文章编号: 1000-5641(2012)03-0013-04

d-维网格的星边染色

邓　凯[1]，　刘信生[2]，　田双亮[1]

(1. 西北民族大学　数学与计算机科学学院, 兰州　730030;
2. 西北师范大学　数学与信息科学学院, 兰州　730070)

摘要: 研究图 G 的星边色数 $\chi'_s(G)$ 与其顶点数 ν 和边数 ε 之间的关系. 证明了当 $\Delta(G)\geqslant 2$ 时, 有 $\lceil\frac{8\varepsilon}{3\nu}\rceil\leqslant\chi'_s(G)$. 得到了 2-维网格的星边色数, 并且给出了超立方体和 d-维网格的星边色数的可达上界和下界.

关键词: 星边染色;　星边色数;　超立方体;　d-维网格
中图分类号: O157.5　　**文献标识码**: A　　**DOI:** 10.3969/j.issn.1000-5641.2012.03.003

Star edge coloring of d-dimensional grids

DENG Kai[1],　LIU Xin-sheng[2],　TIAN Shuang-liang[1]

(1. *College of Mathematics and Computer Science, Northwest University for Nationalities, Lanzhou*　730030, *China*;
2. *College of Mathematics and Information Science, Northwest Normal University, Lanzhou*　730070, *China*)

Abstract: The star chromatic index of graph G is denoted by $\chi'_s(G)$. In this paper, we studied the relationship between $\chi'_s(G)$, $|V(G)|=\nu$, and $|E(G)|=\varepsilon$, and proved that $\lceil\frac{8\varepsilon}{3\nu}\rceil\leqslant\chi'_s(G)$ for $\Delta(G)\geqslant 2$. The star chromatic index of 2-dimensional grid was obtained. We also got the attainable bounds for the star chromatic index of hypercubes and d-dimensional grids.

Key words: star edge coloring;　star chromatic index;　hypercube;　d-dimensional grid

0　引　言

1973 年, Grünbaum[1] 为了研究平面图的无圈染色提出了星染色的概念: 图 G 的星染色是 G 的一个正常顶点染色, 使得 G 中无长为 3 的路是 2-染色的. 使得 G 有星染色的最小颜色数称为 G 的星色数, 记作 $\chi_s(G)$. 2004 年, Fertin 等[2] 证明了 $\chi_s(G)\leqslant\lceil 20\Delta^{\frac{3}{2}}\rceil$, 并提出星色数的上界能否改进的问题. 针对这一问题, 刘信生等 [3] 提出了星边染色的概念: 若图 G 的一个正常边染色使得 G 中没有长为 4 的路是 2-边染色的 (其中 4-圈看作是两端点重合的长为 4 的路), 则称此染色是 G 的一个星边染色, 使得 G 有星边染色的最小颜色数称为 G 的星边色数, 记作 $\chi'_s(G)$. 文献 [3] 用概率方法证明了, 当 $\Delta(G)\geqslant 7$ 时, $\chi'_s(G)\leqslant\lceil 16(\Delta(G)-1)^{\frac{3}{2}}\rceil$,

收稿日期: 2011-04
基金项目: 国家民委科研项目(10XB01); 中央高校基本科研业务专项资金(zyz2011081)
第一作者: 邓凯, 男, 硕士, 讲师, 研究方向为图论及其应用. E-mail: dengkai04@126.com.

进而得到, 当 G 是最大度不小于 12 的线图时, $\chi_s(G) \leqslant \lceil 16\Delta(G)^{\frac{3}{2}} \rceil$, 从而部分地改进了文献 [2] 的结果. 近年来, 文献 [4] 确定了路、圈、扇、轮等特殊图类的星边色数. 文献 [5] 研究了关于路的联图的星边染色. 文献 [6] 研究了 2-连通外平面图的星边染色, 证明了最大度为 3 的 2-连通外平面的星边色数小于等于 6. 文献 [7] 研究了树的星边染色, 确定了完全 n-叉树的星边色数. 本文主要研究图 G 的星边色数 $\chi'_s(G)$ 与其顶点数 ν 和边数 ε 之间的关系, 以及 d-维网格的星边染色.

下面提到的图都是指无向简单图, 使用 $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示图 G 的顶点集合和边集合. $G\Box H$ 表示图 G 与图 H 的笛卡儿积. 设 $M \subseteq E(G)$, 用 $G[M]$ 表示由 M 生成的 G 的边导出子图. 设 $X \subseteq V(G)$, $Y \subseteq V(G)\backslash X$, 用 $[X,Y]_G$ 表示 G 中所有一个端点在 X 中另一个端点在 Y 中的边之集合. 设 $e,f \in E(G)$, e 与 f 之间的距离是指 G 的线图中对应两顶点之间的距离, 记为 $d_G(e,f)$. 设对图 G 已经进行了边染色 ϕ, 对 $e \in E(G)$, 用 $\phi(e)$ 表示 e 上所染颜色, 称 G 中有长为 k 的 (i,j)-路是指 G 中存在长为 k 的路由颜色 i,j 交替 2-边染色. 设 x 是实数, 用 $\lceil x \rceil$ 表示不小于 x 的最小整数. 本文没有定义的记号和术语均来自文献 [8, 9].

1 主要结果及证明

对于一般图 G, 利用边数与顶点数刻画了其星边色数的一个可达下界.

定理 1 设 G 是图, 且 $\Delta(G) \geqslant 2$, $|V(G)| = \nu$, $|E(G)| = \varepsilon$, 则 $\lceil \frac{8\varepsilon}{3\nu} \rceil \leqslant \chi'_s(G)$.

证 明 设 $\chi'_s(G) = k$, 则可用颜色 $1,2,\cdots,k$ 星边染色 G, 用 M_i 表示 G 中染颜色 i 的匹配, $i = 1,2,\cdots,k$. 对任意两个匹配 M_i 和 M_j, $i \neq j$, 由星边染色的定义知, $G[M_i \cup M_j]$ 是长不超过 3 的不相交的路之并. 设 $G[M_i \cup M_j]$ 中有 x_1 条孤立边, 有 x_2 条长为 2 的路, 有 x_3 条长为 3 的路, 记 $|V(G[M_i \cup M_j])| = \nu_{ij}$, 则 $|M_i| + |M_j| = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leqslant \frac{3}{4}(2x_1 + 3x_2 + 4x_3) = \frac{3}{4}\nu_{ij}$. 因此 $(k-1)\varepsilon = \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant k}(|M_i| + |M_j|) \leqslant \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant k} \frac{3}{4}\nu_{ij} \leqslant \frac{3}{4}\nu \cdot \frac{k(k-1)}{2}$. 注意到, $\Delta(G) \geqslant 2$, 所以 $k \geqslant 2$, 可得 $k \geqslant \frac{8\varepsilon}{3\nu}$. 因为 k 是整数, 所以 $k \geqslant \lceil \frac{8\varepsilon}{3\nu} \rceil$, 证毕.

下面讨论 d-维网格的星边染色. 我们知道 d-维网格同构于 d 条路的笛卡儿积. 设 $n_i \geqslant 2$, $1 \leqslant i \leqslant d$, 由 $P_{n_1}, P_{n_2}, \cdots, P_{n_d}$ 这 d 条路的笛卡儿积生成的 d-维网格记为 $G(n_1, n_2, \cdots, n_d)$. 文献 [6] 证明了 $\chi'_s(G(2,2)) = 3$, $\chi'_s(G(2,n)) = 4 (n \geqslant 3)$. 本文得到了以下结果.

定理 2 $\chi'_s(G(m,n)) = \begin{cases} 5, & m = 3, n = 3; \\ 6, & m \geqslant 3, n \geqslant 4. \end{cases}$

证 明 首先, 用穷举法不难验证 $\chi'_s(G(3,3)) = 5$, $\chi'_s(G(3,4)) = 6$. 下面讨论更一般的情形. 对于$m \geqslant 3, n \geqslant 4$, 有$G(m,n) = P_m \Box P_n$. 以$P_m$为横轴, 从$P_m$左端点到右端点的方向为横轴正方向; 以$P_n$为纵轴, 从$P_n$左端点到右端点的方向为纵轴正方向; 以$P_m$的左端点和$P_n$的左端点构成的 $G(m,n)$中顶点做原点, 建立直角坐标系. $G(m,n)$中相邻点对之间距离为单位 1, 则 $G(m,n)$的顶点都可以用非负整数点对(i,j)表示. 现在利用坐标给出$G(m,n)$的一个 6-边染色σ如下：

(1) 当$j \equiv 0 (\bmod 2)$时, 令$\sigma((i,j)(i+1,j)) \equiv i (\bmod 4)$, $\sigma((i,j)(i,j+1)) \equiv (i+1)(\bmod 4)$;

(2) 当$j \equiv 1 (\bmod 2)$时,

(2.1) 令$\sigma((i,j)(i+1,j)) \equiv (i+3)(\bmod 4)$;

(2.2) 令$\sigma((i,j)(i,j+1)) \equiv \begin{cases} i(\bmod 2) + 4, & \frac{j+1}{2} \equiv 1 (\bmod 2); \\ -i(\bmod 2) + 5, & \frac{j+1}{2} \equiv 0 (\bmod 2). \end{cases}$

显然, σ 是 $G(m,n)$ 的一个正常边染色. 根据文献[6] 中对 $G(2,n)$ 的星边染色讨论可知, 对$\forall a,b \in \{0,1,2,3\}$, $G(m,n)$ 中不存在长为4的 (a,b)-路. 又因为, 对$\forall e,f \in E(G(m,n))$,

且$\sigma(e)=\sigma(f)\in\{4,5\}$, e和f在$G(m,n)$的线图中对应的两顶点之间距离至少为3, 根据引言部分对图的两边之间距离的定义, 可得$d_{G(m,n)}(e,f)\geqslant 3$, 所以对$\forall a\in\{0,1,2,3\}$, $G(m,n)$ 中不存在长为 4 的 $(a,4)$-路, 不存在长为4的 $(a,5)$-路, 也不存在长为 4 的 $(4,5)$-路. 因此σ是$G(m,n)$的一个 6-星边染色, 所以 $\chi'_s(G(m,n))\leqslant 6$.

当 $m\geqslant 3, n\geqslant 4$ 时, $G(3,4)$ 是 $G(m,n)$ 的子图, 所以 $\chi'_s(G(m,n))\geqslant 6$, 由上述染色结论可得$\chi'_s(G(m,n))=6$, 证毕.

当 $n_1=n_2=\cdots=n_d=2$ 时, d-维网格同构于 d-维超立方体 Q_d.

定理 3　设 $d\geqslant 3$, 则 $\lceil\frac{4}{3}d\rceil\leqslant\chi'_s(Q_d)\leqslant 2d-2$.

证　明　先证明下界. 因为 $|V(Q_d)|=2^d, |E(Q_d)|=d\cdot 2^{d-1}$, 由定理 1 知下界成立.

现在证明上界. 设 $x_0\in V(Q_d)$, 定义 $X=\{x|d_{Q_d}(x_0,x)\equiv 0(\bmod 2), x\in V(Q_d)\}$, $Y=\{y|d_{Q_d}(x_0,y)\equiv 1(\bmod 2), y\in V(Q_d)\}$, 则 Q_d 是以 (X,Y) 为划分的二部图, 记 $Q_d=(X,Y)$. 设 Q'_d是 Q_d 的一个拷贝, 对应的二划分为 (X',Y'), 记 $Q'_d=(X',Y')$. 又 $Q_{d+1}=Q_d\Box P_2$, 根据笛卡儿积的定义, 可在 Q_d 与 Q'_d之间连边生成 Q_{d+1}, 连边的规则是 X 中顶点与 X' 中对应顶点相连, Y 中顶点与 Y' 中对应顶点相连, 显然 $(X\cup Y', Y\cup X')$是 Q_{d+1} 的一个二划分, $(E(Q_d), E(Q'_d), [X,X']_{Q_{d+1}}, [Y,Y']_{Q_{d+1}})$ 是 $E(Q_{d+1})$ 的一个划分. 设 $\chi'_s(Q_d)=k$, 用 k 种颜色 $1,2,\cdots,k$ 分别将 Q_d 和 Q'_d 星边染色, 再使用新颜色 a 染 $[X,X']_{Q_{d+1}}$ 中边, 使用新颜色 b 染 $[Y,Y']_{Q_{d+1}}$ 中边, 则得到 Q_{d+1} 的一个 $k+2$-正常边染色 ϕ. 因为对 $\forall e,f\in E(Q_{d+1})$, 且 $\phi(e)=\phi(f)\in\{a,b\}$, e 和 f 在 Q_{d+1} 的线图中对应的两顶点之间距离至少为3, 根据引言部分对图的两边之间距离的定义, 可得$d_{Q_{d+1}}(e,f)\geqslant 3$, 所以对 $\forall i\in\{1,2,\cdots,k\}$, Q_{d+1} 中不存在长为 4 的 (a,i)-路, 不存在长为 4 的 (b,i)-路, 也不存在长为 4 的 (a,b)-路. 因此 ϕ 是 Q_{d+1} 的一个 $k+2$-星边染色. 可得递推式

$$\chi'_s(Q_{d+1})\leqslant\chi'_s(Q_d)+2. \tag{1}$$

根据文献[4]的结论, 可得初始条件$\chi'_s(Q_3)=4$, 结合递推式 (1), 当 $d\geqslant 3$ 时有:

$$\chi'_s(Q_4)-4\leqslant 2,\quad \chi'_s(Q_5)-\chi'_s(Q_4)\leqslant 2,\cdots,\chi'_s(Q_d)-\chi'_s(Q_{d-1})\leqslant 2.$$

将上述不等式相加得 $\chi'_s(Q_d)\leqslant 2d-2$. 证毕.

当 $d=3$时, $\lceil\frac{4}{3}\times 3\rceil=2\times 3-2=4$, 根据定理 3 的结论, 可得$\chi'_s(Q_3)=4$. 当 $d=4$ 时, $\lceil\frac{4}{3}\times 4\rceil=2\times 4-2=6$, 根据定理 3 的结论, 可得$\chi'_s(Q_4)=6$. 因此, 定理 3 中的上界与下界均是可达的.

为了叙述方便, 下面把 d-维网格 $G(n_1,n_2,\cdots,n_d)$ 简记为 G_d.

定理 4　设 $d\geqslant 2$, 则 $\lceil\frac{8}{3}(d-\sum_{i=1}^{d}\frac{1}{n_i})\rceil\leqslant\chi'_s(G_d)\leqslant 4d-2$.

证　明　先证明下界. 因为 $|V(G_d)|=n_1\times n_2\times\cdots\times n_d$, $|E(G_d)|=n_1\times n_2\times\cdots\times n_d\times(d-\sum_{i=1}^{d}\frac{1}{n_i})$, 利用定理 1 结论可得下界.

现在证明上界. 设 $x_0\in V(G_d)$, 定义 $X=\{x|d_{G_d}(x_0,x)\equiv 0(\bmod 2),\ x\in V(G_d)\}$, $Y=\{y|d_{G_d}(x_0,y)\equiv 1(\bmod 2),\ y\in V(G_d)\}$, 则 G_d 是以 (X,Y) 为划分的二部图. 设 $G_d^{(1)}$, $G_d^{(2)},\cdots,G_d^{(n)}$ 是 G_d 的 n 个拷贝, $G_d^{(i)}$ 对应的二划分为 $(X^{(i)},Y^{(i)})$. 又 $G_{d+1}=G_d\Box P_n(n\geqslant 2)$, 根据笛卡儿积定义, 在 $G_d^{(1)}$, $G_d^{(2)}$, $\cdots$, $G_d^{(n)}$ 之间连边可生成 G_{d+1}, 连边规则是 $X^{(i)}$ 中顶点与 $X^{(i+1)}$ 中对应顶点连边, $Y^{(i)}$ 中顶点与 $Y^{(i+1)}$ 中对应顶点连边, $i=1,2,\cdots,n-1$. 显然 $(E(G_d^{(1)}),\cdots,E(G_d^{(n)}), [X^{(1)},X^{(2)}]_{G_{d+1}},\cdots,[X^{(n-1)},X^{(n)}]_{G_{d+1}}, [Y^{(1)},Y^{(2)}]_{G_{d+1}},\cdots,[Y^{(n-1)},$

$Y^{(n)}]_{G_{d+1}})$ 是 $E(G_{d+1})$ 的一个划分. 设 $\chi'_s(G_d)=k$, 用 k 种颜色 $1,2,\cdots,k$ 分别将 $G_d^{(1)}$, $G_d^{(2)}$, $\cdots$, $G_d^{(n)}$ 星边染色, 当 $i\equiv 0(\bmod 4)$ 时, 用新颜色 b_2 染 $[X^{(i)}, X^{(i+1)}]_{G_{d+1}}$ 中边, 用新颜色 a_2 染 $[Y^{(i)}, Y^{(i+1)}]_{G_{d+1}}$ 中边, 当 $i\equiv 1(\bmod 4)$ 时, 用新颜色 a_1 染 $[X^{(i)}, X^{(i+1)}]_{G_{d+1}}$ 中边, 用新颜色 b_1 染 $[Y^{(i)}, Y^{(i+1)}]_{G_{d+1}}$ 中边, 当 $i\equiv 2(\bmod 4)$ 时, 用新颜色 a_2 染 $[X^{(i)}, X^{(i+1)}]_{G_{d+1}}$ 中边, 用新颜色 b_2 染 $[Y^{(i)}, Y^{(i+1)}]_{G_{d+1}}$ 中边, 当 $i\equiv 3(\bmod 4)$ 时, 用新颜色 b_1 染 $[X^{(i)}, X^{(i+1)}]_{G_{d+1}}$ 中边, 用新颜色 a_1 染 $[Y^{(i)}, Y^{(i+1)}]_{G_{d+1}}$ 中边, 则得到 G_{d+1} 的一个 $k+4$-正常边染色 φ. 因为对 $\forall e,f\in E(G_{d+1})$, 且 $\varphi(e)=\varphi(f)\in\{a_1,a_2,b_1,b_2\}$, e和f在G_{d+1}的线图中对应的两顶点之间距离至少为3, 根据引言部分对图的两边之间距离的定义, 可得$d_{G_{d+1}}(e,f)\geqslant 3$, 所以对 $\forall i\in\{1,2,\cdots,k\}$, G_{d+1} 中不存在长为 4 的 (a,i)-路, 也不存在长为 4 的 (a,b)-路, 其中 $a,b\in\{a_1,a_2,b_1,b_2\}$. 因此 φ 是 G_{d+1} 的一个 $k+4$-星边染色. 可得递推式

$$\chi'_s(G_{d+1})\leqslant\chi'_s(G_d)+4. \tag{2}$$

由定理 2 知 $\chi'_s(G_2)\leqslant 6$, 结合递推式 (2) 有

$$\chi'_s(G_3)-6\leqslant 4,\quad \chi'_s(G_4)-\chi'_s(G_3)\leqslant 4,\quad \cdots,\quad \chi'_s(G_d)-\chi'_s(G_{d-1})\leqslant 4.$$

将上述不等式相加得 $\chi'_s(G_d)\leqslant 4d-2$. 证毕.

当每个 $n_i(1\leqslant i\leqslant d)$ 都等于 2 时, 定理 3 的下界是定理 4 的下界的特例. 当 $d=2$, 且 $n_1\geqslant 9, n_2\geqslant 73$ 时, $\lceil\frac{8}{3}(2-\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{n_i})\rceil=4\times 2-2=6$. 结合定理 2 的结论可知, 定理 1 的下界以及定理 4 的上界和下界都是可达的.

[参 考 文 献]

[1] GRÜNBAUM B. Acyclic colourings of planar graphs[J]. Isreal J Math, 1973, 14(3): 390-408.

[2] FERTIN G, RASPAUD A, REED B. Star coloring of graphs[J]. J Graph Theory, 2004, 47(3): 163-182.

[3] 刘信生, 邓凯. 最大度不小于7的图的星边色数的一个上界[J]. 兰州大学学报: 自然科学版, 2008, 44(2): 98-100.

[4] 邓凯. 图的星边染色[D]. 兰州: 西北师范大学, 2007.

[5] 杨玉红, 刘信生, 陈祥恩. 联图 $P_m\vee P_n$ 的星边染色[J]. 西北师范大学学报: 自然科学版, 2008, 44(6): 26-28.

[6] 邓凯. 最大度为3的2-连通外平面图的星边染色[J]. 东北师范大学学报: 自然科学版, 2011, 43(2): 7-10.

[7] 邓凯, 刘信生, 田双亮. 树的星边染色[J]. 山东大学学报: 理学版, 2011,46(8): 84-88.

[8] BONDY J A, MURTY U S R. Graph Theory with Applications[M]. London: Macmillan Press, 1976.

[9] 陈明, 陈宝兴. 折叠超立方体的谱[J]. 华东师范大学学报: 自然科学版, 2011(2): 39-46.