文章编号: 1000-5641(2013)01-0007-04

较大亏格曲面嵌入图的线性荫度

吕长青, 房永磊

(枣庄学院 数学与统计学院, 山东 枣庄 277160)

摘要: 通过度再分配的方法研究嵌入到曲面上图的线性荫度. 给定较大亏格曲面 Σ 上嵌入图 G, 如果最大度 $\Delta(G) \geqslant (\sqrt{45-45\varepsilon}+10)$ 且不含 4-圈, 则其线性荫度为 $\lceil\frac{\Delta}{2}\rceil$, 其中若 Σ 是亏格为 $h(h>1)$ 的可定向曲面时 $\varepsilon=2-2h$, 若 Σ 是亏格为 $k(k>2)$ 的不可定向曲面时 $\varepsilon=2-k$. 改进了吴建良的结果, 作为应用证明了边数较少图的线形荫度.

关键词: 线性荫度; 曲面; 嵌入图; 欧拉示性数

中图分类号: O157.5 **文献标志码**: A **DOI:** 10.3969/j.issn.1000-5641.2013.01.002

Linear arboricity of an embedded graph on a surface of large genus

LYU Chang-qing, FANG Yong-lei

(*School of Mathematics and Statistics, Zaozhuang University, Zaozhuang Shandong* 277160, *China*)

Abstract: The linear arboricity of a graph G is the minimum number of linear forests which partition the edges of G. This paper proved that if G can be embedded on a surface of large genus without 4-cycle and $\Delta(G) \geqslant (\sqrt{45-45\varepsilon}+10)$, then its linear arboricity is $\lceil\frac{\Delta}{2}\rceil$, where $\varepsilon=2-2h$ if the orientable surface with genus $h(h>1)$ or $\varepsilon=2-k$ if the nonorientable surface with genus $k(k>2)$. It improves the bound obtained by J. L. Wu. As an application, the linear arboricity of a graph with fewer edges were concluded.

Key words: linear arboricity; surface; embedded graph; Euler characteristic

0 引 言

本文研究的图都是简单连通无向图, 所有的专业术语均可参考文献 [2].

设图 $G=(V,E)$, 令 $N(v)=\{u\,|\,uv\in E(G)\}$, $N_k(v)=\{u\,|\,u\in N(v),\ d(u)=k\}$, 这里 $d(v)=|N(v)|$ 是点 v 的度. 记 $\Delta(G)$ 和 $\delta(G)$ 分别表示图的最大度与最小度, 如果一个点的度为 k 称该点为 $k-$点.

曲面是一个紧的连通的 2-维闭流形. 曲面可分为可定向曲面与不可定向曲面. 一个可定向曲面 $S_h(h\geqslant 0)$ 是由一个球面添上 h 个环柄得到. 不可定向曲面 $N_k(k\geqslant 1)$ 是由一个球面挖掉 k 个圆盘而分别补上 Möbius 带得到.

如果一个图画在曲面 Σ 上使得它的边仅仅在端点处相交, 则称这个图嵌入到曲面 Σ 上. 图 G 嵌入曲面 Σ 上称为 **2-**胞腔嵌入, 如果 $\Sigma-G$ 中每个分支同胚于一个开圆盘. 此时, 每个

收稿日期: 2012-04

基金项目: 国家自然科学基金(11101357, 61075033); 山东省教育厅高校科研发展计划项目(J09LA57)

作者简介: 吕长青, 男, 副教授, 研究方向为图论、运筹学. E-mail: cqiqc1999@126.com.

分支称为 G 在曲面 Σ 上嵌入的一个面. 一个嵌入图的面度是指与这个面相关联的边的个数, 如果一个面 f 的度为 k, 则称 f 为 k-面; 如果一个面 f 的度大于等于 k, 则称 f 为 k^+-面.

由于不连通图无 2-剖腔嵌入, 所以如无特别说明以下提到的图均为连通图.

一个曲面 Σ 的 Euler 示性数 $\varepsilon(\Sigma)$ 定义如下: 当 $\Sigma = S_h$ 时, $\varepsilon(\Sigma) = 2 - 2h$; 当 $\Sigma = N_k$ 时, $\varepsilon(S) = 2 - k$.

Euler公式[3] 设 G 是一个 2-胞腔嵌入在曲面 Σ 上的图, 如果 G 有 $V(G)$ 个顶点, $E(G)$ 条边, 在曲面 S 上有 $F(G)$ 个面, 则 $V(G) - E(G) + F(G) = \varepsilon$.

称一个映射 $\varphi{:}\to \{1, 2, \cdots, t\}$ 为图 G 的一个 $t-$ 线性染色, 如果对于任意的 $1 \leqslant \alpha \leqslant t$ 时 $(V(G), \varphi^{-1}(\alpha))$ 的边导出子图是一个线森; 一个图的线性荫度是其所有 $t-$线性染色中最小的数 t, 记作 $\mathrm{la}(G)$. Akiyama, Exoo 和 Harary 在文献 [4] 给出了对任意的正则图 G, 其线性荫度满足 $\mathrm{la}(G) = \lceil \frac{\Delta(G)+1}{2} \rceil$. 由于对任意的图 G, $\mathrm{la}(G) \geqslant \lceil \frac{\Delta(G)}{2} \rceil$, 由此可得到著名的线性荫度猜想:

猜想A[4] 对任意的图 G, $\lceil \frac{\Delta(G)}{2} \rceil \leqslant \mathrm{la}(G) \leqslant \lceil \frac{\Delta(G)+1}{2} \rceil$.

在图 G 的边 uv 插入顶点 $w(w \notin v(G))$ 得到的图 G^* 称为 G 的剖分图. 其中 $V(G^*) = V(G) \bigcup \{w\}, E(G^*) = E(G) \setminus uv \bigcup \{uw, wv\}$, 如果 $H1, H2$ 是同一个图的剖分图, 那么称 $H1$ 与 $H2$ 是同胚的. 如果图 G 不含有与 K_4 同胚的子图则称 G 为系列平行图(Series-parallel graph), 简记为SP图.

对于一些图类, 猜想A被证明是正确的, 如完全二部图, Halin图、系列平行图、完全正则多部图等[4,5]; 对于平面图, 猜想 A 是成立的[6]. 吴建良在文献[7]中证明了平面图 G, 如果 $\Delta \geqslant 13$, 则 $\mathrm{la}(G) = \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil$, 并将这个结果推广到欧拉示性数 $\varepsilon \geqslant 0$ 的曲面嵌入图; 吴在文献[1]又给出了当欧拉示性数 $\varepsilon \leqslant 0$, 当 $\Delta(G) \geqslant \sqrt{46 - 54\varepsilon} + 19$ 时, $\mathrm{la}(G) = \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil$. 本文改进了文献[1]中最大度的下界(见表 1), 得到了定理1.

表 1 欧拉示性数 $-6 \leqslant \varepsilon \leqslant -1$ 曲面嵌入图 G 结果

Tab. 1 Result on embedded graph G on a surface of Euler characteristic $-6 \leqslant \varepsilon \leqslant -1$

ε		-1	-2	-3	-4	-5	-6
$H(\varepsilon)$	$H(\varepsilon) = \lfloor \frac{7+\sqrt{49-24\varepsilon)}}{2} \rfloor$	6	7	7	8	9	11
文献[1]结果	$\Delta(G) \geqslant \sqrt{46 - 54\varepsilon} + 19$	29	32	34	36	37	39
我们的结果	$\Delta(G) \geqslant \sqrt{45 - 45\varepsilon} + 10$	20	22	24	25	27	28

定理 1 设图 G 是不含 4 圈的曲面嵌入图, 且 $\varepsilon \leqslant 0$, 当 $\Delta(G) \geqslant (\sqrt{45 - 45\varepsilon} + 10)$ 时, $\mathrm{la}(G) = \lceil \frac{\Delta(G)}{2} \rceil$.

1 引 理

假设 G 是使定理 1 中的结论不成立的最小反例, 则有如下引理成立(文献[1]):

引理 1.1[1] 对于任意的边 $uv \in E(G)$, 则 $d_G(u) + d_G(v) \geqslant \Delta(G) + 2$.

由引理 1.1, 可知 $\delta(G) \geqslant 2$ 且任意两个 2-点不相邻.

引理 1.2[1] G 不含偶圈 $v_0v_1, \cdots, v_{2n-1}v_0$, 使得

$$d(v_1) = d(v_3) = \cdots = d(v_{2n-1}) = 2, \quad \text{且} \max_{0 \leqslant i < n} |N_2(v_{2i})| \geqslant 3.$$

设 G_2 是由 2-点相关联边的导出子图, M 是 G 中饱和 G_2 的 2-点的匹配. 如果 $uv \in M$ 且 $d(u)=2$, 那么称 v 为 u 的一个 2-master. 显然每个 2-点都有一个 2-master, 它必然是最大度点, 每一个最大度点至多是一个 2-点的 2-master.

对于整数 $t\,(3 \leqslant t \leqslant \lfloor\frac{\Delta(G)}{2}\rfloor)$, 令 $X_t \subseteq \{v|\, 2 \leqslant d_G(v) \leqslant t\}$ 以及 $Y_t = N(X_t)$. 由引理 1.1 知道 X_t 是图 G 边独立集. 令 K 是以 X_t 与 Y_t 作为它的分部的图 G 的导出二部子图. 那么对于 $u \in X_t$ 有 $d_K(u) = d_G(u)$. 对于任意的 $v \in Y_t$ 如果 $d_K(v) \geqslant d_G(v) + 2(t - \lceil\frac{\Delta(G)}{2}\rceil)$ 那么称 K 是一个 t-alternating.

引理 1.3[1]　如果 $3 \leqslant t \leqslant \lceil\frac{\Delta(G)}{2}\rceil)$, 则图 G 不含 t-alternating.

引理 1.4[1]　如果 $X_t \neq \emptyset$, 那么存在 K_t 的二部子图 M_t 使得对于每一个 $x \in X_t$ 时 $d_{M_t}(x) = 1$, 且对任意的 $y \in Y_t$, $0 \leqslant d_{M_t}(y) \leqslant 2t-1$.

在图 G 中, 如果 $xy \in M_t$, 则称 y 是 x 的 t-master. 由引理 1.4 可得对于任意的 i 和 j $(2 \leqslant i \leqslant j \leqslant 3)$, 则每一个 i-点都有 j-master.

2　定理及其证明

定理 1　设图 G 是不含 4 圈的曲面嵌入图, 且 $\varepsilon \leqslant 0$, 当 $\Delta(G) \geqslant (\sqrt{45-45\varepsilon}+10)$ 时, $\mathrm{la}(G) = \lceil\frac{\Delta(G)}{2}\rceil$.

证　明　假设图 G 是使定理不成立的最小反例. 由欧拉公式可得

$$\frac{2}{3}\sum_{v\in V}(d(v)-5) + \sum_{f\in F}\left(d(f)-\frac{10}{3}\right) = -\frac{10}{3}(|V(G)|-|E(G)|+|F(G)|) = -\frac{10}{3}\varepsilon > 0.$$

对于任意的 $x \in V(G)$, 定义 $\mathrm{ch}(x) = \frac{2}{3}(d(x)-5)$; 对于任意的 $x \in F(G)$, 定义 $\mathrm{ch}(x) = d(x) - \frac{10}{3}$. 根据下面给出的规则, 对于每一个 $x \in V(G) \cup F(G)$, 重新分配新的值记作 $\mathrm{ch}'(x)$. 由于重新分配值不影响整个的和, 所以

$$\sum_{x\in V(G)\cup F(G)} \mathrm{ch}'(x) = \sum_{x\in V(G)\cup F(G)} \mathrm{ch}(x) = -\frac{10}{3}\varepsilon. \qquad (*)$$

如果对每一个 $x \in V(G) \cup F(G)$ 能够得到 $\mathrm{ch}'(x) > -\frac{10}{3}\varepsilon$. 这就得到了矛盾. 下面给出度重新分配值得规则:

R1 对于任意的 i 和 j $(2 \leqslant i \leqslant j \leqslant 4)$, 每一个 i-点从它的 j-masters 接受值 1;

R2 如果 $5 \leqslant d(v) \leqslant \Delta(G)-2$, 那么 v 点即不接受值也不分值;

R3 设 f 为 3-面, f 从其相邻的 4^+-面通过它的每一个边接受值 $\frac{1}{9}$.

设 f 是图 G 的面, 如果 $d(f) = 3$. 那么 $\mathrm{ch}'(f) = \mathrm{ch}(f) + 3 \times \frac{1}{9} = 0$. 假设 $d(f) \geqslant k$, $k \geqslant 4$. f 至多与 k 个 3-面相邻, 则由 R3 得 $\mathrm{ch}'(f) \geqslant \mathrm{ch}(f) - k \times \frac{1}{9} \geqslant 0$, 所以可以得到对于每个面 $f \in F$ 有 $\mathrm{ch}'(f) \geqslant 0$.

断言　对任意的 $v \in V$, 则 $\mathrm{ch}'(v) \geqslant 0$; 特别的如果 $d(v) \geqslant \lceil\frac{\Delta(G)}{3}\rceil$, 则 $\mathrm{ch}'(v) \geqslant \frac{2}{3}(\lceil\frac{\Delta(G)}{3}\rceil - 5)$.

断言的证明: 如果 $2 \leqslant d(v) \leqslant 4$, 那么 $\mathrm{ch}'(v) \geqslant 0$, 这是因为 v 从它的 j-masters接受值为 $5-d(v)$, 这里 $j = d(v), d(v)+1, \cdots, 4$; 如果 $d(v) = 5$, 那么 $\mathrm{ch}'(v) = 0$; 如果 $6 \leqslant d(v) \leqslant \Delta(G)-3$, 那么 v 既不接受也不分配值, 对于每一个 $u \in N(v)$ 由引理 1.1 可知 $d_G(u) \geqslant 5$, 所以 $\mathrm{ch}'(v) = \mathrm{ch}(v) = d(v) - 5 \geqslant 0$; 如果 $d(v) \geqslant \lceil\frac{\Delta(G)}{3}\rceil$ 则 $d(v) - 5 \geqslant \lceil\frac{\Delta(G)}{3}\rceil - 5$. 如果 $d(v) = \Delta(G)-2$, 那么 v 的邻点的度至少为 4, 由引理 1.3 可知 v 至多是 7 个点的 4-master, 从而 $\mathrm{ch}'(v) \geqslant \frac{2}{3}((\Delta(G)-2-5)-7) = \frac{2}{3}(\Delta(G)-14)$; 如果 $d(v) = \Delta(G)-1$, 那么对于 $u \in$

$N(v)$ 有 $d_G(u) \geqslant 3$, 这可以推出 v 是7个点的4-master和5个点的3-master, 所以 $\mathrm{ch}'(v) \geqslant \frac{2}{3}(\Delta(G)-18)$, 如果 $d(v)=\Delta(G)$, 那么对于 $u \in N(v)$ 有 $d_G(u) \geqslant 2$, 这可以推出 v 是7个点的4-master和5个点的3-master和1个点的2-master, 所以 $\mathrm{ch}'(v) \geqslant \frac{2}{3}(\Delta(G)-5)-13)$, 从而得到如果 $d_G(v) \geqslant \Delta(G)-2$, $\mathrm{ch}'(v) \geqslant \frac{2}{3}((\Delta(G)-13)-5)$. 由于 $\Delta(G) \geqslant (\sqrt{45(1-\varepsilon)}+10)$, 所以 $\Delta(G)-13 \geqslant \lceil\frac{\Delta(G)}{3}\rceil$, 因此当 $d(v) \geqslant \lceil\frac{\Delta(G)}{3}\rceil$ 时 $\mathrm{ch}'(v) \geqslant \frac{2}{3}(\lceil\frac{\Delta(G)}{3}\rceil-5)$. 所以断言成立.

令 $U=\{u|\, d_G(u) \leqslant \lfloor\frac{\Delta(G)}{3}\rfloor\}$, $W=N(U)$. 由引理1.3可知 U 是 G 的独立集. 设 F 是 G 导出二部子图, U 和 W 是 F 的分部. 如果 $|V(G)\backslash U| \leqslant \lfloor\frac{\Delta(G)}{3}\rfloor+1$, 那么对于每个点 $w \in W$, $d_F(w)=d_G(w)-d_{G-U}(w) \geqslant d_G(w)-\lfloor\frac{\Delta(G)}{3}\rfloor \geqslant d_G(w)-2\lceil\frac{\Delta(G)}{2}\rceil+2\lceil\frac{\Delta(G)}{3}\rceil$, 也就是, F 是图 G 的 $(\lceil\frac{\Delta(G)}{3}\rceil)$-alternating, 与引理1.3矛盾. 所以 $|V(G)\backslash U| \geqslant \lceil\frac{\Delta(G)}{3}\rceil+2$. 这样可得

$$
\begin{aligned}
\sum_{v\in V(G)} \mathrm{ch}(v) &= \sum_{v\in V(G)} \mathrm{ch}'(v) \\
&\geqslant \frac{2}{3}\Big(\Big\lceil\frac{\Delta(G)}{3}\Big\rceil+2\Big)\Big(\Big\lceil\frac{\Delta(G)}{3}\Big\rceil-5\Big) \\
&\geqslant \frac{2}{3}\Big(\Big\lceil\frac{(\sqrt{45-45\varepsilon}+10)}{3}\Big\rceil+2\Big)\Big(\Big\lceil\frac{(\sqrt{45-45\varepsilon}+10)}{3}\Big\rceil-5\Big) > -\frac{10}{3}\varepsilon,
\end{aligned}
$$

从而可得

$$
\sum_{x\in V(G)\cup F(G)} \mathrm{ch}(x) = \sum_{x\in V(G)\cup F(G)} \mathrm{ch}'(x) \geqslant \sum_{v\in V(G)} \mathrm{ch}'(v) > -\frac{10}{3}\varepsilon.
$$

矛盾. 这样就完成了定理1证明.

称两个3-圈不相邻是指这两个3-圈没有公共边, 称两个3-圈不相交是指这两个3-圈没有公共顶点.

类似于定理1的证明可得定理2.

定理2 设图 G 是不含相邻3-圈的曲面嵌入图, 且 $\varepsilon \leqslant 0$, 当 $\Delta(G) \geqslant (\sqrt{45-45\varepsilon}+10)$ 时, $\mathrm{la}(G)=\lceil\frac{\Delta(G)}{2}\rceil$.

由于3-圈不相交, 可知3-圈不相邻, 由定理2可得推论3.

推论3 设图 G 是不含相交3-圈的曲面嵌入图, 且 $\varepsilon \leqslant 0$, 当 $\Delta(G) \geqslant \sqrt{45-45\varepsilon}+10$ 时, $\mathrm{la}(G)=\lceil\frac{\Delta(G)}{2}\rceil$.

由定理1可得边数较少图的线性荫度推论4.

推论4 设图 G 是欧拉示性数 $\varepsilon \leqslant 0$ 的曲面嵌入图, 若 $|E| \leqslant |V|+\frac{\Delta(G)}{2}-9$, 则 $\mathrm{la}(G)=\lceil\frac{\Delta(G)}{2}\rceil$.

证 明 由 $|E| \leqslant |V|+\frac{\Delta(G)}{2}-9$, 有 $|E|-|V| \leqslant \frac{\Delta(G)}{2}-9$, 从而 $|E|-|V|-|F| \leqslant \frac{\Delta(G)}{2}-9$, 由欧拉公式可知 $-\varepsilon \leqslant \frac{\Delta(G)}{2}-9$, 所以 $\Delta(G) \geqslant -2\varepsilon+18$, 又因为 $-2\varepsilon+18 > \sqrt{45-45\varepsilon}+10$, 所以 $\Delta(G) \geqslant \sqrt{45-45\varepsilon}+10$, 由定理1可得 $\mathrm{la}(G)=\lceil\frac{\Delta(G)}{2}\rceil$.

[参 考 文 献]

[1] WU J L. The linear arboricity of graphs on surfaces of negative Euler characteristic[J]. SIAM J Discrete Math 2008, 23: 54-58.

[2] BONDY J A, MURTY U S R. Graph Theory with Applications[M]. New York: Macmilan Ltd Press, 1976.

(下转第23页)

[20] FRADELIZI M, MEYER M. Functional inequalities related to Mahler's conjecture[J]. Monatsh Math, 2010, 159: 13-25.
[21] GROEMER H. Geometric Applications of Fourier Series and Spherical Harmonics[M]. New York: Cambridge University Press, 1996.
[22] KOLDOBSKY A. Fourier Analysis in Convex Geometry[M]. Providence, RI: Amer Math Soc, 2005.
[23] SCHNEIDER R. Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.
[24] WANG Z, GUO D. Special Functions[M]. Singapore: World Scientific Publishing Co, 1989.
[25] ANDREWS G, ASKEY R, ROY R. Special Functions[M]. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2000.
[26] AKHIEZER N I. The Classical Moment Problem, and Some Related Questions in Analysis[M]. Edinburgh: Oliver and Boyd, 1965.

(上接第 10 页)

[3] MOHAR B, THOMASSEN C. Graphs on Surfaces[M]. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 2001: 85-85
[4] AKIYAMA J, EXOO G, HARARY F. Covering and packing in graphs III: Cyclic and acyclic invariants[J]. Math Slovaca, 1980, 30: 405-417.
[5] AÏ-DJAFER H. Linear arboricity for graphs with multiple edges[J]. J Graph Theory 1987, 11: 135-140.
[6] WU J L, WU Y W. The linear arboricity of planar graphs of maximum degree seven are four[J] J Graph Theory,
[7] WU J L. On the linear arboricity of planar graphs[J]. J Graph Theory, 1999, 31: 129-134.
[8] WU J L. Some path decompositions of Halin graphs[J]. J Shandong Mining Institute, 1998, 17: 92-96. (in Chinese).
[9] WU J L. The linear arboricity of series-parallel graphs[J]. Graph and Combinatorics, 2000, 16: 367-372.
[10] WU J L, LIU G Z, WU Y L. The linear arboricity of composition graphs[J]. Journal of System Science and Complexity, 2002, 15(4): 372-375.
[11] AKIYAMA J, EXOO G, HARARY F. Covering and packing in graphs IV: Linear arboricity[J]. Networks, 1981, 11: 69-72.