

文章编号: 1000-5641(2012)01-0121-09

基于不确定波动率的非套利流动模型数值解法

牛成虎, 周圣武

(中国矿业大学 理学院, 徐州 221116)

摘要: 通过引入两种不确定波动率, 将已有非流动市场下的期权定价模型推广到更一般的情形. 由于模型比较复杂, 难以求得解析解, 通过构建相应的差分方程, 讨论了模型的数值解法, 并对算法的稳定性、相容性给予了证明. 最后, 数值实例比较分析了各个变量对期权价格的影响, 结果表明, 文算法放宽了对步长的要求, 在较少的运算量下可以得到较满意的数值结果.

关键词: 非流动市场; 不确定波动率; 数值解; 期权; 差分格式

中图分类号: O211, F830.9 文献标识码: A DOI: 10.3969/j.issn.1000-5641.2012.01.016

Numerical solution of a non-arbitrage liquidity model based on uncertain volatility

NIU Cheng-hu, ZHOU Sheng-wu

(College of Sciences, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221116, China)

Abstract: The option pricing model in illiquidity markets was expanded to general situations by introducing two kinds of uncertain volatility models. As it is difficulty to get analytical solutions for the model in complicated cases, a numerical solution was discussed by establishing corresponding differential equations; and the stability and consistency of the solution were proved. Finally, the influence of some parameters to the solution was provided in numerical examples. The results show that the algorithm reduced the restriction on step-length requirements, and satisfactory approximation can be found with less computation.

Key words: illiquid markets; uncertain volatility; numerical solution; option; difference scheme

0 引 言

在金融市场中, Black-Scholes模型^[1]的重要作用得到了广泛的认可, 但是建立这个模型的一个重要假设——完全流动市场, 与实际情况是不相符的. 大多数的期权定价模型都是在期权交易者对标的资产价格毫无影响(无论这样的交易有多大)的假设下建立的, 但这种理想环境在实际的交易中并不存在. 每次重大消息的产生或者大额交易的投放都会带

收稿日期: 2010-12

基金项目: 中央高校基本科研业务费专项资金(2010LKSX03)

第一作者: 牛成虎, 男, 硕士研究生, 研究方向为金融数学. E-mail: nch2005@126.com.

来市场较大的波动. 另一方面, 在 Black-Scholes 模型中, 波动率 σ 是一个非常重要的参数, 期权价格对其变化十分敏感, 但模型却假设其为一个固定的常数. 事实上, 不同敲定价格和不同期限的期权定价模型得到标的资产的隐含波动率 σ 却是一个关于 K, T 的二元函数, 即 $\sigma = \sigma(K, T)$, 也就是常说的波动率微笑. 近几年, 在金融风险管理中, 市场流动性问题受到大量学者的关注, 他们分别从不同角度对这一问题做了探讨, 并对非流动市场中期权定价问题的建模、求解方法做出了讨论^[2-4].

本文在 Bakstein 和 Howison^[5-6]建立的非套利流动模型基础上, 重点关注该模型的数值计算过程, 将原方程常数波动率的情况推广成不确定波动率的情形, 并建立了相应的隐式差分算法. 数值结果表明, 本文方法是有效、稳定的.

1 非流动市场下期权定价模型

Black-Scholes 模型建立在两个基本假设之上: 其一是市场无摩擦的, 标的股票在交易过程中没有交易费用或税收, 在期权有效期内没有红利支付, 所有证券都是高度可分的; 其二是所处的金融市场为完全市场, 即一个高度流动的市场, 交易者可以随意进出市场, 且无论发生的交易额多大都不会影响市场交易价格. 但这样的假设是不存在的, 在实际市场上, 交易费、税收总会随着金融资产的交易而产生, 大量交易者的进出以及大额交易的发生对市场总会产生或多或少的影响. 所以, Black-Scholes 模型只是期权定价模型的特殊情况.

Bakstein 和 Howison^[5-6]对以上两个假设做了拓展, 将 Black-Scholes 模型推广到更一般的情况. 但“不存在无风险套利机会”等假设仍是满足的, 该非套利流动模型可简单描述如下.

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \lambda \sigma^2 S^3 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)^2 + \frac{1}{2}\lambda^2 \mu^2 \sigma^2 S^4 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)^3 + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \\ V(S, T) = \max(S - K, 0), \end{cases} \quad (1)$$

其中 λ 为股票价格弹性, 用来度量市场深度; μ 为平均交易价格到下一报价的变化测度. 当 $\lambda = 0$ 且 $\mu = 0$ 时, 方程(1)便可以退化成一般的 Black-Scholes 模型. Casabán^[7]等给出了该模型的数值解, 但其计算模型为显格式, 对稳定条件要求比较苛刻, 时间步长量级小到 $1e-5$, 导致计算量非常大, 并且在股价较大时, 所求得的期权价格波动较大, 偏离实际价值较远.

此时的波动率 σ 为常数, 而股价实际的波动不可能一成不变. 考虑更一般的情况, 我们引入不确定波动率, 1998年, Barles 和 Soner^[8]给出了一种比较复杂的波动率修正模型. 他们利用指数效用函数来刻画投资者的行为, 波动率被修正成以下非线性方程:

$$\hat{\sigma}^2 = \sigma_0^2 [1 + \Psi(e^{r(T-t)} a^2 S^2 V_{SS})]. \quad (2)$$

其中 Ψ 满足以下非线性初值问题,

$$\Psi'(\Lambda) = \frac{\Psi(\Lambda) + 1}{2\sqrt{\Lambda\Psi(\Lambda) - \Lambda}}, \quad \Lambda \neq 0, \quad \Psi(0) = 0. \quad (3)$$

其中 a 是风险厌恶因子和交易量的函数. 当 $a = 0$ 时, $\sigma = \sigma_0$, 上式退化成文献[7]中的模型. Company 等^[9-12]利用半离散技术给出了方程(3)的解, 其结论如以下定理所述.

定理 1.1 非线性方程 Ψ 存在唯一解, 满足以下准则

(1)

$$\Lambda = \left(\frac{\arcsin(\sqrt{\Psi})}{\sqrt{\Psi+1}} + \sqrt{\Psi} \right)^2, \quad \Psi > 0, \quad (4)$$

$$\Lambda = - \left(\frac{\arcsin(\sqrt{-\Psi})}{\sqrt{\Psi+1}} + -\sqrt{-\Psi} \right)^2, \quad -1 < \Psi < 0; \quad (5)$$

(2) Ψ 是 $(-1, +\infty)$ 上的增函数.

另外, Kratka 提出了风险自适应定价方法. 后经 Jandačka 和 Ševčovič^[13] 进一步改进, 其波动率具有以下形式.

$$\hat{\sigma}^2 = \sigma_0^2 \left(1 + 3 \left(\frac{P^2 M}{2\pi} S V_{SS} \right)^{\frac{1}{3}} \right), \quad (6)$$

其中 $M(\geq 0)$ 为交易费测度, $P(\geq 0)$ 为风险差额或风险酬金测度.

本文在考虑非流动市场下期权定价模型的同时结合考虑以上两种波动率的修正模型, 将原模型推广到更一般的情形, 并给出相应的数值模型.

2 方程的变换

本文主要研究方程(1)在波动率具有式(2)和式(6)两种修正模型下的数值解法.

模型(1)的求解区域为半带状规划区域 $(S, t) \in (0, +\infty) \times [0, T]$. 显然, 当 $S \rightarrow 0$ 时, 欧式看涨期权一定不会执行, 那么此时期权价值趋近于零, 即期权下边界可表示成

$$V(0, t) = \lim_{S \rightarrow 0} V(S, t) = 0. \quad (7)$$

另一方面, 当标的股票价格足够大时, 几乎可以肯定期权到期后被执行. 所以, 当 $S \rightarrow +\infty$ 时, 期权的上边界可表示为

$$V(+\infty, t) = \lim_{S \rightarrow +\infty} V(S, t) = \lim_{S \rightarrow +\infty} S - Ke^{-r(T-t)}. \quad (8)$$

但在实际交易中, 标的股票价格总不会出现为零或无穷大的情况. 所以, 对股票价格定义一个足够小的值为其下界 $S_{\min}(S_{\min} > 0)$, 一个足够大的值为其上界 $S_{\max}(S_{\max} < +\infty)$, 即 $S \in [S_{\min}, S_{\max}]$. 为了求解模型(1), 首先引入变量变换. 令

$$x = \ln \left(\frac{S}{K} \right), \quad \tau = \frac{1}{2} \sigma_0^2 (T - t), \quad U(x, \tau) = e^{-x} \frac{V(S, t)}{K}$$

则

$$\begin{aligned} V_t &= U_\tau \tau_t S = -\frac{1}{2} \sigma_0^2 S U_\tau, \quad V_S = U_x x_S S + U = U_x + U, \\ V_{SS} &= U_{xx} x_S S + U_x x_S = \frac{1}{S} (U_{xx} + U_x). \end{aligned} \quad (9)$$

将式(9)代入式(1), 化简后可得如下形式:

$$U_\tau = \beta (U_{xx} + U_x) + \alpha U_x, \quad (10)$$

其中 $\alpha = \frac{2r}{\sigma_0^2}$; $\beta = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2} \{ 1 + [2 + \lambda \mu^2 (U_{xx} + U_x)] (U_{xx} + U_x) \}$. 相应自变量定义域转化为

$$(x, \tau) \in \left[\ln \left(\frac{S_{\min}}{K} \right), \ln \left(\frac{S_{\max}}{K} \right) \right] \times \left[0, \frac{\sigma_0^2 T}{2} \right] = [x_{\min}, x_{\max}] \times \left[0, \frac{\sigma_0^2 T}{2} \right].$$

对以上两种波动率修正模型做同样的变化.

Barles 和 Soner 模型 (Barles & Soner model)

$$\hat{\sigma}^2 = \sigma_0^2 \left[1 + \Psi \left(e^{\frac{2v\tau}{\sigma_0^2}} a^2 (U_{xx} + U_x) \right) \right]. \quad (11)$$

Kratka, Jandačka 和 Ševčovič 模型 (K-J-S model)

$$\hat{\sigma}^2 = \sigma_0^2 \left(1 + 3 \left(\frac{P^2 M}{2\pi} (U_{xx} + U_x)^{\frac{1}{3}} \right) \right) \quad (12)$$

3 差分格式构造

为对以上方程进行处理, 构造以下差分格式. 首先, 对自变量 x 和 τ 作等距划分:

$$x_i = x_{\min} + ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N, \quad \tau_i = jk, \quad j = 0, 1, 2, \dots, L, \quad (13)$$

其中, N, L 分别是 x 和 τ 区间划分长度, 空间步长 $h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{N}$, 时间步长 $k = \frac{\sigma_0^2 T}{2L}$.

通过构造四阶差分格式对 U 的一阶导数和二阶导数做近似处理, Δ_i^j, ∇_i^j 分别表示一阶导数、二阶导数的近似值算子, 其计算格式为

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &\approx \frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{k}; & \frac{\partial U}{\partial x} &\approx \frac{U_{i+2}^j + U_{i+1}^j - U_{i-1}^j - U_{i-2}^j}{6h} = \Delta_i^j; \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &\approx \frac{U_{i+2}^j - 2U_i^j + U_{i-2}^j}{4h^2} = \nabla_i^j; \end{aligned} \quad (14)$$

以上格式中, 边界将扩展到 x_{-2}, x_{-1} 以及 x_{N+2}, x_{N+1} . 为了使计算节点能够完全包含在计算区域内, 引入三阶拉格朗日 (Lagrange) 插值多项式对边界区域进行延拓, 所以有

$$\begin{aligned} U_{-1}^j &= 3U_0^j - 3U_1^j + U_2^j; & U_{-2}^j &= 6U_0^j - 8U_1^j + 3U_2^j; & 0 \leq j \leq L \\ U_{N+1}^j &= U_{N-2}^j - 3U_{N-1}^j + 3U_N^j; & U_{N+2}^j &= 3U_{N-2}^j - 8U_{N-1}^j + 6U_N^j. \end{aligned} \quad (15)$$

按照上述差分格式将方程(10)离散并忽略高阶小项, 可以得到差分方程:

$$\begin{aligned} U_i^{j+1} &= k\beta_i^j \left[\frac{1}{4h^2} (U_{i+2}^j - 2U_i^j + U_{i-2}^j) + \frac{1}{6h} (U_{i+2}^j + U_{i+1}^j - U_{i-1}^j - U_{i-2}^j) \right] \\ &\quad + \frac{\alpha k}{6h} (U_{i+2}^j + U_{i+1}^j - U_{i-1}^j - U_{i-2}^j) + U_i^j. \end{aligned} \quad (16)$$

其中 $\beta_i^j = \frac{\hat{\sigma}_{ij}^2}{\sigma_0^2} \{1 + \lambda[2 + \lambda\mu^2(\Delta_i^j + \nabla_i^j)](\Delta_i^j + \nabla_i^j)\}$.

同样, 离散处理后的波动率修正模型为 Barles 和 Soner 模型

$$\hat{\sigma}_{ij}^2 = \sigma_0^2 [1 + \Psi(e^{\alpha\tau_j} a^2 (\Delta_i^j + \nabla_i^j))]. \quad (17)$$

Kratka, Jandačka 和 Ševčovič 模型

$$\hat{\sigma}^2 = \sigma_0^2 \left(1 + 3 \left(\frac{P^2 M}{2\pi} (\Delta_i^j + \nabla_i^j)^{\frac{1}{3}} \right) \right). \quad (18)$$

令 $\mathbf{U}^j = [U_0^j, U_1^j, \dots, U_N^j]^T$, 则方程(16)改写成矩阵形式如下:

$$\mathbf{U}^{j+1} = \left[\frac{k}{2h} \mathbf{A} \left(\frac{1}{2h} \mathbf{B} + \frac{1}{3} \mathbf{C} \right) + \frac{\alpha k}{6h} \mathbf{C} + \mathbf{I} \right] \mathbf{U}^j, \quad (19)$$

令 $\theta = \max\{f'(\xi_{i+2}), f'(\xi_{i+1}), f''(\xi'_i)\}$, $i = 0, 1, 2, \dots, N$, 则以上不等式可进一步拓展为

$$\Delta_i^j + \nabla_i^j \leq 2\theta. \quad (24)$$

所以

$$\beta_i^j = \frac{\hat{\sigma}_{ij}^2}{\sigma_0^2} \{1 + \lambda[2 + \lambda\mu^2(\Delta_i^j + \nabla_i^j)](\Delta_i^j + \nabla_i^j)\} \leq \frac{\hat{\sigma}_{ij}^2}{\sigma_0^2} [1 + 4\theta\lambda(1 + \theta\lambda\mu^2)] = \beta_{\max}. \quad (25)$$

证毕.

一个好的算法要求迭代过程中误差的影响不至于越来越大, 这就要求分析这种误差的传播情况, 也就是所谓的稳定性问题. 以下将对本文算法的稳定性做简单的讨论.

定理 4.1 当空间步长满足

$$h \leq \rho\beta_m^n \omega^2 \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\rho}{3}(\beta_m^n + \alpha)(\omega + 2\omega\sqrt{1 - \omega^2})\right)^2}\right)^{-1},$$

其中 $\omega = \sin(\xi)$, 网格比 $\rho = \frac{k}{h}$, 则本文算法初值稳定.

证明 令 $U_m^n = v^n e^{i\zeta mh}$, 其中 $1 = \sqrt{-1}$, 代入方程(16), 化简后方程两侧同时消去 $e^{i\zeta mh}$ 得

$$v^{n+1} = \left[\frac{k\beta_m^n}{4h^2} (e^{-2i\zeta mh} - 2 + e^{2i\zeta mh}) + \frac{k}{6h} (\beta_m^n + \alpha) (e^{2i\zeta mh} + e^{i\zeta mh} - e^{-i\zeta mh} - e^{-2i\zeta mh}) + 1 \right] v^n. \quad (26)$$

又因为

$$e^{-2i\zeta mh} + e^{2i\zeta mh} = 2\cos(2\zeta h); \quad e^{2i\zeta mh} - e^{-2i\zeta mh} = 2i\sin(2\zeta h); \quad e^{i\zeta mh} - e^{-i\zeta mh} = 2i\sin(\zeta h),$$

代入上式, 可得

$$v^{n+1} = \left[1 - k\beta_m^n \frac{1}{h^2} \sin^2(\zeta h) + \frac{k}{3h} (\beta_m^n + \alpha) (\sin(2\zeta h) + \sin(\zeta h)) \right] v^n. \quad (27)$$

所以, 本文模型的增长因子为

$$G = 1 - k\beta_m^n \frac{1}{h^2} \sin^2(\zeta h) + \frac{k}{3h} (\beta_m^n + \alpha) (\sin(2\zeta h) + \sin(\zeta h)), \quad (28)$$

并且

$$|G|^2 = \left(1 - \frac{k}{h^2} \beta_m^n \sin^2(\zeta h)\right)^2 + \left(\frac{k}{3h} (\beta_m^n + \alpha) (\sin(2\zeta h) + \sin(\zeta h))\right)^2. \quad (29)$$

因为 $\zeta h \in [0, 2\pi]$, 所以存在 $\xi \in [0, 2\pi]$, 使得对任意的 $\zeta h \in [0, 2\pi]$, 有 $|G(\zeta h)|^2 \leq |G(\xi)|^2$ 成立. 令 $\omega = \sin(\xi)$, $\rho = \frac{k}{h}$, 则 $\sin(2\xi) = 2\omega\sqrt{1 - \omega^2}$. 所以

$$|G(\xi)|^2 = \left(1 - \frac{\rho}{h} \beta_m^n \omega^2\right)^2 + \left(\frac{\rho}{3} (\beta_m^n + \alpha) (\omega + 2\omega\sqrt{1 - \omega^2})\right)^2. \quad (30)$$

若算法为稳定的, 则 $|G(\xi)|^2 \leq 1$. 所以有

$$h \leq \rho\beta_m^n \omega^2 \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\rho}{3} (\beta_m^n + \alpha) (\omega + 2\omega\sqrt{1 - \omega^2})\right)^2}\right)^{-1}. \quad (31)$$

证毕.

4.2 相容性

从偏微分方程建立差分格式时, 总是要求当 $k \rightarrow 0, h \rightarrow 0$ 时, 差分方程能与微分方程充分“接近”. 这就导致了差分方程的一个基本特征, 差分格式的相容性. 本节对本文模型的相容性问题进行讨论. 因为

$$F(U_i^j) = \frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{k} \beta_i^j (\Delta_i^j + \nabla_i^j) - \alpha \Delta_i^j, \quad (32)$$

$$L(U) = U_\tau - \beta(U_{xx} + U_x) - \alpha U_x. \quad (33)$$

所以算法的误差为

$$T_i^j(U) = F(U_i^j) - L(U). \quad (34)$$

又因为

$$\Delta_i^j = \frac{\partial U}{\partial x} + h^2 E_i^j(1) \quad (35)$$

其中 $E_i^j(1) = \frac{1}{2} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3}(\zeta_1, \tau_j)$, 并且

$$|E_i^j(1)| \leq \frac{1}{2} \max \left\{ \left| \frac{\partial^3 U}{\partial x^3}(x, \tau_j) \right|; \quad x_{\min} \leq x \leq x_{\max} \right\} = \frac{1}{2} |w^j(1)|_{\max}$$

$$\nabla_i^j = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + h^2 E_i^j(2), \quad (36)$$

其中 $E_i^j(2) = \frac{1}{3} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4}(\zeta_2, \tau_j)$, 并且

$$|E_i^j(2)| \leq \frac{1}{3} \max \left\{ \left| \frac{\partial^4 U}{\partial x^4}(x, \tau_j) \right|; \quad x_{\min} \leq x \leq x_{\max} \right\} = \frac{1}{3} |w^j(2)|_{\max}$$

$$\frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{k} = \frac{\partial U}{\partial \tau} + k E_i^j(3), \quad (37)$$

其中 $E_i^j(3) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}(\zeta_i, \tau)$, 并且

$$|E_i^j(3)| \leq \frac{1}{2} \max \left\{ \left| \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}(x_i, \tau) \right|; \quad \tau^j \leq \tau \leq \tau^{j+1} \right\} = \frac{1}{2} |w^j(3)|_{\max}$$

所以

$$T_i^j(U) = k E_i^j(3) - \alpha h^2 E_i^j(1) - \beta_i^j (\Delta_i^j + \nabla_i^j) + \beta(U_{xx} + U_x). \quad (38)$$

进而

$$|T_i^j(U)| \leq \frac{1}{2} k |w^j(3)|_{\max} + \frac{1}{2} \alpha h^2 |w^j(1)|_{\max} + h^2 \beta_{\max} \left(\frac{1}{2} |w^j(1)|_{\max} + \frac{1}{3} |w^j(2)|_{\max} \right)$$

$$= \frac{1}{2} k |w^j(3)|_{\max} + \left[\frac{1}{2} |w^j(1)|_{\max} (\alpha + \beta_{\max}) + \frac{1}{3} \beta_{\max} |w^j(2)|_{\max} \right] h^2. \quad (39)$$

所以本文算法是相容的, 局部误差满足

$$T_i^j(U) = O(k) + O(h^2) \quad (40)$$

证毕.

5 数值试验

本节通过数值模拟对以上所建立的数值解法进行验证, 所涉及到的参数分别赋值如下:

$$x_{\min} = -5; \quad x_{\max} = 5; \quad K = 30; \quad r = 0.06; \quad T - t = 0.25;$$

$$\lambda = 0.0001; \quad \sigma_0 = 0.16; \quad \mu = 0.15; \quad a = 0.03; \quad P = 1; \quad M = 0.5$$

图 1 给出了以上两种波动率修正模型比较关系, 由图可知, Barles & Soner 模型比 K-J-S 模型所求得解略大一些. 以下数值试验过程, 以 Barles & Soner 模型为例, 探讨不同参数对数值结果的影响. 图 2 比较了 λ 对数值解的影响程度, 随着 λ 的增大, 即股票价格弹性变大, 期权价格对标的资产价格的变动更加敏感, 以至计算出来的结果更大, 图 2 结果也说明了这样的结论. 但对常波动率 σ_0 的变动, 期权价格反而随之增大而变小. 由计算过程可知, σ_0 出现在 α, β 中, 但由于 β 为修正波动率与常数波动率的比值, 其结果与常波动率无关, 所以常波动率的变化对其无影响; 而常波动率同 α 成反比, 随着常波动率的增大, 对应的 α 反而越小, 导致迭代后的期权价格变小, 图 3 也验证了这样的解释.

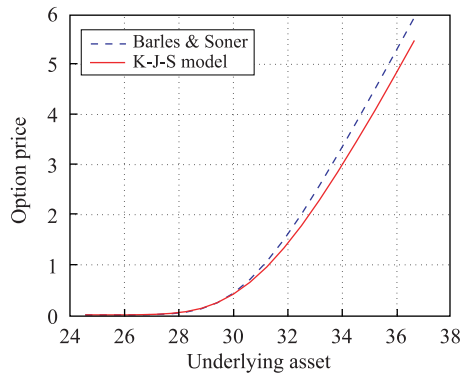


图 1 两种不确定率模型比较

Fig. 1 Contrast between two uncertain volatility models

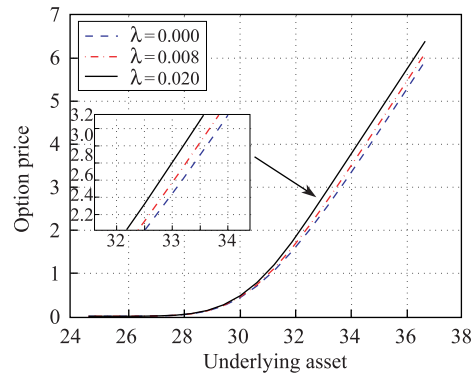


图 2 λ 对数值解的影响

Fig. 2 Influence of the parameter λ

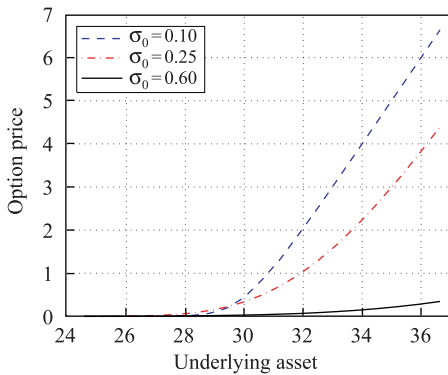


图 3 波动率对数值解的影响

Fig. 3 Influence of the volatility

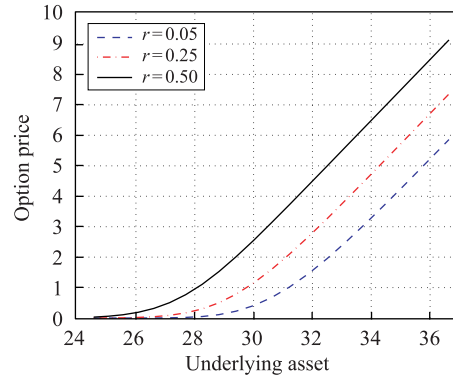


图 4 无风险利率对期权价格的影响

Fig. 4 Influence of the risk-free rate

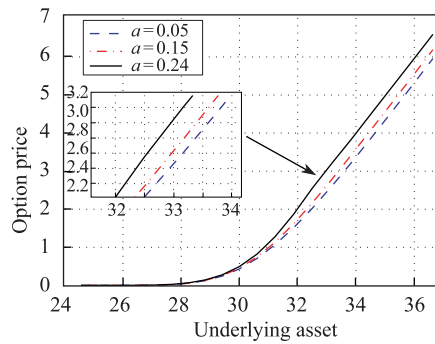
图 5 参数 a 对数值解的影响Fig. 5 Influence of the parameter a to numerical solution

图 4 和图 5 中分别是无风险利率以及参数 a 对数值解的影响情况, 期权价格分别随着无风险利率和波动率的增大而增大. 无风险利率的增大, 无形中提高了持有看涨期权合约的成本, 要想获得预定的收益, 其价格必然上升; 另一方面, 参数 a 为风险厌恶因子和交易量的函数, 其值的增加导致了标的资产未来收益不确定性的加剧, 这种不确定性进而导致看涨期权的持有风险变大. 所以, 其价格同样要大些.

6 结 论

本文回顾了已有文献在非流动市场中有关期权定价模型的讨论. 通过引入两种不确定波动率模型, 推广了此种条件下的期权定价模型, 针对文献中对步长要求较高, 产生的计算量较大的不足, 建立了相应的差分方程并讨论了非流动市场下不确定波动率期权定价模型数值解法. 数值结果表明, 算法步长的要求较低, 能够在较少的计算量下得到较满意的数值结果. 但本文收益率为常数以及其他假设限制了模型的一般性理论. 在今后的工作, 争取考虑更多的内容, 将非流动市场下的期权定价模型推广到更一般的情形.

[参 考 文 献]

- [1] BLACK F, SCHOLES M. The pricing of options and corporate liabilities[J]. *Political Economy*, 1973, 81: 637-659.
- [2] BALLESTER C, COMPANY R, JÓDAR L, et al. Numerical analysis and simulation of option pricing problems modeling illiquid markets[J]. *Computers and Mathematics with Applications*, 2010, 59(8): 2964-2975.
- [3] LIU H, YONG J. Option pricing with an illiquid underlying asset market[J]. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 2005, 29: 2125-2156.
- [4] COMPANY R, JÓDAR L, PINTOS J R. Numerical analysis and computing for option pricing models in illiquid markets[J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2010, 52: 1066-1073.
- [5] BAKSTEIN D, HOWISON S. An arbitrage-free liquidity model with observable parameters for derivatives[R]. Working paper, Mathematical Institute, Oxford University, 2004.
- [6] HOWISON S. Matched asymptotic expansions in financial engineering[J]. *Journal of Engineering Mathematics Computers*, 2005, 53: 385-406.
- [7] CASABÁN M C, COMPANY R, JÓDAR L, et al. Numerical analysis and computing of a non-arbitrage liquidity model with observable parameters for derivatives[J]. *Computers and Mathematics with Applications*. 2010, doi:10.1016/j.camwa. 2010.08.009.
- [8] BARLES G, SONER H M. Option pricing with transaction costs and a nonlinear Black-Scholes equation[J]. *Finance Stoch*, 1998, 2: 369-397.
- [9] COMPANY R, NAVARRO R, PINTOS J R, et al. Numerical solution of linear and nonlinear Black-Scholes option pricing equations[J]. *Computers and Mathematics with Applications*, 2008, 56: 813-821.

(下转第 137 页)

It follows from (H3) and (H5) for g_n that, for all $n > N_\varepsilon$ and $p \geq 1$, $dP \times dt$ - a.e.,

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(y)\hat{g}^{n,p}(s, y, z) &= \operatorname{sgn}(y)(g_{n+p}(\omega, t, y + y_t^n, z + z_t^n) - g_n(\omega, t, y + y_t^n, z + z_t^n)) \\ &\quad + \operatorname{sgn}(y)(g_n(\omega, t, y + y_t^n, z + z_t^n) - g_n(\omega, t, y_t^n, z + z_t^n)) \\ &\quad + \operatorname{sgn}(y)(g_n(\omega, t, y_t^n, z + z_t^n) - g_n(\omega, t, y_t^n, z_t^n)) \\ &\leq \mu|y| + \lambda 1_{y \neq 0}|z|^\alpha + \varepsilon \end{aligned}$$

holds true for each $(y, z) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^d$. Next, we can follow exactly as the proof procedure in pages 2028 – 2030 of [4] to obtain that there exist a process y which belongs to the class (D) and the space \mathcal{S}^β for all $\beta \in (0, 1)$, and a process z which belongs to M^β for all $\beta \in (0, 1)$ such that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} |y_t^n - y_t|^\beta \right] = 0, \quad (10)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[\left(\int_0^T |z_t^n - z_t|^2 dt \right)^{\beta/2} \right] = 0. \quad (11)$$

Finally, in view of the (i) in Proposition 3 and assumptions (H2), (H4) and (H5) of the generator g , we pass to the limit in ucp for BSDEs with parameters (ξ, T, g_n) , thanks to (10) and (11), to see that (y, z) solves the BSDE with parameters (ξ, T, g) , y is of the class (D), and (y, z) belongs to $\mathcal{S}^\beta \times M^\beta$ for all $0 < \beta < 1$. This completes the proof of Theorem 1.

Acknowledgement The authors would like to thank the anonymous referee for his/her careful reading and helpful suggestions.

[References]

- [1] PARDOUX E, PENG S. Adapted solution of a backward stochastic differential equation [J]. *Systems Control Letters*. 1990, 14(1): 55-61.
- [2] PENG S. Backward SDE and related g-expectation [C]// *Backward Stochastic Differential Equations*. Pitman Research Notes Mathematical Series 364. Harlow: Longman, 1997: 141-159.
- [3] BRIAND P, DELYON B, HU Y, et al. L^p solutions of backward stochastic differential equations [J]. *Stochastic Processes and Their Applications*. 2003, 108: 109-129.
- [4] FAN S, LIU D. A class of BSDEs with integrable parameters [J]. *Statistics and Probability Letters*. 2010, 80: 2024-2031.

(上接第 129 页)

- [10] COMPANY R, JÁDAR L, PONSODAR E. Numerical solution of Black-Scholes option pricing with variable yield discrete dividend payment[J]. *Banach Center Publ*, 2008, 83: 37-47.
- [11] COMPANY R, JÓDAR L, PINTOS J R. A numerical method for european option pricing with transaction costs nonlinear equation[J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2009, 50: 910-920.
- [12] COMPANY R, JÓDAR L, PINTOS J R, et al. Computing option pricing models under transaction costs[J]. *Computers and Mathematics with Applications*, 2010, 59: 651-662.
- [13] JANDAČKA M, ŠEVČOVIČ D. On the risk-adjusted pricing-methodology-based valuation of vanilla options and explanation of the volatility smile[J]. *J Appl Math*, 2005(3): 235-258.