

文章编号: 1000-4750(2013)03-0347-08

索梁结构非线性振动有限元分析

吴庆雄¹, 王文平², 陈宝春¹

(1. 福州大学土木工程学院, 福建, 福州 350108; 2. 福州大学至诚学院, 福建, 福州 350002)

摘 要: 为了更全面、精确地进行包括斜拉索参数振动在内的索梁结构非线性振动分析, 该文采用索单元和去除自重的非线性动力计算方法, 实现了能考虑参数振动的拉索非线性振动有限元方法; 采用扩大 Rayleigh 阻尼矩阵, 可以同时考虑主梁的阻尼和相对较小的拉索阻尼; 将这些计算方法植入自编程序 NL_Beam3D 中以考虑斜拉索与主梁之间的相互作用。以 1993 年 Fujino 进行的索梁结构试验为算例, 分析表明该方法能较正确地模拟索梁结构中副不稳定区域和主不稳定区域的拉索参数振动。

关键词: 桥梁工程; 非线性振动; 有限元法; 索梁结构; 拉索; 参数振动

中图分类号: U448.27 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2011.04.0226

FINITE ELEMENT ANALYSIS FOR NONLINEAR VIBRATION OF CABLE-BEAM STRUCTURE

WU Qing-xiong¹, WANG Wen-ping², CHEN Bao-chun¹

(1. College of Civil Engineering, Fuzhou University, Fuzhou, Fujian 350108, China; 2. ZhiCheng College, Fuzhou University, Fuzhou, Fujian 350002, China)

Abstract: In order to analyze the nonlinear vibration including parametric vibration of a cable-beam structure accurately, a cable element and a procedure for removing the self-weight term are proposed for the parametric vibration finite element analysis of cables. The extended Rayleigh damping considering element damping for the damping matrix is also proposed for considering the damping of the beam and the relatively small damping of the cable. Those methods are implemented in the self-coded program NL_Beam3D, to consider the interaction between a stay cable and a beam. Through the case of a cable-beam structure experiment by Fujino in 1993, the parametric vibration in the secondary or principal unstable regions can be modeled exactly using the proposed methods.

Key words: bridge engineering; nonlinear vibration; finite element method; cable-beam structure; stay cable; parametric vibration

根据诱发原因的不同可将斜拉桥中斜拉索的振动分为风致振动和主梁与主塔振动引起的拉索非线性振动^[1]。许多研究者对风致振动进行了大量的试验和理论研究。主梁与主塔振动引起的拉索非线性振动使拉索振动位移较大, 其中参数振动是拉索非线性振动中一个重要内容^[2]。参数振动是指外荷载的卓越振动频率接近于拉索的固有振动频率(1:1 副不稳定区域)或拉索固有振动频率的 2 倍

(2:1 主不稳定区域)时, 拉索会产生大振幅横向振动^[3]。

自 Kovács 第一次用参数振动来解释拉索大振幅振动现象后^[4], 各国研究者对单索的参数振动进行了大量理论研究。Tagata 针对不计垂度的拉索研究了 1:1 副不稳定区域的参数振动, 推导了无量纲的 Mathieu 方程^[5]。Takahashi 用谐波平衡方法和特征值法, 计算了扁平索参数振动的 1:1 和 2:1

收稿日期: 2011-04-18; 修改日期: 2011-07-06

基金项目: 国家自然科学基金项目(50808047)

通讯作者: 吴庆雄(1973—), 男, 福建人, 研究员, 博士, 从事桥梁与结构工程研究(E-mail: wuqingx@fzu.edu.cn).

作者简介: 王文平(1984—), 女, 贵州人, 助教, 硕士, 从事桥梁工程研究(E-mail: wenping5556@163.com);

陈宝春(1958—), 男, 福建人, 教授, 博士, 博导, 从事桥梁与结构工程研究(E-mail: baochunchen@fzu.edu.cn).

不稳定区域边界和组合共振情况^[6]。Lilien 推导了参数振动的无量纲公式，可用于计算拉索在参数激励下的最大振幅和稳态振幅^[7]。Caetano 将拉索参数振动的成果总结在文献[8]中。

由于把斜拉索单独取出进行分析，使得无法考虑斜拉索发生大振幅振动后对斜拉桥主要构成结构——主梁和主塔的影响。Abdel-Ghaffar 指出斜拉索的局部振动会对主梁产生较大的影响^[9]，因此，一些研究者将斜拉桥简化为索梁结构，以考虑主梁与斜拉索之间的相互作用。Fujino 进行了索梁结构的室内试验，在梁端作用周期荷载，观测索和梁的振动情况^[10]。周海兵进行了索梁结构的非线性动力特性实验研究，分析了索与梁之间的耦合作用^[11]。

以上单索或索梁结构中拉索参数振动的计算，均采用了理论解析的方法，要推广到斜拉桥整体计算中比较困难。如果采用有限元法，就可以对斜拉桥进行整体分析，但是，采用现有的桁架单元或弦单元只能计算拉索的强迫振动，无法考虑拉索参数振动。因此，需要采用能考虑参数振动的索单元，才能在斜拉桥整体分析中考虑拉索参数振动和主梁-主塔与斜拉索之间的相互作用。本文首先推导能考虑拉索非线性振动的索单元及相关的动力计算方法，并将其植入自编程序 NL-Beam3D 中以同时考虑拉索参数振动和主梁的振动，然后以 1993 年 Fujino 进行的索梁结构试验为对象，进行了验证性计算和 nonlinear 特性分析。

1 空间索的有限元方法

1.1 索单元刚度矩阵

在这里采用文献[12]提出的两节点索单元来模拟空间索。如图 1(a)所示，整体坐标系(X, Y, Z)下索的一个单元 i-j，在局部坐标系(X*, Y*, Z*)下的几何参数如图 1(b)。该单元轴向定义为 X*轴，Y*和 Z*轴按照右手法则进行定义。索单元初始长度为 L₀，初始轴力为 P₀。

$$\mathbf{K}^e = \frac{E_c A_c}{L_0(L_0 + e)^2} \begin{bmatrix} (L_0 + u)^2 & (L_0 + u)v & (L_0 + u)w & -(L_0 + u)^2 & -(L_0 + u)v & -(L_0 + u)w \\ & v^2 & vw & -(L_0 + u)v & -v^2 & -vw \\ & & w^2 & -(L_0 + u)w & -vw & -w^2 \\ & & & (L_0 + u)^2 & (L_0 + u)v & (L_0 + u)w \\ & & & & v^2 & vw \\ & & & & & w^2 \end{bmatrix} + \frac{P}{(L_0 + e)^3} \cdot \begin{matrix} \\ \\ \\ \text{对称} \\ \\ \end{matrix}$$

从图 1(b)可知，在局部坐标系(X*, Y*, Z*)中，单元 i 节点和 j 节点的位移分别为(u_i, v_i, w_i)和(u_j, v_j, w_j)，则两节点间相对位移量(u, v, w)为：

$$u = u_j - u_i, \quad v = v_j - v_i, \quad w = w_j - w_i \quad (1)$$

局部坐标系中单元变形后的轴力和位移见图 1(b)，伸长量 e 和轴力 P 为：

$$e = \sqrt{(L_0 + u)^2 + v^2 + w^2} - L_0, \quad P = P_0 + E_c A_c / L_0 \times e \quad (2)$$

式中：E_c 和 A_c 分别为索的弹性模量和截面积。

设 R、S、T 为局部坐标系中索单元沿 X*、Y*、Z* 的内力，则有：

$$R = \frac{L_0 + u}{L_0 + e} P, \quad S = \frac{v}{L_0 + e} P, \quad T = \frac{w}{L_0 + e} P \quad (3)$$

因此，可以得到该单元的内力平衡方程为：

$$P \begin{bmatrix} -\frac{L_0 + u}{L_0 + e} & -\frac{v}{L_0 + e} & -\frac{w}{L_0 + e} \\ \frac{L_0 + u}{L_0 + e} & \frac{v}{L_0 + e} & \frac{w}{L_0 + e} \end{bmatrix}^T = \mathbf{F}^e \quad (4)$$

式中：F^e = {-R -S -T R S T} 是单元两端的力；-R、-S、-T、R、S、T 分别是局部坐标系下 i 节点和 j 节点沿各轴的内力。

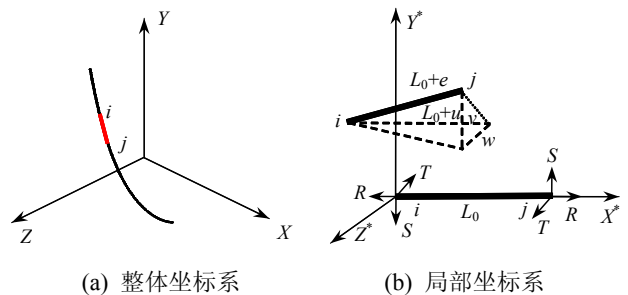


图 1 索单元的整体和局部坐标系
Fig.1 Cable element in global and local coordinate system

将式(4)对位移进行变分，即：

$$\mathbf{K}^e \delta \mathbf{X}^e = \delta \mathbf{F}^e \quad (5)$$

可得到单元刚度矩阵 K^e：

$$\begin{bmatrix} v^2 + w^2 & -(L_0 + u)v & -(L_0 + u)w & -v^2 - w^2 & (L_0 + u)v & (L_0 + u)w \\ & (L_0 + u)^2 + w^2 & -vw & (L_0 + u)v & -(L_0 + u)^2 - w^2 & vw \\ & & (L_0 + u)^2 + v^2 & (L_0 + u)w & vw & -(L_0 + u)^2 - v^2 \\ & & & v^2 + w^2 & -(L_0 + u)v & -(L_0 + u)w \\ & 对称 & & & (L_0 + u)^2 + w^2 & -vw \\ & & & & & (L_0 + u)^2 + v^2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

式中, $\delta \mathbf{X}^e = \{\delta u_i \ \delta v_i \ \delta w_i \ \delta u_j \ \delta v_j \ \delta w_j\}^T$ 为单元两端位移增量。

1.2 非线性动力分析

考虑惯性力和阻尼力后, 整体坐标系下拉索的运动方程为:

$$M\ddot{\mathbf{X}}_t + C\dot{\mathbf{X}}_t + \mathbf{R}_t = \mathbf{F}_t + \mathbf{F}_g \quad (7)$$

式中: \mathbf{R}_t 是外荷载和自重产生的恢复力, 由式(4)左边部分组成; \mathbf{F}_t 为外荷载; \mathbf{F}_g 为自重。

本文在进行索的非线性动力分析时, 采用了去除索自重产生的静力影响的动力计算方法^[13], 以减少迭代计算工作量。

自重作用下索的静力平衡方程为:

$$\mathbf{R}_g = \mathbf{F}_g \quad (8)$$

将式(8)代入式(7), 即方程两边同时减去自重项, 得到:

$$M\ddot{\mathbf{X}}_t + C\dot{\mathbf{X}}_t + (\mathbf{R}_t - \mathbf{R}_g) = \mathbf{F}_t \quad (9)$$

式中, $(\mathbf{R}_t - \mathbf{R}_g)$ 为整体坐标系下去除自重后的恢复力, 由局部坐标系中去掉自重后的恢复力 $(\mathbf{R}_t - \mathbf{R}_g)^e$ 集成。

在局部坐标系中, 自重 \mathbf{F}_g^e 作用下单元轴力即为初始轴力 P_0 , 可写成矩阵形式:

$$\mathbf{R}_g^e = P_0[-1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]^T \quad (10)$$

在外荷载 \mathbf{F}_t^e 和自重作用下, 设单元轴力为 P , 此时单元恢复力为:

$$\mathbf{R}_t^e = P \begin{bmatrix} -\frac{L_0 + u}{L_0 + e} & -\frac{v}{L_0 + e} & -\frac{w}{L_0 + e} \\ \frac{L_0 + u}{L_0 + e} & \frac{v}{L_0 + e} & \frac{w}{L_0 + e} \end{bmatrix}^T \quad (11)$$

因此, 可以得到局部坐标系中去掉自重后的单元恢复力为:

$$(\mathbf{R}_t - \mathbf{R}_g)^e = \begin{bmatrix} -P\frac{L_0 + u}{L_0 + e} + P_0 & -P\frac{v}{L_0 + e} \\ -P\frac{w}{L_0 + e} & P\frac{L_0 + u}{L_0 + e} - P_0 \end{bmatrix}^T \quad (12)$$

将上述恢复力通过坐标变换到整体坐标系上, 并集成到式(9)中, 就可以获得去除自重后拉索的运动方程。运动方程的求解可采用直接积分的时程分析法。同时, 从式(12)可以看出, 去除自重后的单元恢复力与节点位移和单元轴力有关, 故需要进行迭代计算(如 Newton 法), 并将式(6)的单元刚度矩阵 \mathbf{K}^e 应用于迭代过程中。这就是本文提出的去除自重后的拉索非线性动力计算方法。

1.3 与桁架单元、弦单元刚度矩阵的比较

对于桁架单元, 只考虑两节点间的轴向位移, 且没有初始轴力^[14]。在式(6)中, 令 $v=w=0, P=0$, 即可得到桁架单元刚度矩阵:

$$\mathbf{K}_{桁架}^e = \frac{E_c A_c}{L_0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & 对称 & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

位移 v, w 等于 0, 也就是忽略了索的竖向和横向振动, 使得采用桁架单元只能计算索的轴向强迫振动, 不能考虑包括参数振动在内的索的非线性振动。

相对于桁架单元, 弦单元考虑了初始轴力, 也可以把弦单元叫做考虑初始轴力的桁架单元^[15]。在式(6)中, 令 $v = w = 0, P_0 = P, L_0 + u = L_0$, 即可得到弦单元刚度矩阵:

$$\mathbf{K}_{弦}^e = \frac{E_c A_c}{L_0} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & 对称 & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{P_0}{L_0} & & 1 & 0 & 0 & -1 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & 对称 & & & 1 & 0 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

可以看出, 弦单元刚度矩阵不随位移 u 、 v 、 w 的改变而改变。但是, 索发生参数振动时刚度是不断变化的, 因此弦单元不能正确地考虑包括参数振动在内的索的非线性振动。

通过三种单元的比较可知, 不能采用桁架单元或弦单元计算拉索非线性振动。

2 索结构的动力计算方法

2.1 阻尼矩阵

采用直接积分的动力计算中, 阻尼矩阵多以 Rayleigh 阻尼的形式来表达^[16]:

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad (15)$$

式中: α 、 β 为比例系数, 由下式确定,

$$\alpha = \frac{4\pi \cdot f_i f_j (h_i f_j - h_j f_i)}{f_j^2 - f_i^2}, \quad \beta = \frac{h_j f_j - h_i f_i}{\pi(f_j^2 - f_i^2)} \quad (16)$$

式中: f_i 、 f_j 为结构两个不同的频率; h_i 、 h_j 为与 f_i 、 f_j 对应的阻尼常数($i < j$)。

对于采用索结构的桥梁, 如斜拉桥, 主梁、主塔的阻尼常数在 0.01~0.04 之间; 斜拉索的阻尼常数不超过 0.005, 没有安装减振阻尼器的斜拉索仅为 0.001^[17]。

在阻尼设置中, 常忽略拉索的小阻尼, 把结构的两个频率 f_i 、 f_j 设为主梁-主塔的两阶固有频率, h_i 、 h_j 设为其对应的阻尼。如某斜拉桥竖向一阶频率、二阶频率分别为 0.233Hz 和 0.297Hz, 而其中某斜拉索的一阶频率为 0.573Hz。将 f_i 、 f_j 设为竖向一阶频率、二阶频率, h_i 、 h_j 均设为 0.02。采用这样的设置后, 通过式(15)和式(16)计算可以得到, 索的一阶频率 0.573Hz 对应的阻尼常数为 0.026, 远大于斜拉索的实际阻尼。

因此, 为了同时正确地考虑主要构成结构(主梁和主塔)的大阻尼和比它们小一个量级的拉索的小阻尼, 本文提出了扩大 Rayleigh 阻尼矩阵, 即定义模型中各单元阻尼为式(15)表示的 Rayleigh 阻尼矩阵, 而结构的阻尼矩阵为各单元 Rayleigh 阻尼矩阵的叠加:

$$\mathbf{C} = \sum_{k=1}^N (\alpha_k \mathbf{M}_k + \beta_k \mathbf{K}_k) \quad (17)$$

式中: \mathbf{C} 为结构的阻尼矩阵; N 为单元总数; \mathbf{M}_k 、 \mathbf{K}_k 分别为第 k 个单元的质量矩阵和刚度矩阵; α_k 、 β_k 分别是该单元的比例系数, 可写为:

$$\alpha_k = \frac{4\pi \cdot f_i^k f_j^k (h_i^k f_j^k - h_j^k f_i^k)}{(f_j^k)^2 - (f_i^k)^2},$$

$$\beta_k = \frac{h_j^k f_j^k - h_i^k f_i^k}{\pi((f_j^k)^2 - (f_i^k)^2)} \quad (18)$$

式中, f_i^k 、 f_j^k 为单元的两阶频率, 对应的阻尼比为 h_i^k 、 h_j^k ($i < j$)。

在索结构的动力计算时采用扩大 Rayleigh 阻尼矩阵, 不仅可以计入主梁、主塔的阻尼, 还可同时考虑相对较小的拉索的阻尼, 从而可以较为合理地设置各主要结构的不同阻尼。

2.2 非线性计算程序 NL_Beam3D

作者已编制了能考虑几何非线性的三维梁单元的非线性计算程序 NL_Beam3D (NonLinear analysis program of Beam3D)^[18]。采用 Fortran90 将上述索单元和非线性计算方法编成子程序, 添加到该程序的相关部分, 使该程序可使用的单元类型除了“梁单元”之外, 还有“索单元”, 从而可以进行考虑拉索非线性振动的索结构桥梁非线性振动分析。同时, 也在该程序中添加了“桁架单元”、“弦单元”、“弹簧单元”等。

该程序中的动力分析部分, 特征值分析采用 Subspace 法, 时程分析采用增量形式的 Newmark- β 法, 并采用 Newton 增量法求解非线性平衡方程。阻尼矩阵除了通常的 Rayleigh 阻尼外, 还包括上述的扩大 Rayleigh 阻尼矩阵。

3 算例验证

以 1993 年 Fujino 进行的索梁结构试验^[10]为对象, 进行有限元分析, 以说明本文提出的计算方法和编写的程序的正确性。

3.1 索梁结构模型试验简介

1993 年 Fujino 进行的索梁结构模型见图 2, 由不锈钢钢丝绳、开口矩形钢箱截面悬臂梁及相应的锚固装置组成。梁的锚固端和斜拉索上端固定在墙上, 在钢梁和斜拉索上附加了均布质量以调整结构频率。

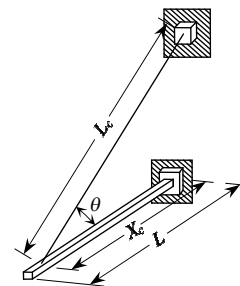


图 2 索梁结构试验模型

Fig. 2 Experimental model of cable-beam structure

索计算长度 $L_c=2.08\text{m}$, 倾角 $\theta=29^\circ$, 轴向刚度 $E_c A_c=35077.6\text{N}$, 单位长度质量 $\mu_c=0.07\text{kg/m}$, 伸长量 $u_0=0.0067\text{m}$ 。梁长度 $L=2\text{m}$, 计算长度 $X_c=1.99\text{m}$, 截面积 $A_B=3.81\text{cm}^2$, 面外抗弯惯矩 $I_h=21.4\text{cm}^4$, 面内抗弯惯矩 $I_g=2.43\text{cm}^4$ [19]。Fujino 认为, 相对于索的面外振动, 索的面内振动振幅很小, 所以采用一钢丝将斜拉索与悬臂梁连接在一起, 从而限制了索的竖向振动。

通过自由振动实测所得的试验模型的固有频率和阻尼示于表 1。可以看出, 索的横向一阶频率、梁的横向一阶频率及竖向二阶频率之间满足 1 : 1 : 2 的关系, 因此, 当以一定频率的正弦荷载作用于悬臂梁时, 将使拉索发生 1 : 1 副不稳定区域的参数振动或 2 : 1 主不稳定区域的参数振动。

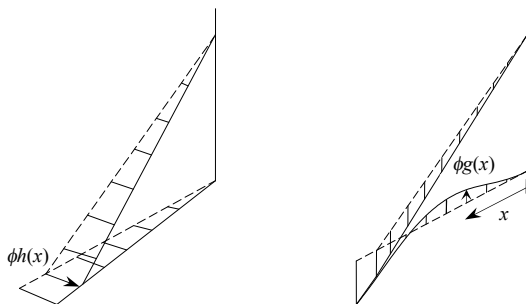
表 1 索梁结构模型的固有频率和阻尼
Table 1 Frequencies and damping for cable-beam structure

参数	横向激励	竖向激励
索的面外一阶频率 f_y/Hz	9.63	9.63
梁的横向一阶频率 f_h/Hz	9.38	9.38
梁的竖向二阶频率 f_g/Hz	19.82	19.81
索的面外阻尼常数 $h_y/(\%)$	0.20	0.16
梁的横向阻尼常数 $h_h/(\%)$	0.35	0.35
梁的竖向阻尼常数 $h_g/(\%)$	0.14	0.15

将正弦荷载施加于主梁悬臂端头, 采用了横向加载和竖向加载两种方式。

横向加载: 如图 3(a)所示, 作用方向为横向, 加振频率在梁横向一阶频率(9.38Hz)附近, 以激起 1 : 1 副不稳定区域的拉索参数振动。

竖向加载: 如图 3(b)所示, 作用方向为竖向, 加振频率在梁竖向二阶频率(19.82Hz)附近, 以激起 2 : 1 主不稳定区域的拉索参数振动。



(a) 横向加载与副不稳定区域 (b) 竖向加载与主不稳定区域
图 3 加载方式和拉索参数振动示意图
Fig.3 Schema of load direction and cable parametric vibration

3.2 有限元模型和固有振动特性

采用 NL-Beam3D 程序建立索梁结构模型的空间计算模型。如图 4 所示, 斜拉索采用 19 个索单

元模拟, 悬臂梁采用 21 个三维梁单元模拟, 附加质量以集中质量的形式计入。索的锚固端和梁的锚固端为固结边界。

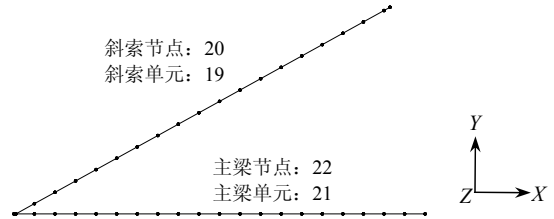


图 4 索-梁结构有限元模型
Fig.4 FE Model of Cable-Stayed-Beam Structure

由单索有限元模型求得其面外一阶频率为 9.620Hz, 与试验频率 9.63Hz 接近; 由悬臂梁有限元模型求得面外一阶频率和竖向二阶频率分别 9.374Hz、19.808Hz, 与试验频率 9.38Hz、19.82Hz 接近。

由图 4 所示的索梁结构有限元模型计算的固有振动模态示于表 2。可以看出, 相对于单独模型, 索的横向一阶频率由 9.620Hz 变为 9.867Hz; 梁的横向一阶频率由 9.374Hz 变为 9.073Hz, 竖向一阶频率由 3.161Hz 变为 5.259Hz, 竖向二阶频率由 19.808Hz 变为 19.822Hz。可见, 相对于单独的斜拉

表 2 索梁结构固有振动模态
Table 2 Natural vibration modes of cable-beam structure

阶数	频率/Hz	振型图
1	5.259	
2	9.073	
3	9.639	
4	9.867	
5	19.026	
6	19.197	
7	19.822	

索或悬臂梁，索梁结构的振动频率发生了变化。这是由于斜拉索的索力和弹性支撑对主梁产生了影响，从而引起了结构频率的变化。同时，除了梁或索的单独振动外，表 2 中还出现了索与梁同时发生振动的模态，这是斜拉索与主梁之间的相互作用引起的。

3.3 1 : 1 副不稳定区域的拉索参数振动

在横向加载工况中，加振频率在 8.5Hz~10.5Hz 之间，荷载幅值 0.15N，作用时间 30s。

为了与文献[10]表示的理论分析得到的索的相对位移进行对比，需要将有限元法得到的绝对位移进行换算。设梁的竖向和横向绝对位移为 $Y_b(s,t)$ 和 $Z_b(s,t)$ ，索的竖向和横向绝对位移为 $Y_c(s,t)$ 和 $Z_c(s,t)$ ，则索的面外相对位移 $W_c(s,t)$ 为：

$$W_c(s,t) = Z_c(s,t) - Z_b(s,t) \times s / L_c \quad (19)$$

式中， s 为索距索梁锚固点的距离； L_c 为斜拉索的计算长度。下面出现的索的位移均为经换算后的相对位移。

不同频率的正弦荷载横向作用下，斜拉索和主梁的最大振动位移示于图 5。其中，斜拉索的振幅为索中点位置的最大振动位移，主梁的振幅为悬臂端点处的最大振动位移。

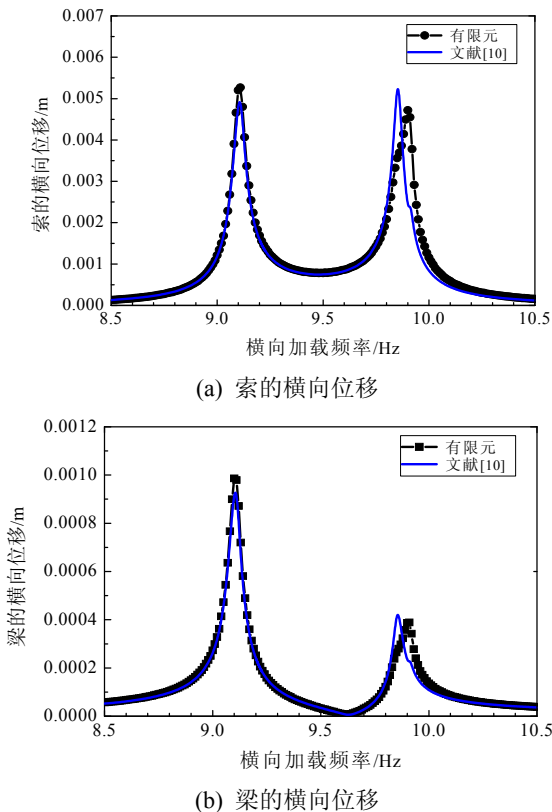


图 5 横向加载下最大振动位移

Fig.5 Maximum displacements under horizontal excitation

从图 5 可以看出，有限元结果与文献[10]接近；当横向加载频率在 9.11Hz 和 9.88Hz 附近时，斜拉索和主梁产生了较大振幅的横向振动。从前面的模态分析可知，虽然单独的主梁和斜拉索的面外一阶频率分别为 9.374Hz 和 9.620Hz，但是在索梁结构中，斜拉索对主梁的影响使这两个频率分别变为 9.073Hz 和 9.867Hz。此时，斜拉索发生了 1 : 1 副不稳定区域的参数振动，引起了主梁振动的增大。这说明，本文提出的有限元方法可用于计算索梁结构中 1 : 1 副不稳定区域的拉索参数振动。

从图 5(b)还可以看出，加载频率在 9.88Hz 附近的主梁横向振幅比加载频率在 9.11Hz 附近的横向振幅小。从模态分析可知，索梁结构面外一阶频率 9.073Hz、面外二阶频率 9.867Hz 对应的横向有效质量分别为 9.449 和 2.900，即面外一阶模态吸收的能量高于二阶，使得加载频率在 9.11Hz 附近的主梁面外振幅比加载频率在 9.88Hz 附近的主梁面外振幅大。

图 6 和图 7 分别是横向加载频率为 9.11Hz 和 9.88Hz 时索梁结构的位移时程响应。可以看出，对于副不稳定区域的参数振动，拉索达到最大振幅所需要的时间较短。

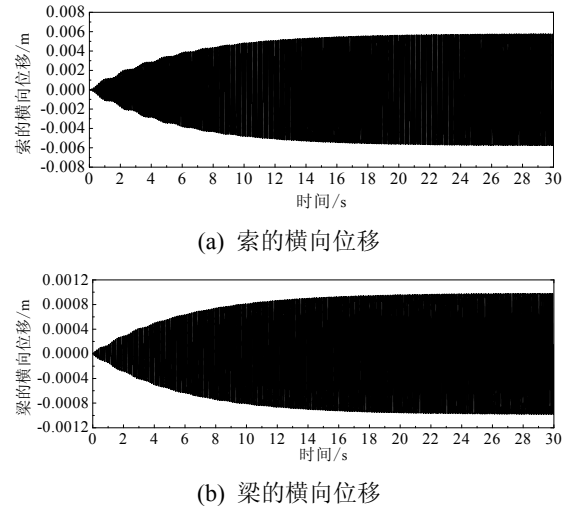
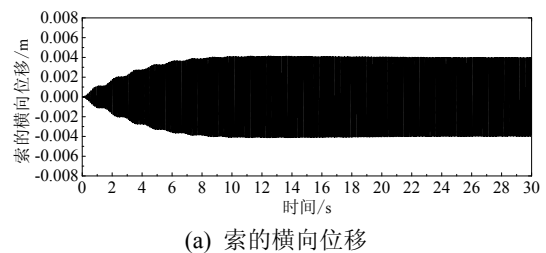
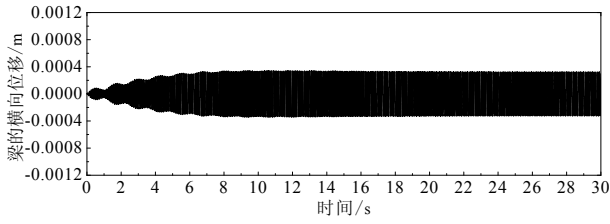


图 6 横向加振频率 9.11Hz 时位移时程曲线

Fig.6 Time history of displacement under horizontal excitation of frequency 9.11Hz





(b) 梁的横向位移

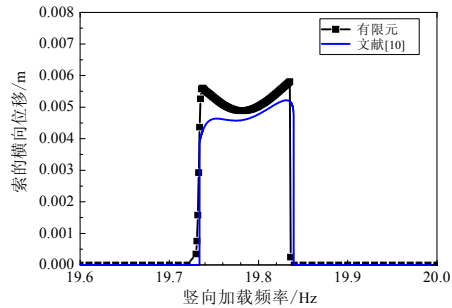
图7 横向加振频率 9.88Hz 时位移时程曲线

Fig.7 Time history of displacement under horizontal excitation of frequency 9.88Hz

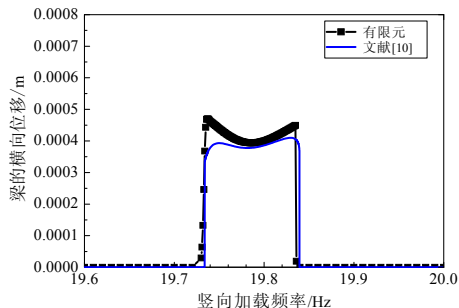
3.4 2:1 主不稳定区域的拉索参数振动

在竖向加载工况中, 加振频率在 19.6Hz~20Hz 之间, 荷载幅值 0.16N, 作用时间 190s。

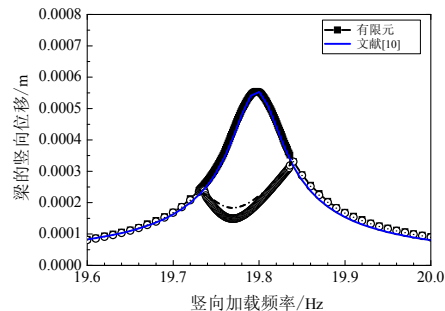
不同频率的正弦荷载竖向作用下, 斜拉索和主梁的最大振动位移示于图 8。



(a) 索的横向位移



(b) 梁的横向振动



(c) 梁的竖向振动

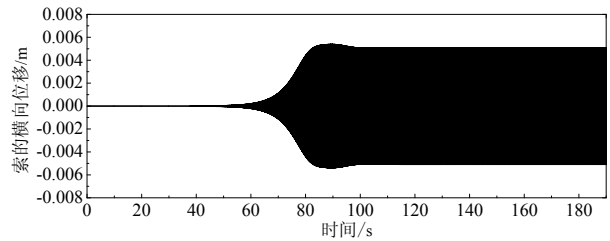
图 8 竖向加载下最大振动位移

Fig.8 Maximum displacements under vertical excitation

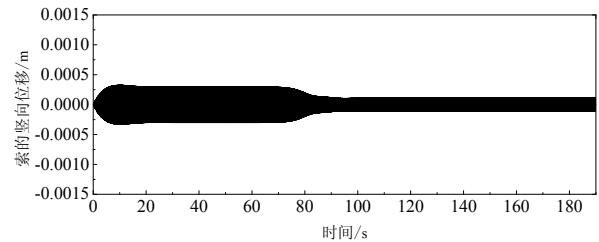
从图 8 可以看出, 当加载频率在 19.72Hz~

19.85Hz 之间时, 主梁竖向最大位移仅为 0.55mm, 但斜拉索的横向位移却达到 6mm, 是主梁竖向位移的十几倍。由于索梁结构的竖向二阶频率 19.822Hz 接近斜拉索面内一阶频率 9.867Hz 的 2 倍, 使得斜拉索发生了 2:1 主不稳定区域的大振幅参数振动, 并引起了主梁竖向振动的增大。

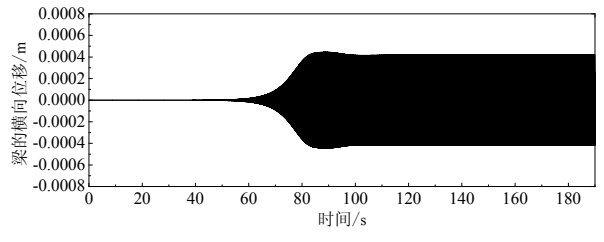
图 8 中有限元计算结果略高于文献[10]的计算结果。文献[10]采用的理论分析仅考虑了主梁竖向二阶、主梁横向一阶和斜拉索横向一阶这 3 个自由度, 无法考虑其他模态的影响^[20], 而本文的有限元方法采用了直接积分进行计算, 能同时考虑斜拉索和主梁的多阶模态。



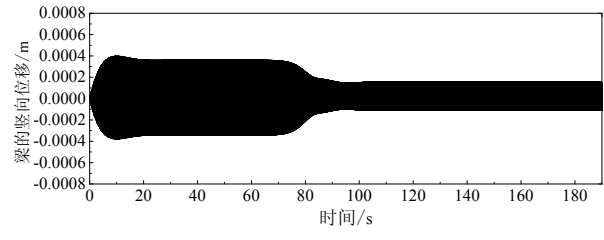
(a) 索的横向位移



(b) 索的竖向位移



(c) 梁的横向位移



(d) 梁的竖向位移

图 9 竖向加振频率 19.76Hz 时位移时程曲线

Fig.9 Time history of displacement under vertical excitation of frequency 19.76Hz

图 9 为竖向加载频率为 19.76Hz 时索梁结构的

位移时程响应。从图 9(a)可以看出,对于主不稳定区域的参数振动,拉索发生横向振动并达到最大振幅所需要的时间较长,这就是拉索参数振动时间效应问题^[21]。

从图 9(c)和图 9(d)可以看出,主梁的竖向振动包含了 0~90s 内的振动不稳定段和 90s~190s 内的振动稳定段,这是由于随着索的横向振动达到最大振幅并保持稳定这一过程中,主梁的竖向振动由较大振幅的不稳定段到较小振幅的稳定段。由于主梁的竖向振动包括不稳定和稳定两种状态,在图 8(c)中表示了这两种状态的振动位移幅值。

由于受到计算方法的限制,文献[10]进行的理论分析没有考虑索的面内振动,但是,从图 9(b)可知,斜拉索的竖向振动位移并不为零,而是与主梁的竖向振动位移具有相同的量级。作者在过去的研究^[3]中均以拉索的面内振动为分析对象,一些斜拉桥的实际观测也表明斜拉索的竖向位移量可能比面外位移量大^[22],因此,在索梁结构分析中需要考虑拉索的竖向位移。

4 结 论

本文采用索单元和去除自重的非线性动力计算方法,实现了包括参数振动在内的拉索非线性振动有限元计算方法,提出了扩大 Rayleigh 阻尼矩阵,可同时考虑主梁的阻尼和相对较小的拉索阻尼。为索梁结构非线性动力分析提供了一种有限元分析方法。

通过 1993 年 Fujino 的索梁结构试验的算例分析,本方法能正确地模拟副不稳定区域和主不稳定区域的拉索参数振动,验证了本方法和编写的程序的正确性。

参考文献:

- [1] Uhrig R. On kinetic response of cables of cable-stayed bridges due to combined parametric and forced excitation [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1993, 165(1): 185—192.
- [2] 李国豪. 桥梁结构稳定与振动[M]. 第 2 版. 北京: 中国铁道出版社, 1996: 455—464.
Li Guohao. Stability and vibration of bridge [M]. 2nd ed. Beijing: China Railway Publishing House, 1996: 455—464. (in Chinese)
- [3] Wu Q, Takahashi K, Okabayashi T, Nakamura S. Response characteristics of local vibrations in stay cables on an existing cable-stayed bridge [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, 261: 403—420.

- [4] Kovács I, Leonhardt A, Partner G. Zur frage der seil-schwingungen und der seildämpfung [J]. *Die Bautechnik*, 1982, 59(10): 325—332. (in German)
- [5] Tagata G. Harmonically forced finite amplitude vibration of a string [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1997, 51(4): 483—492.
- [6] Takahashi K. Dynamic stability of cables subjected to an axial periodic load [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1991, 144(2): 323—330.
- [7] Lilien J L, Pinto da Costa. Vibration amplitudes caused by parametric excitation of cable-stayed structures [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1994, 174(1): 69—90.
- [8] Caetano Elsa de Sa. Cable vibrations in cable-stayed bridges [M]. Zürich: IABSE, 2007: 71—108.
- [9] Abdel-Ghaffar A M, Khalifa M A. Importance of cable vibration in dynamics of cable-stayed bridges [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 1991, 117: 2571—2589.
- [10] Fujino Y, Warnitchai P, Pacheco B M. An experimental and analytical study of auto parametric resonance in a 3DOF model of cable-stayed-beam [J]. *Nonlinear Dynamics*, 1993, 4: 111—138.
- [11] 周海兵. 索-梁组合结构非线性动力学实验研究[D]. 长沙: 湖南大学, 2007.
Zhou Haibing. The experimental investigation on nonlinear dynamics of cable-beam structure [D]. Changsha: Hunan University, 2007. (in Chinese)
- [12] Broughton P, Ndumbaro P. The analysis of cable & catenary structures [M]. London: Thomas Telford, 1994: 17—28.
- [13] Irvine H M. Cable structures [M]. Cambridge: The Massachusetts Institute of Technology Press, MA, 1981: 87—134.
- [14] Ross C T F. Finite element programs for structural vibrations [M]. London: Springer, 1991: 69—76.
- [15] アーク情報システム. TDAP III [M]. 日本: 株式会社アーク情報システム, 2003.
ARK Information Systems Inc. TDAP III [M]. Japan: ARK Information Systems Inc., 2003. (in Japanese)
- [16] Caughey T K. Classical normal modes in damped linear dynamic systems [J]. *Journal of Applied Mechanics*, ASME, 1960, 27: 269—271.
- [17] Yamaguchi H. Fundamentals of cable dynamics [C]. Proceedings of International Seminar on Cable Dynamics, Technical Committee on Cable Structures and Wind, Japan Association for Wind Engineer, Tokyo, 1997, 81—94.
- [18] 吴庆雄, 陈宝春, 韦建刚. 三维杆系结构的几何非线性有限元分析[J]. *工程力学*, 2007, 24(12): 19—24, 42.
Wu Qingxiong, Chen Baochun, Wei Jiangang. A geometric nonlinear finite element analysis for 3D framed structures [J]. *Engineering Mechanics*, 2007, 24(12): 19—24, 42. (in Chinese)

(参考文献[19]—[22]转第 382 页)

的动力不稳定边界的临界频率方程,为伸缩臂式起重机吊臂的设计计算提供参考。

(3) 基于有限单元法编制的数值求解程序,用于梁柱结构的动力稳定分析具有非常高的精度及使用价值。

(4) 研究表明,随着阻尼系数的逐渐增大,其动力不稳定区域逐渐减小,且对第二动力稳定区域影响更加明显。

参考文献:

- [1] 陆念力, 兰朋, 白桦. 起重机箱型伸缩臂稳定性分析的精确理论解[J]. 哈尔滨建筑大学学报, 2000, 33(2): 89—93.
Lu Nianli, Lan Peng, Bai Hua. Precise stability analysis of telescopic boom [J]. Journal of Harbin University of Civil Engineering and Architecture, 2000, 33(2): 89—93. (in Chinese)
- [2] Park J S, Stallings J M. Lateral-torsional buckling of stepped beams with continuous bracing [J]. Journal of Bridge Engineering, 2005, 10(1): 87—95.
- [3] Naguleswaran S. Vibration and stability of an Euler-Bernoulli beam with up to three-step changes in cross-section and in axial force [J]. International Journal of Mechanical Science, 2003, 45(9): 1563—1579.
- [4] Zhang Hongsheng, Lu Nianli, Lan Peng. Buckling of stepped beams with elastic supports [J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2009, 16(3): 436—440.
- [5] Bolotin V V. The dynamic stability of elastic system [M]. San Francisco: Holden-Day, 1964.
- [6] 孙强. 直杆的动力稳定性分析[J]. 安徽建筑工业学院学报(自然科学版), 1996, 4(1): 38—43.
Sun Qiang. Analysis dynamical stability of rod [J]. Journal of Anhui Institute of Architecture and Industry (Natural Science Edition), 1996, 4(1): 38—43. (in Chinese)
- [7] 孙强, 杨大军. 弹性介质中杆的动力稳定性研究[J]. 工程力学, 1997, 14(1): 87—91.
Sun Qiang, Yang Dajun. Research on dynamic stability of bars in elastic medium [J]. Engineering Mechanics, 1997, 14(1): 87—91. (in Chinese)
- [8] 李晓东, 王秀丽. 屈曲约束支撑的动力稳定性分析[J]. 华中科技大学学报(城市科学版), 2008, 25(4): 223—226.
Li Xiaodong, Wang Xiuli. Dynamic stability analysis of buckling restrained brace [J]. Journal of Huazhong University of Science and Technology (Urban Science Edition), 2008, 25(4): 223—226. (in Chinese)
- [9] Ratko Pavlovic, Predrag Kozic. Dynamic stability of a thin-walled beam subjected to axial load and end moments [J]. Journal of Sound and Vibration, 2007, 301(3/4/5): 690—700.
- [10] De Rosa M A, Auciello N M. Dynamic stability analysis and DQM for beams with variable cross-section [J]. Mechanics Research Communications, 2008, 35(3): 187—192.
- [19] Warnitchai P. Nonlinear vibration and active control of cable-stayed bridges [D]. Tokyo: Tokyo University, 1990.
- [20] Xia Y, Fujino Y. Auto-parametric vibration of a cable-stayed-beam structure under random excitation [J]. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 2006, 132(3): 279—286.
- [21] Wu Q. Study on local vibration characteristics of stay cables in cable-stayed bridges and evaluation of cable loosening [D]. Nagasaki: Doctoral Dissertation of Nagasaki University, 2002.
- [22] Caetano E, Cunha A, Gattulli V, Lepidi M. Cable-deck dynamic interactions at the International Guediana Bridge: on-site measurements and finite element modeling [J]. Structural Control and Health Monitoring, 2008, 15(3): 237—264.

(上接第 354 页)