s\beta(r)\,\mathrm{d}r}|g(s,0,0)|\,\mathrm{d}s\right)^2\middle|\mathcal{F}_t\right],\end{aligned}$$

其中$\beta(r)=2(\,\mu(r)+\nu^2(r)\,)$, C为一个一致常数.

证 明 对$\mathrm{e}^{\int_0^s\beta(r)\,\mathrm{d}r}|Y_s|^2$在$s\in[u,T]$上使用Itô公式, 记$M_u=2\int_u^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{\int_0^s\beta(r)\,\mathrm{d}r}Y_sZ_s\cdot\mathrm{d}Bs$, 可得

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{\int_0^u\beta(r)\,\mathrm{d}r}|Y_u|^2+\int_u^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{\int_0^s\beta(r)dr}|Z_s|^2\,\mathrm{d}s\\&=\mathrm{e}^{\int_0^{\mathrm{T}}\beta(r)\,\mathrm{d}r}|\xi|^2+\int_u^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{\int_0^s\beta(r)\,\mathrm{d}r}[\,2Y_s\,g(s,Y_s,Z_s)-\beta(s)|Y_s|^2\,]\,\mathrm{d}s-M_u,\quad t\leqslant u\leqslant T.\end{aligned}$$

考虑到假设 (A1) 并使用不等式 $2ab \leqslant 2a^2 + \frac{1}{2}b^2$, 可知

$$
\begin{aligned}
2Y_s\, g(s,Y_s,Z_s) &\leqslant 2|Y_s|(|g(s,0,0)| + \mu(s)|Y_s| + \nu(s)|Z_s|) \\
&\leqslant 2|Y_s||g(s,0,0)| + 2(\mu(s)+\nu^2(s))|Y_s|^2 + \frac{1}{2}|Z_s|^2.
\end{aligned}
$$

这样, 考虑到 $\beta(s)$ 的定义, 我们有

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{\int_0^u \beta(r)\,\mathrm{d}r}|Y_u|^2 + \frac{1}{2}\int_u^{\mathrm{T}} \mathrm{e}^{\int_0^s \beta(r)\,\mathrm{d}r}|Z_s|^2\,\mathrm{d}s \\
&\leqslant \mathrm{e}^{\int_0^{\mathrm{T}} \beta(r)\mathrm{d}r}|\xi|^2 + 2\int_u^{\mathrm{T}} \mathrm{e}^{\int_0^s \beta(r)dr}|Y_s||g(s,0,0)|\,\mathrm{d}s - M_u.
\end{aligned} \tag{2}
$$

在式(2)中, 让 $u=t$, 两边关于 $\mathcal{F}_t$ 取条件数学期望并注意到 $\{M_u\}_{0\leqslant u\leqslant T}$ 为鞅, 可得

$$
\mathrm{E}\left[\int_t^{\mathrm{T}} \mathrm{e}^{\int_0^s \beta(r)\,\mathrm{d}r}|Z_s|^2\,\mathrm{d}s\middle|\mathcal{F}_t\right] \leqslant 2\mathrm{E}\left[\mathrm{e}^{\int_0^{\mathrm{T}} \beta(r)\,\mathrm{d}r}|\xi|^2 + 2\int_t^{\mathrm{T}} \mathrm{e}^{\int_0^s \beta(r)\,\mathrm{d}r}|Y_s||g(s,0,0)|\,\mathrm{d}s\middle|\mathcal{F}_t\right]. \tag{3}
$$

另一方面, 对式 (2) 两边先关于 u 在 $[t,T]$ 上取上确界再关于 $\mathcal{F}_t$ 取条件数学期望, 使用 BDG 不等式及基本不等式 $2Kab \leqslant K^2a^2 + b^2$, 可知存在常数 $C_1 > 0$, 使得

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left[\sup_{t\leqslant u\leqslant T}\left(\mathrm{e}^{\int_0^u \beta(r)\,\mathrm{d}r}|Y_u|^2\right)\middle|\mathcal{F}_t\right] \\
&\leqslant \mathrm{E}\left[\mathrm{e}^{\int_0^{\mathrm{T}} \beta(r)\,\mathrm{d}r}|\xi|^2 + 2\int_t^{\mathrm{T}} \mathrm{e}^{\int_0^s \beta(r)\,\mathrm{d}r}|Y_s||g(s,0,0)|\,\mathrm{d}s\middle|\mathcal{F}_t\right] \\
&\quad + \frac{1}{2}\mathrm{E}\left[\sup_{t\leqslant s\leqslant T}\left(\mathrm{e}^{\int_0^s \beta(r)\,\mathrm{d}r}|Y_s|^2\right)\middle|\mathcal{F}_t\right] + \frac{C_1^2}{2}\mathrm{E}\left[\int_t^{\mathrm{T}} \mathrm{e}^{\int_0^s \beta(r)\,\mathrm{d}r}|Z_s|^2\,\mathrm{d}s\middle|\mathcal{F}_t\right].
\end{aligned}
$$

上式结合式 (3), 可知存在常数 $C_2 > 0$, 使得

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left[\sup_{t\leqslant s\leqslant T}\left(\mathrm{e}^{\int_0^s \beta(r)\,\mathrm{d}r}|Y_s|^2\right) + \int_t^{\mathrm{T}} \mathrm{e}^{\int_0^s \beta(r)\,\mathrm{d}r}|Z_s|^2\,\mathrm{d}s\middle|\mathcal{F}_t\right] \\
&\leqslant C_2\mathrm{E}\left[\mathrm{e}^{\int_0^{\mathrm{T}} \beta(r)\,\mathrm{d}r}|\xi|^2 + \int_t^{\mathrm{T}} \mathrm{e}^{\int_0^s \beta(r)\,\mathrm{d}r}|Y_s||g(s,0,0)|\,\mathrm{d}s\middle|\mathcal{F}_t\right].
\end{aligned}
$$

进一步地, 再次使用基本不等式 $2Kab \leqslant K^2a^2 + b^2$, 可推出

$$
\begin{aligned}
&C_2\mathrm{E}\left[\int_t^{\mathrm{T}} \mathrm{e}^{\int_0^s \beta(r)\,\mathrm{d}r}|Y_s||g(s,0,0)|\,\mathrm{d}s\middle|\mathcal{F}_t\right] \\
&\leqslant \frac{1}{2}\mathrm{E}\left[\sup_{t\leqslant s\leqslant T}\left(\mathrm{e}^{\int_0^s \beta(r)\,\mathrm{d}r}|Y_s|^2\right)\middle|\mathcal{F}_t\right] + \frac{C_2^2}{2}\mathrm{E}\left[\left(\int_t^{\mathrm{T}} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\int_0^s \beta(r)\,\mathrm{d}r}|g(s,0,0)|\,\mathrm{d}s\right)^2\middle|\mathcal{F}_t\right].
\end{aligned}
$$

最后, 整理上面的最后两个不等式, 取 $C = 2C_2 + C_2^2$, 可知引理 1.4 的结论成立.

2　主要结果及证明

首先介绍下面的假设 (A3), 这里 $0 < T \leqslant +\infty$.

(A3) 对 $\mathrm{d}t-a.e.\,t\in[0,T)$, 存在两个常数 $\delta_t>0$ 和 $K_t>0$ 满足

$$\mathrm{E}\left[\left(n\int_t^{t+\frac{1}{n}}|g(s,0,0)|\,\mathrm{d}s\right)^2\right]\leqslant K_t,\quad \forall\, 0<\frac{1}{n}\leqslant\min\{\delta_t,T-t\},$$

并且$\mathrm{E}\left[\,|g(t,0,0)|^2\,\right]<+\infty$, $\mathrm{d}t-a.e.\,t\in[0,T)$.

注 1 假定 g 为一个确定性的生成元, 即 $g(t,y,z):[0,T]\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d\to\mathbf{R}$. 若 $\int_0^{\mathrm{T}}|g(t,0,0)|\,\mathrm{d}t<+\infty$. 则由引理 1.2 可知

$$\lim_{n\to+\infty}n\int_t^{t+\frac{1}{n}}|g(s,0,0)|\,\mathrm{d}s=|g(t,0,0)|,\quad \mathrm{d}t-a.e.\,t\in[0,T).$$

注意到 g 是确定性的, 故可知 g 满足假设 (A3).

注 2 假定 $g(t,0,0)\in H^2_{\mathcal{F}}(0,T,\mathbf{R}^d)$. 则由 Hölder 不等式及 Fubini 定理可知

$$\mathrm{E}\left[\left(n\int_t^{t+\frac{1}{n}}|g(s,0,0)|\,\mathrm{d}s\right)^2\right]\leqslant n\int_t^{t+\frac{1}{n}}\mathrm{E}\left[|g(s,0,0)|^2\right]\,\mathrm{d}s<+\infty,\ \forall\ t\in[0,T).$$

进一步地，因为 $\int_0^{\mathrm{T}}\mathrm{E}\left[|g(t,0,0)|^2\right]\,\mathrm{d}t<+\infty$, 由引理 1.2 可知

$$\lim_{n\to+\infty}n\int_t^{t+\frac{1}{n}}\mathrm{E}\left[|g(s,0,0)|^2\right]\,\mathrm{d}s=\mathrm{E}\left[|g(t,0,0)|^2\right],\quad \mathrm{d}t-a.e.\ t\in[0,T).$$

于是 g 也满足假设 (A3).

下面的定理 2.1 建立了有限或无限时间终端 BSDE 生成元的一个表示定理, 作为本文的主要结果之一.

定理 2.1 (生成元的表示定理) 假定 $0<T\leqslant+\infty$ 且生成元 g 满足假设 (A1)—(A3). 则对每个 $(y,z)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d$, 只要 $p\in[1,2)$, 就有

$$L^p-\lim_{n\to+\infty}n\left\{Y_t\left(y+z\cdot(B_{t+\frac{1}{n}}-B_t),t+\frac{1}{n},g\right)-y\right\}=g(t,y,z),\quad \mathrm{d}t-a.e.\,t\in[0,T).$$

注 3 假定 $0<T<+\infty$, 若 g 满足假设 (A1) 且 $g(t,0,0)\in H^2_{\mathcal{F}}(0,T,\mathbf{R}^d)$. 由 Hölder 不等式可知 g 满足假设 (A2) (注意当 $T=+\infty$ 时不一定成立), 再结合注 2 可知 g 必满足假设 (A3), 故定理 2.1 的结论成立. 这意味着在 $0<T<+\infty$ 的情况下, 定理 2.1 已经推广了文献 [2] 中的生成元的表示定理, 因为文献 [2] 中的 Lipschitz 条件要求关于 t 是一致的, 即假设 (A1) 中的 $\mu(t)$ 和 $\nu(t)$ 为常数, 而在定理 2.1 中可允许它们为定义在 $[0,T]$ 上的无界函数. 进一步地, 定理 2.1 还考虑了 $T=+\infty$ 的情况, 因此我们说它推广了一些已有结果.

定理 2.1 的证明 假定 g 满足假设 (A1)—(A3). 首先因 $\int_0^{\mathrm{T}}[\,\mu(t)+\nu^2(t)\,]\,\mathrm{d}t<+\infty$, 由引理 1.2 可知

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\left(n\int_t^{t+\frac{1}{n}}\mu(s)\,\mathrm{d}s\right)^2+n\int_t^{t+\frac{1}{n}}\nu^2(s)\,\mathrm{d}s\right]=\mu^2(t)+\nu^2(t),\quad \mathrm{d}t-a.e.\,t\in[0,T).\tag{4}$$

接下来, 给定 $(y,z)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d$. 由 g 满足假设 (A1) 可知 $\mathrm{d}P\times\,\mathrm{d}t-a.e.$,

$$|g(t,y,z|\leqslant|g(t,y,z)-g(t,0,0)|+|g(t,0,0)|\leqslant\mu(t)|y|+\nu(t)|z|+|g(t,0,0)|\,,$$

又因 $\int_0^{\mathrm{T}}|g(t,0,0)|\,\mathrm{d}t<+\infty$, $\mathrm{d}P-a.s.$ 和 $\int_0^{\mathrm{T}}[\,\mu(t)+\nu^2(t)\,]\,\mathrm{d}t<+\infty$, 故对每个 $m\in\mathbf{N}$, 有

$$\int_0^{T\wedge m}|g(t,y,z)|\,\mathrm{d}t<+\infty,\quad \mathrm{d}P-a.s..$$

这样, 由引理 1.2 并结合 Fubini 定理可知

$$\lim_{n\to+\infty}n\int_t^{t+\frac{1}{n}}|g(s,y,z)-g(t,y,z)|\,\mathrm{d}s=0,\quad \mathrm{d}P-a.s.,\quad \mathrm{d}t-a.e.\ t\in[0,T).\tag{5}$$

现在任意给定使得式 (4)、式 (5) 和假设 (A3) 中的两个不等式均成立的一个 $t\in[0,T]$, 并且选择足够大的正整数 n 满足 $0<\frac{1}{n}\leqslant\min\{\delta_t,T-t\}$. 则由引理 1.1 可知下面的 BSDE 在空间 $S^2_{\mathcal{F}}(0,t+\frac{1}{n},\mathbf{R})\times H^2_{\mathcal{F}}(0,t+\frac{1}{n},\mathbf{R}^d)$ 中存在惟一解, 记为 $(Y^n_s,Z^n_s)_{s\in[0,t+\frac{1}{n}]}$.

$$Y^n_s=y+z\cdot(B_{t+\frac{1}{n}}-B_t)+\int_s^{t+\frac{1}{n}}g(u,Y^n_u,Z^n_u)\,\mathrm{d}u-\int_s^{t+\frac{1}{n}}Z^n_u\cdot\mathrm{d}B_u,\quad t\leqslant s\leqslant t+\frac{1}{n}.\tag{6}$$

先令

$$\overline{Y}^n_s=Y^n_s-[\,y+z\cdot(B_s-B_t)\,],\quad \overline{Z}^n_s=Z^n_s-z,\quad t\leqslant s\leqslant t+\frac{1}{n}.$$

则对 $\overline{Y}^n_u$ 在 $u\in[s,t+\frac{1}{n}]$ 上使用 Itô 公式, 可得

$$\overline{Y}^n_s=\int_s^{t+\frac{1}{n}}g(u,\overline{Y}^n_u+y+z\cdot(B_u-B_t),\overline{Z}^n_u+z)\,\mathrm{d}u-\int_s^{t+\frac{1}{n}}\overline{Z}^n_u\cdot\mathrm{d}B_u,\quad t\leqslant s\leqslant t+\frac{1}{n}.\tag{7}$$

我们可以证明下面的命题.

命题 2.1

$$\lim_{n\to+\infty}n\mathrm{E}\Big[\sup_{t\leqslant s\leqslant t+\frac{1}{n}}|\overline{Y}^n_s|^2+\int_t^{t+\frac{1}{n}}|\overline{Z}^n_s|^2\,\mathrm{d}s\Big]=0.$$

证　明　对 $s\in[t,t+\frac{1}{n}]$, 根据式 (7) 和引理 1.4, 由假设 (A1) 及不等式 $(a+b+c)^2\leqslant 4(a^2+b^2+c^2)$, 可知存在一个常数 $C_3>0$ 使得

$$\begin{aligned}
&n\mathrm{E}\Big[\sup_{t\leqslant s\leqslant t+\frac{1}{n}}|\overline{Y}^n_s|^2+\int_t^{t+\frac{1}{n}}|\overline{Z}^n_s|^2\,\mathrm{d}s\Big]\\
&\leqslant C_3\,n\mathrm{E}\Big[\Big(\int_t^{t+\frac{1}{n}}|g(s,y+z\cdot(B_s-B_t),z)|\,\mathrm{d}s\Big)^2\Big]\\
&\leqslant C_3\,n\mathrm{E}\Big[\Big(\int_t^{t+\frac{1}{n}}[\,|g(s,0,0)|+\mu(s)|y|+\nu(s)|z|+\mu(s)|z\cdot(B_s-B_t)|\,]\,\mathrm{d}s\Big)^2\Big]\\
&\leqslant 4C_3\,n\mathrm{E}\Big[\Big(\int_t^{t+\frac{1}{n}}|g(s,0,0)|\,\mathrm{d}s\Big)^2\Big]+4C_3\,n\Big(\int_t^{t+\frac{1}{n}}[\,\mu(s)|y|+\nu(s)|z|\,]\,\mathrm{d}s\Big)^2\\
&\quad+4C_3\,n\mathrm{E}\Big[\Big(\int_t^{t+\frac{1}{n}}\mu(s)|z\cdot(B_s-B_t)|\,\mathrm{d}s\Big)^2\Big].
\end{aligned}$$

接下来, 由 Hölder 不等式并结合式(4)可知

$$
\begin{aligned}
&n\left(\int_t^{t+\frac{1}{n}}[\,\mu(s)|y|+\nu(s)|z|\,]\,\mathrm{d}s\right)^2\\
&\leqslant 2(|y|+|z|)^2\left[\frac{1}{n}\left(n\int_t^{t+\frac{1}{n}}\mu(s)\,\mathrm{d}s\right)^2+\int_t^{t+\frac{1}{n}}\nu^2(s)\,\mathrm{d}s\right]\xrightarrow{n\to+\infty}0.
\end{aligned}
$$

进一步地, 结合式 (4) 及 BDG 不等式可知存在常数 $C_4>0$, 使得

$$
\begin{aligned}
n\mathrm{E}\left[\left(\int_t^{t+\frac{1}{n}}\mu(s)|z\cdot(B_s-B_t)|\,\mathrm{d}s\right)^2\right]&\leqslant |z|^2\frac{1}{n}\left(n\int_t^{t+\frac{1}{n}}\mu(s)\,\mathrm{d}s\right)^2\mathrm{E}\left[\sup_{t\leqslant s\leqslant t+\frac{1}{n}}|B_s-B_t|^2\right]\\
&\leqslant |z|^2\frac{1}{n}\left(n\int_t^{t+\frac{1}{n}}\mu(s)\,\mathrm{d}s\right)^2\frac{C_4}{n}\xrightarrow{n\to+\infty}0.
\end{aligned}
$$

最后, 由假设 (A3) 可知

$$
n\mathrm{E}\left[\left(\int_t^{t+\frac{1}{n}}|g(s,0,0)|\,\mathrm{d}s\right)^2\right]=\frac{1}{n}\mathrm{E}\left[\left(n\int_t^{t+\frac{1}{n}}|g(s,0,0)|\,\mathrm{d}s\right)^2\right]\leqslant\frac{K_t}{n}\xrightarrow{n\to+\infty}0.
$$

这样命题 2.1 得证.

下面令

$$
\begin{aligned}
&Q_n(t)=n\mathrm{E}\left[\int_t^{t+\frac{1}{n}}g(s,\overline{Y}_s^n+y+z\cdot(B_s-B_t),\overline{Z}_s^n+z)\,\mathrm{d}s\middle|\mathcal{F}_t\right];\\
&P_n(t)=n\mathrm{E}\left[\int_t^{t+\frac{1}{n}}g(s,y,z)\,\mathrm{d}s\middle|\mathcal{F}_t\right].
\end{aligned}
$$

在式 (7) 中, 先令 $s=t$, 再对其两边关于 $\mathcal{F}_t$ 取条件数学期望, 注意到 $\overline{Y}_s^n$ 的定义及式 (6), 可得

$$
n\Big\{Y_t\Big(y+z\cdot(B_{t+\frac{1}{n}}-B_t),t+\frac{1}{n},g\Big)-y\Big\}-g(t,y,z)=Q_n(t)-P_n(t)+P_n(t)-g(t,y,z).
$$

因此, 为了证明定理 2.1, 只需证明下面两式成立即可.

$$
L^2-\lim_{n\to\infty}[Q_n(t)-P_n(t)]=0; \tag{8}
$$

$$
L^p-\lim_{n\to\infty}[P_n(t)-g(t,y,z)]=0,\quad \forall\,p\in[1,2). \tag{9}
$$

先证式 (8) 成立. 事实上, 由 Jensen 不等式, 假设 (A1), $(a+b+c)^2\leqslant 4(a^2+b^2+c^2)$ 及

Hölder 不等式, 可得

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left[\,(Q_n(t)-P_n(t))^2\,\right]\\
&=\mathrm{E}\left\{\left(n\mathrm{E}\left[\int_t^{t+\frac{1}{n}}[\,g(s,\overline{Y}_s^n+y+z\cdot(B_s-B_t),\overline{Z}_s^n+z)-g(s,y,z)\,]\,\mathrm{d}s\middle|\mathcal{F}_t\right]\right)^2\right\}\\
&\leqslant n^2\mathrm{E}\left[\left(\int_t^{t+\frac{1}{n}}[\,g(s,\overline{Y}_s^n+y+z\cdot(B_s-B_t),\overline{Z}_s^n+z)-g(s,y,z)\,]\,\mathrm{d}s\right)^2\right]\\
&\leqslant n^2\mathrm{E}\left[\left(\int_t^{t+\frac{1}{n}}[\,\mu(s)|\overline{Y}_s^n|+\nu(s)|\overline{Z}_s^n|+\mu(s)|z\cdot(B_s-B_t)|\,]\,\mathrm{d}s\right)^2\right]\\
&\leqslant 4n^2\mathrm{E}\left[\left(\int_t^{t+\frac{1}{n}}\mu(s)|\overline{Y}_s^n|\,\mathrm{d}s\right)^2\right]+4n^2\mathrm{E}\left[\left(\int_t^{t+\frac{1}{n}}\nu(s)|\overline{Z}_s^n|\,\mathrm{d}s\right)^2\right]\\
&\quad+4n^2\mathrm{E}\left[\left(\int_t^{t+\frac{1}{n}}\mu(s)|z\cdot(B_s-B_t)|\,\mathrm{d}s\right)^2\right]\\
&\leqslant 4\left[\left(n\int_t^{t+\frac{1}{n}}\mu(s)\,\mathrm{d}s\right)^2+n\int_t^{t+\frac{1}{n}}\nu^2(s)\,\mathrm{d}s\right]\times\mathrm{E}\left[\sup_{t\leqslant s\leqslant t+\frac{1}{n}}|\overline{Y}_s^n|^2+n\int_t^{t+\frac{1}{n}}|\overline{Z}_s^n|^2\,\mathrm{d}s\right]\\
&\quad+4|z|^2\left(n\int_t^{t+\frac{1}{n}}\mu(s)\,\mathrm{d}s\right)^2\times\mathrm{E}\left[\sup_{t\leqslant s\leqslant t+\frac{1}{n}}|B_s-B_t|^2\right].
\end{aligned}
$$

由式 (4) 和命题 2.1 可得

$$
\left[\left(n\int_t^{t+\frac{1}{n}}\mu(s)\,\mathrm{d}s\right)^2+n\int_t^{t+\frac{1}{n}}\nu^2(s)\,\mathrm{d}s\right]\times\mathrm{E}\left[\sup_{t\leqslant s\leqslant t+\frac{1}{n}}|\overline{Y}_s^n|^2+n\int_t^{t+\frac{1}{n}}|\overline{Z}_s^n|^2\,\mathrm{d}s\right]\xrightarrow{n\to+\infty}0.
$$

进一步地, 由式 (4) 和 BDG 不等式, 有

$$
|z|^2\left(n\int_t^{t+\frac{1}{n}}\mu(s)\,\mathrm{d}s\right)^2\times\mathrm{E}\left[\sup_{t\leqslant s\leqslant t+\frac{1}{n}}|B_s-B_t|^2\right]\leqslant|z|^2\left(n\int_t^{t+\frac{1}{n}}\mu(s)\,\mathrm{d}s\right)^2\frac{C_4}{n}\xrightarrow{n\to+\infty}0.
$$

这样已经证得 (8) 式成立.

下面再证 (9) 式成立. 由 Jensen 不等式, 可得

$$
\mathrm{E}\,[\,|P_n(t)-g(t,y,z)|^p\,]\leqslant\mathrm{E}\left[\left(n\int_t^{t+\frac{1}{n}}|g(s,y,z)-g(t,y,z)|\,\mathrm{d}s\right)^p\right].\tag{10}
$$

接下来, 由假设 (A1) 和不等式 $(a+b+c)^2\leqslant4(a^2+b^2+c^2)$ 可知

$$
\mathrm{E}\left[\left(n\int_t^{t+\frac{1}{n}}|g(s,y,z)-g(t,y,z)|\,\mathrm{d}s\right)^2\right]
$$

$$\leqslant n^2\mathrm{E}\bigg[\bigg(\int_t^{t+\frac{1}{n}}[\,|g(s,y,z)-g(s,0,0)|+|g(t,y,z)-g(t,0,0)|+|g(s,0,0)-g(t,0,0)|\,]\,\mathrm{d}s\bigg)^2\bigg]$$

$$\leqslant 4n^2\bigg(\int_t^{t+\frac{1}{n}}[\,\mu(s)|y|+\nu(s)|z|\,]\,\mathrm{d}s\bigg)^2+4(\,\mu(t)|y|+\nu(t)|z|\,)^2$$

$$+\,4n^2\mathrm{E}\bigg[\bigg(\int_t^{t+\frac{1}{n}}|g(s,0,0)-g(t,0,0)|\,\mathrm{d}s\bigg)^2\bigg].$$

进一步地, 由式 (4) 可知, 存在一个常数 $M(t)>0$ 使得

$$n^2\bigg(\int_t^{t+\frac{1}{n}}[\,\mu(s)|y|+\nu(s)|z|\,]\,\mathrm{d}s\bigg)^2\leqslant 2(\,|y|+|z|\,)^2(\mu^2(t)+\nu^2(t)+M(t)).$$

另外, 由假设 (A3) 可知

$$\mathrm{E}\bigg[\bigg(n\int_t^{t+\frac{1}{n}}[\,|g(s,0,0)-g(t,0,0)|\,]\,\mathrm{d}s\bigg)^2\bigg]\leqslant 2K_t+2E[\,|g(t,0,0)|^2\,]<+\infty.$$

于是有

$$\sup_{n\geqslant 1}\mathrm{E}\bigg[\bigg(n\int_t^{t+\frac{1}{n}}|g(s,y,z)-g(t,y,z)|\,\mathrm{d}s\bigg)^2\bigg]<+\infty$$

上式结合式 (5) 和式 (10), 由引理 1.3 可知式 (9) 也成立. 至此便完成了定理 2.1 的证明.

根据几乎处处收敛和矩收敛的关系及 Fubini 定理, 能得到下面的推论 2.1.

推论 2.1 假定 $0<T\leqslant+\infty$ 且生成元 g 满足假设 (A1)–(A3). 那么对每个 $(y,z)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d$, 存在一个子序列 $\{n_k\}_{k=1}^{+\infty}\subset\{n\}_{n=1}^{+\infty}$, 使得

$$\lim_{k\to+\infty}n_k\Big\{Y_t\Big(y+z\cdot(B_{t+\frac{1}{n_k}}-B_t),t+\frac{1}{n_k},g\Big)-y\Big\}=g(t,y,z),\quad \mathrm{d}P\times\,\mathrm{d}t-a.e..$$

定理 2.2 (逆比较定理) 假定 $0<T\leqslant+\infty$ 且生成元 $g_i\,(i=1,2)$ 满足假设 (A1)–(A3). 对于每个 $t\in[0,T]$ 及 $\xi\in L^2(\Omega,\mathcal{F}_t,P)$, 如果 $(Y_u(\xi,t,g_i),Z_u(\xi,t,g_i))_{u\in[0,t]}(i=1,2)$ 是 BSDE (ξ,t,g_i) 的惟一解且满足

$$Y_s(\xi,t,g_1)\geqslant Y_s(\xi,t,g_2),\quad \forall\, s\in[0,t],\quad \mathrm{d}P-a.s..$$

则对任意的 $(y,z)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d$, 有

$$g_1(t,y,z)\geqslant g_2(t,y,z),\quad \mathrm{d}P\times\,\mathrm{d}t-a.e..$$

证　明 给定 $(t,y,z)\in[0,T)\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d$, 设 $0<t+\frac{1}{n}<T$, 由已知条件可得

$$Y_t\Big(y+z\cdot(B_{t+\frac{1}{n}}-B_t),t+\frac{1}{n},g_1\Big)\geqslant Y_t\Big(y+z\cdot(B_{t+\frac{1}{n}}-B_t),t+\frac{1}{n},g_2\Big),\ \mathrm{d}P-a.s..$$

那么在空间 $\Omega\times[\,0,T-\frac{1}{n}]$ 中有 $\mathrm{d}P\times\,\mathrm{d}t-a.e.$,

$$Y_t\Big(y+z\cdot(B_{t+\frac{1}{n}}-B_t),t+\frac{1}{n},g_1\Big)-y\geqslant Y_t\Big(y+z\cdot(B_{t+\frac{1}{n}}-B_t),t+\frac{1}{n},g_2\Big)-y.$$

另一方面, 由推论 2.1 可知必然存在一子序列 $\{n_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \{n\}_{n=1}^{+\infty}$, 使得 $\mathrm{d}P \times \mathrm{d}t - a.e.$,

$$\lim_{k\to+\infty} n_k \left\{ Y_t\Big(y + z\cdot(B_{t+\frac{1}{n_k}} - B_t), t + \frac{1}{n_k}, g_1\Big) - y \right\} = g_1(t,y,z);$$

$$\lim_{k\to+\infty} n_k \left\{ Y_t\Big(y + z\cdot(B_{t+\frac{1}{n_k}} - B_t), t + \frac{1}{n_k}, g_2\Big) - y \right\} = g_2(t,y,z).$$

于是, 结合上面的几个式子可知

$$g_1(t,y,z) \geqslant g_2(t,y,z), \quad \mathrm{d}P \times \mathrm{d}t - a.e..$$

[参　考　文　献]

[1] BRIAND P, COQUET F, HU Y, et al. A converse comparison theorem for BSDEs and related properties of g-expectation[J]. Electronic Communications in Probability, 2000, 5: 101-117.

[2] JIANG L. Convexity, translation invariance and subadditivity for g-expectations and related risk measures[J]. Annals of Applied Probability, 2008, 18(1): 245-258.

[3] FAN S J, JIANG L. A representation theorem for generators of BSDEs with continuous linear-growth generators in the space of processes[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2010, 235: 686-695.

[4] FAN S J, JIANG L, XU Y. Representation theorem for generators of BSDEs with monotonic and polynomial-growth generators in the space of processes[J]. Electronic Journal of Probability, 2011, 16(27): 830-834.

[5] CHEN Z J, WANG B. Infinite time interval BSDEs and the convergence of g-martingales[J]. Journal of the Australian Mathematical Society. Series A, 2000, 69: 187-211.

[6] HEWITT E, STROMBERG K R. Real and Abstract Analysis[M]. New York: Springer-Verlag, 1978.

[7] 汪嘉冈. 现代概率论基础 [M]. 2版. 上海: 复旦大学出版社, 2005.

(上接第 135 页)

[7] ANH L Q, KHANH P Q. Semicontinuity of solution sets to parametric quasivariational inclusions with applications to traffic networks I: uper semicontinuities[J]. Set-Valued Analysis, 2008, 16: 267-279.

[8] LI S J, FANG Z M. Lower semicontinuity of the solution mappings to a parametric generalized Ky Fan inequality[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2010, 147: 507-515.

[9] GONG X H, YAO J C. Lower semicontinuity of the set of efficient solutions for generalized systems[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2008, 138: 197-205.

[10] AUBIN J P, EKELAND I. Applied Nonlinear Analysis[M]. New York: Wiley, 1984.

[11] FERRO F. A minimax theorem for vector-valued functions[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1989, 60: 19-31.