文章编号: 1000-5641(2013)02-0146-08

自正则部分和精确渐近性的一般结果

陆振刚[1], 姜玉秋[2]

(1. 四平职业大学 宣传部, 吉林 四平 136002; 2. 吉林师范大学 数学学院, 吉林 四平 136000)

摘要: 设一零均值非退化、属于正态吸引域的独立同分布随机变量序列, 利用独立序列的弱收敛定理和尾概率不等式, 对于更为广泛的边界函数, 证明了其自正则部分和精确渐近性的一般结果, 揭示了拟权函数、边界函数、收敛速度和极限值之间的关系, 改进并推广了已有的结果.

关键词: 精确渐近性; 自正则和; 一般结果; 独立同分布

中图分类号: O211.4 **文献标志码**: A **DOI:** 10.3969/j.issn.1000-5641.2013.02.018

General result on precise asymptotics for self-normalized sums

LU Zhen-gang[1], JIANG Yu-qiu[2]

(1. *Propaganda Department, Siping Professional College, Siping Jilin* 136002, *China*;
2. *College of Mathematics, Jilin Normal University, Siping Jilin* 136000, *China*)

Abstract: Gien a sequence of i.i.d. nondegenerate random variables with zero means and belonging to the domain of attraction of the normal law, by the weak convergence theorem and the tail probability inequalities of the independent and identically distributed sequence, a general result on precise asymptotics for the self-normalized sums with generalized boundary functions has been proved. It can describe the relations among the weighted function, boundary function, convergence rate and limit value, then the known results of this field are improved and extended.

Key words: precise asymptotics; self-normalized sums; a general result; independent and identically distributed (i.i.d.)

1 引言及主要结果

在此及下文中, 恒假设 $\{X, X_n, n \geqslant 1\}$ 为一零均值非退化的独立同分布的随机变量序列, 其共同的分布函数为 F, 记 $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, $V_n^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$, 称 S_n/V_n 为自正则和. 在过去的 20 多年中, 自正则和的研究一直是概率极限理论研究中的热点之一, 在这一领域取得了很多重要的成果, 具体可见文献 [1–5]. 下面先回顾稳定吸引域的概念.

收稿日期: 2012-04

基金项目: 国家外专局项目(L20102200012)

第一作者: 陆振刚, 男, 副教授, 研究方向为概率论和数学教学. E-mail: luzhengang1958@163.com.

第二作者: 姜玉秋, 女，副教授, 研究方向为概率论与数理统计. E-mail: jyq7785@sina.com.

称i.i.d.随机变量序列 $\{Y,Y_n;n\geqslant 1\}$ 是属于稳定吸引域(简记为 Y 属于稳定吸引域), 如果存在 $A_n>0$ 和 $B_n\in\mathbf{R}$, 使得

$$\frac{S_n-B_n}{A_n}\xrightarrow{\mathcal{D}}\mathcal{L}_\alpha,$$

其中 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}Y_i$, $\mathcal{L}_\alpha$ 是特征指数为 $\alpha\in(0,2]$ 的稳定分布. 当 $\alpha=2$ 时, 称 $\{Y,Y_n;n\geqslant 1\}$ 属于正态吸引域, 即 $Y\in DAN$.

随机变量列的精确渐近性质的研究是近代概率极限理论研究中的热门方向之一. 主要研究当 $\varepsilon\to 0$ 时, 下列级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\phi(n)\mathrm{E}|S_n|^pI\{|S_n|\geqslant\varepsilon f(n)\}<\infty,\ \forall\,\varepsilon>0$$

的收敛条件及其收敛速度. 其中 $p\geqslant 0$, $\phi(x)$ 称为拟权函数, $f(x)$ 称为边界函数. 近年来许多学者对随机变量列重对数律、完全收敛及矩重对数律的精确渐近性质进行了探讨, 见文献[6–13]. 文献[10]得到了如下形式的自正则和的精确渐近性质的结果.

定理 A 假设 X 属于正态吸引域且 $\mathrm{E}X=0$, 那么当 $b>-1$, $1\leqslant r<2$ 时, 有

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\quad &\varepsilon^{\frac{2r(b+1)}{2-r}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\log n)^b}{n}\mathrm{E}\Big\{\frac{|S_n|}{V_n}-\varepsilon(2\log n)^{\frac{2-r}{2r}}\Big\}_+\\ =\ &\frac{2^{-b-1}(2-r)}{(b+1)(2rb+r+2)}\mathrm{E}\,|\mathcal{N}|^{\frac{2rb+r+2}{2-r}}.\end{aligned}$$

在此以及下文中, $\mathcal{N}$ 表示标准正态随机变量. 本文在此基础上，研究了自正则和的精确渐近性的更为一般的结果. 下面先给出文中的一些假设条件, 其中 s 为任给的大于零的常数.

(A1) $g(x)$ 为 $[n_0,\infty)$ 上具有非负导数 $g'(x)$ 的正函数, 且满足 $g(x)\uparrow\infty$, $x\to\infty$.

(A2) $g'(x)$ 在 $[n_0,\infty)$ 单调;当 $g'(x)$ 单调非降时, 满足 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{g'(x+1)}{g'(x)}=1$.

(A3) $\varphi(x)=\frac{g'(x)}{g^{ps}(x)}$ 在$[n_0,\infty)$ 单调; 当 $\varphi(x)$ 单调非降时; 满足 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)}=1$, 其中 $\frac{1}{s}>p\geqslant 0$.

(A4) $\limsup\limits_{x\to\infty}\frac{g^s(x)}{\sqrt{x}}<\infty$.

本文的主要结果如下.

定理 1.1 设 $\{X,X_n,n\geqslant 1\}$ 为一零均值非退化的独立同分布的随机变量序列, 且 X 属于正态吸引域, s 为任给的大于零的常数, 进一步假设条件 (A1)—(A4) 成立,那么有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{\frac{1}{s}}\sum_{n=n_0}^{\infty}g'(n)P\Big\{\frac{|S_n|}{V_n}\geqslant\varepsilon g^s(n)\Big\}=\mathrm{E}|\mathcal{N}|^{\frac{1}{s}}.\tag{1.1}$$

当 $p>0$ 时,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{\frac{1}{s}-p}\sum_{n=n_0}^{\infty}\varphi(n)\int_{\varepsilon g^s(n)}^{\infty}px^{p-1}P\Big\{\frac{|S_n|}{V_n}\geqslant x\Big\}\mathrm{d}x=\frac{ps}{1-ps}\mathrm{E}|\mathcal{N}|^{\frac{1}{s}};\tag{1.2}$$

当 $p\geqslant 0$ 时,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{\frac{1}{s}-p}\sum_{n=n_0}^{\infty}\varphi(n)\mathrm{E}\Big|\frac{S_n}{V_n}\Big|^pI\Big\{\frac{|S_n|}{V_n}\geqslant\varepsilon g^s(n)\Big\}=\frac{1}{1-ps}\mathrm{E}|\mathcal{N}|^{\frac{1}{s}}.\tag{1.3}$$

注1.1 满足定理中假设条件的 $g(x)$ 有很多, 比如 $g(x) = x^\alpha$, $(\log x)^\beta$, $(\log\log x)^\gamma$, 其中 $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ 为某些适当的参数.

注1.2 如果 $0 < \sigma^2 = \mathrm{E}X^2 < \infty$, 由强大数定律可知 $\frac{V_n^2}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} \sigma^2$, 从而以 $\sqrt{n}\sigma$ 代替 V_n, 定理 1.1 仍成立. 所以定理1.1是独立情形在更弱的矩条件下的推广.

注1.3 在式(1.2)中取 $\frac{1}{s} = \frac{2rb+r+2}{2-r}$, $p = 1$, $g(x) = (2\log n)^{\frac{2rb+r+2}{2r}}$, 其中 $b > -1$, $1 \leqslant r < 2$, 那么可以得到定理 A. 在定理 1.1 中取其他特殊的 $g(x)$ 以及 s, p, 可以得到其他已知的结果, 在此就不再一一叙述.

2 定理的证明

令 $d(M,\varepsilon) = [g^{-1}(M\varepsilon^{-\frac{1}{s}})]$, 其中 $g^{-1}(x)$ 为 $g(x)$ 的反函数, $M \geqslant 1$. 在本节中 C 表示正常数, 不同的地方可表示不同的值. 在证明定理之前，首先介绍一个引理.

引理 2.1[14] 设 $\{X, X_n, n \geqslant 1\}$ 为一零均值非退化的独立同分布的随机变量序列, 且 X 属于正态吸引域. 那么对于任意的 $0 < \epsilon < 1/2$, 存在 $0 < \delta < 1$, $x_0 > 1$, N_0, 使得当 $n \geqslant N_0$ 和 $x_0 < x < \delta\sqrt{n}$ 时, 有

$$P\Big\{\frac{S_n}{V_n} \geqslant x\Big\} \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{(1-\epsilon)x^2}{2}}. \tag{2.1}$$

引理 2.2[15] (Toeplitz 引理) 设 $\{a_{ni}, 1 \leqslant i \leqslant k_n, n \geqslant 1\}$ 为实数阵列, $\{x_i, i \geqslant 1\}$ 为实数序列满足条件: 对每个固定的 i, $a_{ni} \to 0$, 而对每个 n, $\sum\limits_{i=1}^{k_n} |a_{ni}| \leqslant C < \infty$.

(1) 若 $x_n \to 0$, 那么有 $\sum\limits_{i=1}^{k_n} a_{ni}x_i \to 0$.

(2) 若 $\sum\limits_{i=1}^{k_n} a_{ni} = 1$, $x_n \to x$, 那么有 $\sum\limits_{i=1}^{k_n} a_{ni}x_i \to x$.

定理 1.1 可以由以下几个命题得到.

命题 2.1 在定理 1.1 的条件下, 对于任意的 $s > 0$, 有

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{\frac{1}{s}} \sum_{n=n_0}^{\infty} g'(n) P\left\{|\mathcal{N}| \geqslant \varepsilon g^s(n)\right\} = \mathrm{E}|\mathcal{N}|^{\frac{1}{s}}.$$

证　明 如果 $g'(x)$ 在 $[n_o, \infty)$ 单调非增, 那么 $g'(x)P\left\{|\mathcal{N}| \geqslant \varepsilon g^s(x)\right\}$ 也单调非增, 有

$$\int_{n_0+1}^{\infty} g'(x)P\left\{|\mathcal{N}| \geqslant \varepsilon g^s(x)\right\}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{n=n_0+1}^{\infty} g'(n)P\left\{|\mathcal{N}| \geqslant \varepsilon g^s(n)\right\} \leqslant \int_{n_0}^{\infty} g'(x)P\left\{|\mathcal{N}| \geqslant \varepsilon g^s(x)\right\}\mathrm{d}x,$$

进一步有

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{\frac{1}{s}} \sum_{n=n_0}^{\infty} g'(n)P\left\{|\mathcal{N}| \geqslant \varepsilon g^s(n)\right\} &= \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{\frac{1}{s}} \int_{n_0}^{\infty} g'(x)P\left\{|\mathcal{N}| \geqslant \varepsilon g^s(x)\right\}\mathrm{d}x \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{s}\int_{\varepsilon g^s(n_0)}^{\infty} t^{\frac{1}{s}-1}P\left\{|\mathcal{N}| \geqslant t\right\}\mathrm{d}t = \mathrm{E}|\mathcal{N}|^{\frac{1}{s}}.\end{aligned}$$

如果 $g'(x)$ 在 $[n_o, \infty)$ 单调非降, 由假设条件 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{g'(x+1)}{g'(x)} = 1$ 可知, 对于任给的$0 < \delta < 1$, 存在 $n_1 = n_1(\delta)$, 使得当 $n \geqslant n_1$ 时有 $g'(n+1)/g'(n) < 1+\delta$ 和 $g'(n)/g'(n+1) > 1-\delta$ 成立. 从

而有

$$
\begin{aligned}
(1+\delta)^{-1}\int_{n_1+1}^{\infty} g'(x)P\{|\mathcal{N}|\geqslant \varepsilon g^s(x)\}\mathrm{d}x
&\leqslant \sum_{n=n_1+1}^{\infty} g'(n)P\left\{|\mathcal{N}|\geqslant \varepsilon g^s(n)\right\}\\
&\leqslant (1-\delta)^{-1}\int_{n_1}^{\infty} g'(x)P\left\{|\mathcal{N}|\geqslant \varepsilon g^s(x)\right\}\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{\frac{1}{s}}\sum_{n=n_0}^{\infty} g'(n)P\left\{|\mathcal{N}|\geqslant \varepsilon g^s(n)\right\} &= \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{\frac{1}{s}}\sum_{n=n_1+1}^{\infty} g'(n)P\left\{|\mathcal{N}|\geqslant \varepsilon g^s(n)\right\}\\
&\leqslant \lim_{\varepsilon\to 0}(1-\delta)^{-1}\varepsilon^{\frac{1}{s}}\int_{n_1}^{\infty} g'(x)P\left\{|\mathcal{N}|\geqslant \varepsilon g^s(x)\right\}\mathrm{d}x\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}(1-\delta)^{-1}\frac{1}{s}\int_{\varepsilon g^s(n_0)}^{\infty} t^{\frac{1}{s}-1}P\left\{|\mathcal{N}|\geqslant t\right\}\mathrm{d}t\\
&= (1-\delta)^{-1}\mathrm{E}|\mathcal{N}|^{\frac{1}{s}}.
\end{aligned}
$$

类似地可证明

$$
(1+\delta)^{-1}E|\mathcal{N}|^{\frac{1}{s}}\leqslant \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{\frac{1}{s}}\sum_{n=n_0}^{\infty} g'(n)P\left\{|\mathcal{N}|\geqslant \varepsilon g^s(n)\right\}\leqslant (1-\delta)^{-1}E|\mathcal{N}|^{\frac{1}{s}}.
$$

最后令 $\delta\downarrow 0$ 可以得到命题 2.1 成立.

注 2.1 在接下来的命题中，为简便起见，我们省略了 $g'(x)$ 或者 $\varphi(x)$ 的讨论过程, 其具体讨论过程与命题 2.1 类似.

命题 2.2 在定理 1.1 的条件下, 对于任意的 $M>0$, 有

$$
\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{\frac{1}{s}}\sum_{n=n_0}^{d(M,\varepsilon)} g'(n)\left|P\left\{\frac{|S_n|}{V_n}\geqslant \varepsilon g^s(n)\right\}-P\{|\mathcal{N}|\geqslant \varepsilon g^s(n)\}\right|=0.
$$

证 明 令 $\Delta_n=\sup\limits_x|P\{\frac{|S_n|}{V_n}\geqslant x\}-P\{|\mathcal{N}|\geqslant x\}|$, 由文献 [1] 知 $\frac{S_n}{V_n}\xrightarrow{\mathcal{D}}\mathcal{N}$, 从而 $\Delta_n\to 0$, 利用引理 2.2 (Toeplitz 引理), 类似文献 [16] 中命题 3.2 的证明可知命题 2.2 成立.

命题 2.3 在定理 1.1 的条件下, 对于任意的 $s>0$, 关于充分小的 $0<\varepsilon<1$ 一致有

$$
\lim_{M\to\infty}\varepsilon^{\frac{1}{s}}\sum_{n>d(M,\varepsilon)} g'(n)P\{|\mathcal{N}|\geqslant \varepsilon g^s(n)\}=0.
$$

证 明 由文献[16]中命题 3.3 知该命题成立.

命题 2.4 在定理 1.1 的条件下, 对于任意的 $s>0$, 关于充分小的 $\varepsilon>0$ 一致有

$$
\lim_{M\to\infty}\varepsilon^{\frac{1}{s}}\sum_{n>d(M,\varepsilon)} g'(n)P\left\{\frac{|S_n|}{V_n}\geqslant \varepsilon g^s(n)\right\}=0.
$$

证　明　注意到当 $n > d(M,\varepsilon)$ 时，$\varepsilon g^s(n) \geqslant M > 1$, 而由条件 (A4), 当 ε 充分小, n 充分大时, $\varepsilon g^s(n) \leqslant \delta n^{\frac{1}{2}}$, 从而由引理 2.1 可知

$$\begin{aligned}
&\lim_{M\to\infty} \varepsilon^{\frac{1}{s}} \sum_{n>d(M,\varepsilon)} g'(n) P\Big\{\frac{|S_n|}{V_n} \geqslant \varepsilon g^s(n)\Big\} \\
&\leqslant \lim_{M\to\infty} \varepsilon^{\frac{1}{s}} \sum_{n>d(M,\varepsilon)} g'(n) \mathrm{e}^{-C\varepsilon^2 g^{2s}(n)} \\
&\leqslant \lim_{M\to\infty} C\varepsilon^{\frac{1}{s}} \int_{d(M,\varepsilon)}^{\infty} g'(x) \mathrm{e}^{-C\varepsilon^2 g^{2s}(x)} \mathrm{d}x \quad (\text{令 } t = C\varepsilon^2 g^{2s}(x)) \\
&\leqslant \lim_{M\to\infty} C \int_{CM^{2s}}^{\infty} t^{\frac{1}{2s}-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t \\
&= 0.
\end{aligned}$$

命题证明完毕.

命题 2.5　在定理 1.1 的条件下, 当 $p > 0$ 时，有

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{\frac{1}{s}-p} \sum_{n=n_0}^{\infty} \varphi(n) \int_{\varepsilon g^s(n)}^{\infty} p x^{p-1} P\{|\mathcal{N}| \geqslant x\} \mathrm{d}x = \frac{ps}{1-ps} \mathrm{E}|\mathcal{N}|^{\frac{1}{s}}.$$

证　明　由文献 [11] 中命题 5.1 知命题 2.5 成立.

命题 2.6　在定理 1.1 的条件下, 对于固定的 $M > 2$, 当 $p > 0$ 时，有

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{\frac{1}{s}-p} \sum_{n=n_0}^{d(M,\varepsilon)} \varphi(n) \Big| \int_{\varepsilon g^s(n)}^{\infty} p x^{p-1} P\Big\{\frac{|S_n|}{V_n} \geqslant x\Big\} \mathrm{d}x - \int_{\varepsilon g^s(n)}^{\infty} p x^{p-1} P\{|\mathcal{N}| \geqslant x\} \mathrm{d}x \Big| = 0.$$

证　明　显然

$$\begin{aligned}
&\Big| \int_{\varepsilon g^s(n)}^{\infty} p x^{p-1} P\Big\{\frac{|S_n|}{V_n} \geqslant x\Big\} \mathrm{d}x - \int_{\varepsilon g^s(n)}^{\infty} p x^{p-1} P\{|\mathcal{N}| \geqslant x\} \mathrm{d}x \Big| \\
&= \Big| \int_0^{\infty} p(x+\varepsilon g^s(n))^{p-1} P\Big\{\frac{|S_n|}{V_n} \geqslant x+\varepsilon g^s(n)\Big\} \mathrm{d}x \\
&\quad - \int_0^{\infty} p(x+\varepsilon g^s(n))^{p-1} P\{|\mathcal{N}| \geqslant x+\varepsilon g^s(n)\} \mathrm{d}x \Big| \\
&\leqslant \Delta_{n1} + \Delta_{n2} + \Delta_{n3} + \Delta_{n4},
\end{aligned}$$

记 $b_n = \min\{g^s(n), \Delta_n^{-\frac{1}{2p}}\}$, 其中

$$\Delta_{n1} = \int_0^{b_n} p(x+\varepsilon g^s(n))^{p-1} \Big| P\Big\{\frac{|S_n|}{V_n} \geqslant x+\varepsilon g^s(n)\Big\} - P\{|\mathcal{N}| \geqslant x+\varepsilon g^s(n)\} \Big| \mathrm{d}x,$$

$$\Delta_{n2} = \int_{b_n}^{n^{\frac{1}{4}}} p(x+\varepsilon g^s(n))^{p-1} \Big| P\Big\{\frac{|S_n|}{V_n} \geqslant x+\varepsilon g^s(n)\Big\} - P\{|\mathcal{N}| \geqslant x+\varepsilon g^s(n)\} \Big| \mathrm{d}x,$$

$$\Delta_{n3} = \int_{n^{\frac{1}{4}}}^{n^{\frac{1}{2}}} p(x+\varepsilon g^s(n))^{p-1} \Big| P\Big\{\frac{|S_n|}{V_n} \geqslant x+\varepsilon g^s(n)\Big\} - P\{|\mathcal{N}| \geqslant x+\varepsilon g^s(n)\} \Big| \mathrm{d}x,$$

$$\Delta_{n4}=\int_{n^{\frac{1}{2}}}^{\infty}p(x+\varepsilon g^{s}(n))^{p-1}\Big|P\Big\{\frac{|S_n|}{V_n}\geqslant x+\varepsilon g^{s}(n)\Big\}-P\{|\mathcal{N}|\geqslant x+\varepsilon g^{s}(n)\}\Big|\mathrm{d}x.$$

首先估计 Δ_{n1}. 注意到当 $n\leqslant d(M,\varepsilon)$ 时，$\varepsilon g^{s}(n)\leqslant M$, 从而有

$$\begin{aligned}\Delta_{n1}&\leqslant\int_{0}^{\Delta_n^{\frac{-1}{2p}}}p(x+\varepsilon g^{s}(n))^{p-1}\Delta_n\mathrm{d}x\leqslant\Delta_n(\Delta_n^{\frac{-1}{2p}}+\varepsilon g^{s}(n))^{p}\\&\leqslant(\Delta_n^{\frac{1}{2p}}+M\Delta_n^{\frac{1}{p}})^{p}\to 0,\quad \text{当 } n\to\infty.\end{aligned}\tag{2.2}$$

下面估计 Δ_{n2}. 由引理 2.1 和 Markov 不等式知

$$\begin{aligned}\Delta_{n2}&\leqslant\int_{b_n}^{n^{\frac{1}{4}}}p(x+\varepsilon g^{s}(n))^{p-1}\mathrm{e}^{-C(x+\varepsilon g^{s}(n))^{2}}\mathrm{d}x+\int_{b_n}^{n^{\frac{1}{4}}}p(x+\varepsilon g^{s}(n))^{p-1}\frac{C}{(x+\varepsilon g^{s}(n))^{p+1}}\mathrm{d}x\\&\leqslant C\int_{b_n+\varepsilon g^{s}(n)}^{n^{\frac{1}{4}}+\varepsilon g^{s}(n)}t^{p-1}\mathrm{e}^{-Ct^{2}}\mathrm{d}t+\int_{b_n}^{n^{\frac{1}{4}}}\frac{C}{x^{2}}\mathrm{d}x\to 0,\quad \text{当 } n\to\infty.\end{aligned}\tag{2.3}$$

接下来估计 Δ_{n3}. 由引理 2.1 和 Markov 不等式以及 $\varepsilon g^{s}(n)\leqslant Cn^{\frac{1}{2}}$ 知

$$\begin{aligned}\Delta_{n3}&\leqslant C\int_{n^{\frac{1}{4}}}^{n^{\frac{1}{2}}}(x+\varepsilon g^{s}(n))^{p-1}P\Big\{\frac{|S_n|}{V_n}\geqslant n^{\frac{1}{4}}\Big\}\mathrm{d}x+\int_{n^{\frac{1}{4}}}^{n^{\frac{1}{2}}}(x+\varepsilon g^{s}(n))^{p-1}\frac{C}{(x+\varepsilon g^{s}(n))^{p+1}}\mathrm{d}x\\&\leqslant C\int_{n^{\frac{1}{4}}}^{n^{\frac{1}{2}}}(x+\varepsilon g^{s}(n))^{p-1}\mathrm{e}^{-Cn^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}x+\int_{n^{\frac{1}{4}}}^{n^{\frac{1}{2}}}\frac{C}{x^{2}}\mathrm{d}x\\&\leqslant C(n^{\frac{1}{2}}+Cn^{\frac{1}{2}})^{p}\mathrm{e}^{-Cn^{\frac{1}{2}}}+\frac{C}{n^{\frac{1}{4}}}\to 0,\quad \text{当 } n\to\infty.\end{aligned}\tag{2.4}$$

最后来估计 Δ_{n4}. 注意到由 Cauchy 不等式易知

$$\frac{|S_n|}{V_n}\leqslant\sqrt{n}.\tag{2.5}$$

从而由 Markov 不等式知

$$\begin{aligned}\Delta_{n4}&\leqslant C\int_{n^{\frac{1}{2}}}^{\infty}(x+\varepsilon g^{s}(n))^{p-1}\frac{1}{(x+\varepsilon g^{s}(n))^{p+1}}\mathrm{d}x\\&\leqslant C\int_{n^{\frac{1}{2}}}^{\infty}\frac{1}{x^{2}}\mathrm{d}x\to 0,\quad \text{当 } n\to\infty.\end{aligned}\tag{2.6}$$

从而由式 (2.3)—式 (2.6) 知 $\Delta_n'=\Delta_{n1}+\Delta_{n2}+\Delta_{n3}+\Delta_{n4}\to 0$. 由 $\varphi(x)$的单调性, 可证得 $\sum\limits_{n=n_0}^{d(M,\varepsilon)}\varphi(n)\sim\frac{1}{1-ps}M^{1-ps}\varepsilon^{p-\frac{1}{s}}$, 由引理 2.2 (Toeplitz 引理), 易证得

$$\frac{1-ps}{M^{1-ps}\varepsilon^{p-\frac{1}{s}}}\sum_{n=n_0}^{d(M,\varepsilon)}\varphi(n)\Delta_n'\to 0,\quad \text{当 } \varepsilon\to 0.$$

从而进一步可证得命题 2.6 成立.

命题 2.7 在定理 1.1 的条件下，当 $p>0$ 时，有

$$\lim_{M\to\infty}\limsup_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{\frac{1}{s}-p}\sum_{n=d(M,\varepsilon)+1}^{\infty}\varphi(n)\int_{\varepsilon g^s(n)}^{\infty}px^{p-1}P\{|\mathcal{N}|\geqslant x\}\mathrm{d}x=0.$$

证 明 由文献 [11] 中命题 5.3 知命题 2.7 成立.

命题 2.8 在定理 1.1 的条件下，当 $p>0$ 时，有

$$\lim_{M\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{\frac{1}{s}-p}\sum_{n=d(M,\varepsilon)+1}^{\infty}\varphi(n)\int_{\varepsilon g^s(n)}^{\infty}px^{p-1}P\Big\{\frac{|S_n|}{V_n}\geqslant x\Big\}\mathrm{d}x=0.$$

证 明 注意到

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^{\frac{1}{s}-p}\sum_{n=d(M,\varepsilon)+1}^{\infty}\varphi(n)\int_{\varepsilon g^s(n)}^{\infty}px^{p-1}P\Big\{\frac{|S_n|}{V_n}\geqslant x\Big\}\mathrm{d}x\\
&\leqslant\varepsilon^{\frac{1}{s}-p}\sum_{n=d(M,\varepsilon)+1}^{\infty}\varphi(n)\int_{0}^{\infty}p(x+\varepsilon g^s(n))^{p-1}P\Big\{\frac{|S_n|}{V_n}\geqslant x+\varepsilon g^s(n)\Big\}\mathrm{d}x\\
&=B_1+B_2+B_3,
\end{aligned}$$

其中

$$B_1=\varepsilon^{\frac{1}{s}-p}\sum_{n=d(M,\varepsilon)+1}^{\infty}\varphi(n)\int_{0}^{n^{\frac{1}{4}}}p(x+\varepsilon g^s(n))^{p-1}P\Big\{\frac{|S_n|}{V_n}\geqslant x+\varepsilon g^s(n)\Big\}\mathrm{d}x,$$

$$B_2=\varepsilon^{\frac{1}{s}-p}\sum_{n=d(M,\varepsilon)+1}^{\infty}\varphi(n)\int_{n^{\frac{1}{4}}}^{n^{\frac{1}{2}}}p(x+\varepsilon g^s(n))^{p-1}P\Big\{\frac{|S_n|}{V_n}\geqslant x+\varepsilon g^s(n)\Big\}\mathrm{d}x,$$

$$B_3=\varepsilon^{\frac{1}{s}-p}\sum_{n=d(M,\varepsilon)+1}^{\infty}\varphi(n)\int_{n^{\frac{1}{2}}}^{\infty}p(x+\varepsilon g^s(n))^{p-1}P\Big\{\frac{|S_n|}{V_n}\geqslant x+\varepsilon g^s(n)\Big\}\mathrm{d}x.$$

由条件 (A4), 当 ε 充分小, n 充分大时, $\varepsilon g^s(n)\leqslant\frac{\delta}{2}n^{\frac{1}{2}}$, 从而由引理 2.1 可知

$$\begin{aligned}
B_1&\leqslant\varepsilon^{\frac{1}{s}-p}\sum_{n=d(M,\varepsilon)+1}^{\infty}\varphi(n)\int_{0}^{n^{\frac{1}{4}}}p(x+\varepsilon g^s(n))^{p-1}\mathrm{e}^{-C(x+\varepsilon g^s(n))^2}\mathrm{d}x\\
&\leqslant\varepsilon^{\frac{1}{s}-p}\int_{d(M,\varepsilon)}^{\infty}\frac{g'(t)}{g^{ps}(t)}\int_{\varepsilon g^s(x)}^{\infty}px^{p-1}\mathrm{e}^{-Cx^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\leqslant C\int_{M^s}^{\infty}y^{\frac{1}{s}-p-1}\int_{y}^{\infty}x^{p-1}\mathrm{e}^{-Cx^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&\leqslant C\int_{M^s}^{\infty}x^{p-1}\mathrm{e}^{-Cx^2}\int_{M^s}^{x}y^{\frac{1}{s}-p-1}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\
&\leqslant C\int_{M^s}^{\infty}x^{\frac{1}{s}-1}\mathrm{e}^{-Cx^2}\mathrm{d}x\to 0,\quad 当\ M\to\infty.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_2 &\leqslant \varepsilon^{\frac{1}{s}-p}\sum_{n=d(M,\varepsilon)+1}^{\infty}\varphi(n)\int_{n^{\frac{1}{4}}}^{n^{\frac{1}{2}}}p(x+\varepsilon g^s(n))^{p-1}P\Big\{\frac{|S_n|}{V_n}\geqslant n^{\frac{1}{4}}+\varepsilon g^s(n)\Big\}\mathrm{d}x\\
&\leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{s}-p}\sum_{n=d(M,\varepsilon)+1}^{\infty}\varphi(n)(n^{\frac{1}{2}}+\varepsilon g^s(n))^p\mathrm{e}^{-C(n^{\frac{1}{4}}+\varepsilon g^s(n))^2}\\
&\leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{s}-p}\sum_{n=d(M,\varepsilon)+1}^{\infty}\varphi(n)n^{\frac{p}{2}}\mathrm{e}^{-Cn^{\frac{1}{2}}}\mathrm{e}^{-C\varepsilon^2g^{2s}(n)}\\
&\leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{s}-p}\sum_{n=d(M,\varepsilon)+1}^{\infty}\varphi(n)\mathrm{e}^{-C\varepsilon^2g^{2s}(n)}\\
&\leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{s}-p}\int_{d(M,\varepsilon)}^{\infty}\frac{g'(x)}{g^{ps}(x)}\mathrm{e}^{-C\varepsilon^2g^{2s}(x)}\mathrm{d}x\\
&\leqslant C\int_{M^{2s}}^{\infty}y^{\frac{1}{2s}-\frac{p}{2}-1}\mathrm{e}^{-Cy}\mathrm{d}y\to 0,\quad 当\ M\to\infty.\end{aligned}$$

由式 (2.5) 易知 $B_3=0$. 命题证明完毕.

定理 1.1 的证明　由命题 2.1—命题 2.4 和三角不等式, 可证得式 (1.1) 成立.

由命题 2.5—命题 2.8 和三角不等式, 可证得式 (1.2) 成立.

最后来证明式 (1.3). 注意到当 $p=0$ 时, $E|\frac{S_n}{\sqrt{n}}|^pI\{|S_n|\geqslant\varepsilon\sqrt{n}g^s(n)\}=P\{|S_n|\geqslant\varepsilon\sqrt{n}g^s(n)\}$, 此时式 (1.3) 即为式 (1.1). 因此只需验证当 $\frac{1}{s}>p>0$ 时式 (1.3) 成立即可. 注意到此时

$$\begin{aligned}\sum_{n=n_0}^{\infty}\varphi(n)\mathrm{E}|\frac{S_n}{\sqrt{n}}|^pI\{|S_n|\geqslant\varepsilon\sqrt{n}g^s(n)\}&=\varepsilon^p\sum_{n=n_0}^{\infty}\varphi(n)g^{ps}(n)P\{|S_n|\geqslant\varepsilon\sqrt{n}g^s(n)\}\\
&\quad+\sum_{n=n_0}^{\infty}\varphi(n)\int_{\varepsilon g^s(n)}^{\infty}px^{p-1}P\{|S_n|\geqslant\sqrt{n}x\}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

显然式 (1.3) 即为式 (1.1) 与式 (1.2) 之和, 从而定理证明完毕.

[参　考　文　献]

[1] GINÉ E, GÖTZE F, MASON D M. When is the Student t-statistic asymptotically standard normal? [J]. Ann Probab, 1997, 25(3): 1514-1531.

[2] SHAO Q M. Self-normalized large deviations[J]. Ann Probab, 1997, 25, 285-328.

[3] JING, B Y, WANG Q Y, SHAO Q M. Self-normalized Cramér-type large deviations for independent random variables[J]. Ann Probab, 2003, 31: 2167-2215.

[4] CSÖRGŐ M, SZYSZKOWICZ B, WANG Q Y. Darling-Erdös theorem for self-normalized partial sums[J]. Ann Probab, 2003, 31: 676-692.

[5] 刘影,张勇,董志山. ϕ混合序列自正则加权和的中心极限定理[J]. 吉林大学学报(理学版), 2008, 46(4): 643-648.

[6] SPĂTARU A. Precise asymptotics in Spitzers Law of large numbers[J]. J Theoret Probab, 1999, 12: 811-819.

[7] GUT A, SPĂTARU A. Precise asymptotics in the Baum-Katz and Davis law of large numbers[J]. J Math Anal Appl, 2000, 248: 233-246.

[8] 成凤旸, 王岳宝. 独立与 NA 列部分和的精致渐近性 [J]. 数学学报, 2004, 47(5): 965-972.

[9] ZHAO Y X, TAO J X. Precise asymptotics in complete moment convergence for self-normalized sums[J]. Comput Math Appl, 2008, 56(7): 1779-1786.

(下转第 159 页)

或者 $G \neq 0$, 或者 $G \equiv 0$. 前者与 $G(1)=0$ 矛盾, 后者与 $G_n(0)=(\frac{c_n}{e_n})^{k-1}H_n(0)\to\infty$ 矛盾.

至此说明假设不成立, 故 $\{f_n(z)\}$ 在 $z=0$ 处正规. 完成归纳证明, 则定理1结论 成立.

致谢　作者衷心感谢导师庞学诚教授对本文的悉心指导!

[参　考　文　献]

[1] HAYMAN W K. Picard values of meromorphic fuctions and their derivatives[J]. Ann Math, 1959, 70: 9-42.
[2] PANG X C. Bloch's principle and normal criterion[J]. Sci Sinica, 1989, 32: 782-791.
[3] GU Y X. On normal families of meromorphic fuctions[J]. Sci Sinica, 1797, Special Issue 1 on Math: 267-274.
[4] YANG L. Normal families of meromorphic fuctions[J]. Sci Sinica, 1986, A(9): 898-908.
[5] SCHWICK W. On Hayman's alternative for families of meromorphic functions[J]. Complex Variables Theory Appl, 1997, 32: 51-57.
[6] PANG X C, YANG D G, ZALCMAN L. Normal families and omitted fuctions[J]. Indiana University Mathematics Journal, 2005, 54: 223-235.
[7] BERGWEILER W, PANG X C. On the derivative of meromorphic functions with multiple zeros[J]. J Math Anal Appl, 2003, 278: 285-292.
[8] YANG P, PANG X C. Derivatives of meromorphic functions with multiple zeros and elliptic functions[J]. (to be published)

(上接第 153 页)

[10] ZANG Q P. A limit theorem for the moment of self-normalized sums[J]. J Inequal Appl, 2009, Art ID 957056, 10pp.
[11] ZHANG Y, YANG X Y, DONG Z S. A general law of precise asymptotics for the complete moment convergence[J]. Chinese Annals of Mathematics Series B, 2009, 30(1): 77-90.
[12] ZANG Q P. A general law of complete moment convergence for self-normalized sums[J]. J Inequal Appl, 2010, Art. ID 760735, 11 pp.
[13] ZANG Q P. A kind of complete moment convergence for self-normalized sums[J]. Comput Math Appl, 2010, 60(6): 1803-1809.
[14] GRIFFIN P S, KUELBS J. Some extensions of the LIL via self-normalized sums[J]. Ann Probab, 1991, 19: 380-395.
[15] HALL P, HEYDE C C. Martingale Limit Theory and Its Applications[M]. New York: Academic Press, 1980.
[16] TAN X L, YANG X Y. A general result on precise asymptotics for linear processes of positively associated sequences[J]. Appl Math J Chinese Univ Ser B, 2008, 23(2): 190-196.