文章编号: 1000-5641(2012)03-0017-07

时间测度链上二阶动力方程的振动准则

杨甲山

(邵阳学院 理学与信息科学系, 湖南 邵阳 422004)

摘要: 研究了时间测度链上的一类具有非线性中立项的二阶非线性变时滞动力方程的振动性. 利用时间测度链上的理论和一些分析技巧, 通过引入参数函数和Riccati变换, 得到了该方程振动的几个充分条件, 推广和改进了现有文献中的有关结果.

关键词: 时间测度链; 动力方程; 非线性中立项; 变时滞; 振动性

中图分类号: O157.7　　**文献标识码**: A　　**DOI:** 10.3969/j.issn.1000-5641.2012.03.004

Oscillation criteria of a class of second-order dynamic equations on time scales

YANG Jia-shan

(*Department of Science and Information, Shaoyang University, Shaoyang Hunan* 422004, *China*)

Abstract: The oscillation for a class of second-order nonlinear variable delay dynamic equations on time scales with nonlinear neutral term was discussed. Using the time scales theory and some necessary analytic techniques, and by introducing parameter function and the generalized Riccati transformation, some sufficient conditions for the oscillation of the equations were obtained. Some existing results in the literature are improved and extended.

Key words: time scales; dynamic equations; nonlinear neutral term; variable delay; oscillation

0 引　言

对于连续系统微分方程及离散系统差分方程的振动理论和渐近理论的研究历史悠久, 其实际应用也非常广泛, 直到现在这个领域的研究还非常活跃[1,2]. 为了统一连续分析和离散分析理论, 德国学者Stefan Hilger[3]于1990年首次提出了时间测度链上的分析理论, 引起了学术界的广泛兴趣和高度关注[4−12]. 如Bohner和Peterson[4], Agarwal、Bohner和O'Regan[5]研究了时间测度链上的几类典型的动力学方程的振动性问题, Sahiner[6]研究了时间测度链上二阶非线性时滞动力方程 $x^{\Delta\Delta}(t)+p(t)f(x(\tau(t)))=0$ 的振动

收稿日期: 2011-05

基金项目: 湖南省教育厅科研重点项目(09A082)

作者简介: 杨甲山, 男, 副教授, 研究方向为微分差分方程. E-mail: syxyyjs@163.com.

性问题. 而关于下面的时间测度链上一类非常广泛的具有非线性中立项的二阶非线性变时滞动力方程

$$\left\{A(t)\phi\Big(\Big[x(t)+\sum_{j=1}^{l}B_j(t)g_j(x(\tau_j(t)))\Big]^{\Delta}\Big)\right\}^{\Delta}+\sum_{i=1}^{m}P_i(t)f_i(\phi(x(\delta_i(t))))=0, t\in\mathbf{T} \qquad (1)$$

的振动性, 尚未见到任何类似的公开结果. 这里 $m\geqslant 1, l\geqslant 1$ 为整数; $\phi(u)=|u|^{\lambda-1}u$, $\lambda>0$ 为实常数; $A(t), B_j(t), P_i(t)\in C_{rd}(\mathbf{T},\mathbf{R})(j=1,2,\cdots,l; i=1,2,\cdots,m$, 下同, 略); $\mathbf{T}$ 为任意时间测度链; $\tau_j(t), \delta_i(t)$ 均为定义在 $\mathbf{T}$ 到 $\mathbf{T}$ 上的滞量函数; $g_j(u)\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$ 且 $ug_j(u)>0(u\neq 0)$; $f_i(u)\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$ 且 $uf_i(u)>0(u\neq 0)$.

时间测度链 $\mathbf{T}$ 是实数域上的任意闭子集, 当其等于实数集或整数集时则分别表示微分方程和差分方程的经典理论. 动力方程的新理论不仅在时间测度链上统一了微分方程和差分方程的理论, 而且随着时间测度链的不同, 将动力方程推广到了微分方程与差分方程之间, 许多有意义的时间测度链是存在的. 例如, 当 $\mathbf{T}=q^{\mathbf{N}_0}=\{q^t: t\in\mathbf{N}_0, q>1\}$ 时, 这样的动力方程称为 $q-$ 差分方程, 这类方程在量子理论方面有重要的应用[7]. 由于我们讨论的是方程解的振动性, 所以本文假设时间测度链 $\mathbf{T}$ 是无界的: $\sup\mathbf{T}=+\infty$. 设 $t_0\in\mathbf{T}$ 且 $t_0>0$, 定义时间测度链区间 $[t_0,+\infty)_{\mathbf{T}}=[t_0,+\infty)\cap\mathbf{T}$. 方程 (1) 的解是指定义在时间测度链 $\mathbf{T}$ 上满足方程 (1) 的非平凡实值函数 $x(t), t\in\mathbf{T}$. 方程 (1) 的解 $x(t)$ 称为振动的, 如果 $x(t)$ 既不最终为正, 也不最终为负. 否则, 称为非振动的. 方程 (1) 称为振动的, 如果它的所有解都是振动的. 我们仅关注方程 (1) 的不最终恒为 0 的解. 为了方便, 考虑如下假设:

(H_1) $\tau_j(t)\leqslant t, \lim\limits_{t\to+\infty}\tau_j(t)=+\infty, \delta_i(t)\leqslant t, \lim\limits_{t\to+\infty}\delta_i(t)=+\infty$.

(H_2) $P_i(t)>0; B_j(t)\geqslant 0$ 且 $0\leqslant\sum\limits_{j=1}^{l}B_j(t)\leqslant 1$; $A(t)>0, A^{\Delta}(t)\geqslant 0$ 且 $\int_{t_0}^{+\infty}[A(s)]^{-\frac{1}{\lambda}}\Delta s=+\infty$.

(H_3) 存在正常数 L_i 和 $0<\beta_j\leqslant 1$, 使得 $\frac{f_i(u)}{u}\geqslant L_i(u\neq 0), \frac{g_j(u)}{u}\leqslant\beta_j(u\neq 0)$.

本文研究方程 (1) 的振动性, 得到该方程振动的几个充分条件, 统一相应的微分方程和差分方程振动的有关结论, 而且推广并改进现有文献中的某些结果.

1 几个基本引理

为了叙述方便, 引入记号:

$$y(t)=x(t)+\sum_{j=1}^{l}B_j(t)g_j(x(\tau_j(t))), z(t)=A(t)\phi\Big(\Big[x(t)+\sum_{j=1}^{l}B_j(t)g_j(x(\tau_j(t)))\Big]^{\Delta}\Big)=A(t)\phi(y^{\Delta}(t)),$$

则方程 (1) 可写成如下等价形式:

$$z^{\Delta}(t)+\sum_{i=1}^{m}P_i(t)f_i(\phi(x(\delta_i(t))))=0. \qquad (2)$$

引理 1(Keller连锁法则)[4] 若$f:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$是连续可微的, $g:\mathbf{T}\longrightarrow\mathbf{R}$ 是 Δ可导的, 则 $f\circ g: T\longrightarrow\mathbf{R}$是$\Delta$ 可导的, 且 $(f\circ g)^{\Delta}(t)=\Big[\int_0^1 f'(g(t)+h\mu(t)g^{\Delta}(t))\mathrm{d}h\Big]g^{\Delta}(t)$.

由引理1可得, 当 $x(t)$ 是 Δ 可导时, 则有下式成立:

$$((x(t))^{\lambda})^{\Delta}=\lambda\int_0^1[hx^{\sigma}+(1-h)x]^{\lambda-1}x^{\Delta}(t)\mathrm{d}h. \qquad (3)$$

引理 2[6]　设下面条件成立:

(1) $u\in C_{rd}^2(\mathbf{I},\mathbf{R})$, 其中 $\mathbf{I}=[t^*,+\infty), t^*>0$; (2) $u(t)>0, u^\Delta(t)>0, u^{\Delta\Delta}(t)\leqslant 0, t\geqslant t^*$, 则对每一个 $k\in(0,1)$, 存在一个常数 $t_k\in\mathbf{T}, t_k>t^*$, 有 $u(\sigma(t))\leqslant \frac{\sigma(t)u(\delta_i(t))}{k\delta_i(t)}(t\geqslant t_k)$.

引理 3　设条件(H_1)—(H_3)成立, 若 $x(t)$ 是方程(1)的一个最终正解, 则存在 $t_1\in[t_0,+\infty)_{\mathbf{T}}$, 使得当 $t\in[t_1,+\infty)_{\mathbf{T}}$ 时, 有

$$y(t)>0, y^\Delta(t)>0, z(t)>0, z^\Delta(t)<0, \tag{4}$$

且 $[1-\sum\limits_{j=1}^{l}\beta_jB_j(t)]y(t)\leqslant x(t)$.

证　明　因为 $x(t)$ 是方程 (1) 的一个最终正解, 所以存在 $t_1\in[t_0,+\infty)_{\mathbf{T}}$, 当 $t\in[t_1,+\infty)_{\mathbf{T}}$ 时, 有 $x(t)>0, x(\tau_j(t))>0, x(\delta_i(t))>0$. 从而 $y(t)>0$. 由方程 (2) 得

$$z^\Delta(t)\leqslant -\sum_{i=1}^{m}L_iP_i(t)\phi(x(\delta_i(t)))\leqslant -L\sum_{i=1}^{m}P_i(t)[x(\delta_i(t))]^\lambda, t\in[t_1,+\infty)_{\mathbf{T}} \tag{5}$$

(这里 $L=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\{L_i\}$). 因此, $z(t)=A(t)\phi(y^\Delta(t))=A(t)|y^\Delta(t)|^{\lambda-1}y^\Delta(t)$ 是单调递减的, 且能断言 $y^\Delta(t)>0$. 事实上, $y^\Delta(t)$ 或者最终为正, 或者最终为负. 若存在 $t_2\in[t_1,+\infty)_{\mathbf{T}}$, 使得当 $t\in[t_2,+\infty)_{\mathbf{T}}$ 时, $y^\Delta(t)<0$, 则当 $t\in[t_2,+\infty)_{\mathbf{T}}$ 时, 有

$$A(t)|y^\Delta(t)|^{\lambda-1}y^\Delta(t)\leqslant A(t_2)|y^\Delta(t_2)|^{\lambda-1}y^\Delta(t_2)=-M,$$

其中 $M=A(t_2)|y^\Delta(t_2)|^{\lambda-1}[-y^\Delta(t_2)]>0$. 于是 $[-y^\Delta(t)]^\lambda\geqslant\frac{M}{A(t)}$, 即 $y^\Delta(t)\leqslant -M^{\frac{1}{\lambda}}[A(t)]^{-\frac{1}{\lambda}}$, 由 ($H_2$), 得

$$y(t)\leqslant y(t_2)-M^{\frac{1}{\lambda}}\int_{t_2}^{t}[A(s)]^{-\frac{1}{\lambda}}\Delta s\to-\infty(t\to+\infty),$$

这与 $y(t)>0$ 矛盾! 所以 $y^\Delta(t)>0$,进而 $z(t)>0$. 此外, 由 $x(t)\leqslant y(t)$,得

$$y(t)\leqslant x(t)+\sum_{j=1}^{l}B_j(t)\beta_jx(\tau_j(t))\leqslant x(t)+\sum_{j=1}^{l}B_j(t)\beta_jy(\tau_j(t))\leqslant x(t)+\sum_{j=1}^{l}\beta_jB_j(t)y(t),$$

所以 $[1-\sum\limits_{j=1}^{l}\beta_jB_j(t)]y(t)\leqslant x(t)\leqslant y(t)$. 引理证毕.

引理 4[8]　设 a,b 为非负实数, 则 $a^\lambda-\lambda ab^{\lambda-1}+(\lambda-1)b^\lambda\geqslant 0, \lambda>1$, 等号成立当且仅当 $a=b$.

2　主要结果和证明

定理 1　设条件(H_1)—(H_3)成立, 若

$$\lim_{t\to+\infty}\left\{\frac{t^\lambda}{A(t)}\sum_{i=1}^{m}\int_t^{+\infty}P_i(s)\Big[1-\sum_{j=1}^{l}\beta_jB_j(\delta_i(s))\Big]^\lambda\left[\frac{\delta_i(s)}{s}\right]^\lambda\Delta s\right\}=+\infty, \tag{6}$$

则方程(1)在 $[t_0,+\infty)_{\mathbf{T}}$ 上是振动的.

证　明　不失一般性, 设方程(1)在 $[t_0,+\infty)_{\mathbf{T}}$ 上有一个最终正解 $x(t)$ (最终负解时类似可证), 则存在 $t_1\in[t_0,+\infty)_{\mathbf{T}}$, 当 $t\in[t_1,+\infty)_{\mathbf{T}}$ 时, $x(t)>0, x(\tau_j(t))>0, x(\delta_i(t))>0$, 且由引理 3 知式(4)成立, 并且存在常数 $\alpha>0$, 有 $y(t)>\alpha$. 由式(3), 得

$$((y(t))^{\lambda})^{\Delta}\geqslant\lambda\int_0^1[hy+(1-h)y]^{\lambda-1}\,y^{\Delta}(t)\mathrm{d}h=\lambda(y(t))^{\lambda-1}y^{\Delta}(t),$$

所以 $((y^{\Delta}(t))^{\lambda})^{\Delta}\geqslant\lambda(y^{\Delta}(t))^{\lambda-1}y^{\Delta\Delta}(t)$, 于是, 由函数乘积的求导公式, 有

$$\begin{aligned}z^{\Delta}(t)&=[A(t)(y^{\Delta}(t))^{\lambda}]^{\Delta}=A^{\Delta}(t)(y^{\Delta}(t))^{\lambda}+A(\sigma(t))((y^{\Delta}(t))^{\lambda})^{\Delta}\\&\geqslant A^{\Delta}(t)(y^{\Delta}(t))^{\lambda}+\lambda A(\sigma(t))(y^{\Delta}(t))^{\lambda-1}y^{\Delta\Delta}(t),\end{aligned}$$

注意到式(4)和 $A^{\Delta}(t)\geqslant 0$, 得 $y^{\Delta\Delta}(t)<0$. 由引理 2 知, $y(t)\leqslant\frac{t}{k\delta_i(t)}y(\delta_i(t))$, 注意到引理 3, 有

$$x(\delta_i(t))\geqslant\Big[1-\sum_{j=1}^{l}\beta_jB_j(\delta_i(t))\Big]y(\delta_i(t))\geqslant k\Big[1-\sum_{j=1}^{l}\beta_jB_j(\delta_i(t))\Big]y(t)\frac{\delta_i(t)}{t},$$

于是, 由式(5), 当 $u\geqslant t\geqslant t_1$ 时, 有

$$\begin{aligned}z(u)&=z(t)+\int_t^u z^{\Delta}(s)\Delta s\leqslant z(t)-L\int_t^u\sum_{i=1}^{m}P_i(s)[x(\delta_i(s))]^{\lambda}\Delta s\\&\leqslant z(t)-Lk^{\lambda}\int_t^u\sum_{i=1}^{m}P_i(s)[y(s)]^{\lambda}\Big[1-\sum_{j=1}^{l}\beta_jB_j(\delta_i(s))\Big]^{\lambda}\left[\frac{\delta_i(s)}{s}\right]^{\lambda}\Delta s,\end{aligned}$$

所以

$$Lk^{\lambda}\int_t^u\sum_{i=1}^{m}P_i(s)[y(s)]^{\lambda}\Big[1-\sum_{j=1}^{l}\beta_jB_j(\delta_i(s))\Big]^{\lambda}\left[\frac{\delta_i(s)}{s}\right]^{\lambda}\Delta s\leqslant z(t)-z(u)\leqslant z(t)=A(t)(y^{\Delta}(t))^{\lambda}.$$

令 $u\to+\infty$, 则有

$$A(t)(y^{\Delta}(t))^{\lambda}\geqslant Lk^{\lambda}\int_t^{+\infty}\sum_{i=1}^{m}P_i(s)[y(s)]^{\lambda}\Big[1-\sum_{j=1}^{l}\beta_jB_j(\delta_i(s))\Big]^{\lambda}\left[\frac{\delta_i(s)}{s}\right]^{\lambda}\Delta s.\tag{7}$$

又由于 $y^{\Delta\Delta}(t)\leqslant 0(t\in[t_1,+\infty)_{\mathbf{T}})$, 所以当 $t\in[t_1,+\infty)_{\mathbf{T}}$ 时, 有

$$y(t)=y(t_1)+\int_{t_1}^{t}y^{\Delta}(s)\Delta s\geqslant y(t_1)+y^{\Delta}(t)(t-t_1)\geqslant(t-t_1)y^{\Delta}(t).$$

对 $0<k<1$, 于是当 $t\geqslant\frac{t_1}{1-k}$ 时, 有 $t-t_1\geqslant kt$, 令 $t_2=\frac{t_1}{1-k}$, 则由上式得 $y(t)\geqslant kty^{\Delta}(t)$, $t\in[t_2,+\infty)_{\mathbf{T}}$, 注意到式 (7), 有

$$\begin{aligned}A(t)(y(t))^{\lambda}&\geqslant(kt)^{\lambda}A(t)(y^{\Delta}(t))^{\lambda}\\&\geqslant Lk^{2\lambda}t^{\lambda}\int_t^{+\infty}\sum_{i=1}^{m}P_i(s)[y(s)]^{\lambda}\Big[1-\sum_{j=1}^{l}\beta_jB_j(\delta_i(s))\Big]^{\lambda}\left[\frac{\delta_i(s)}{s}\right]^{\lambda}\Delta s\\&\geqslant Lk^{2\lambda}t^{\lambda}(y(t))^{\lambda}\sum_{i=1}^{m}\int_t^{+\infty}P_i(s)\Big[1-\sum_{j=1}^{l}\beta_jB_j(\delta_i(s))\Big]^{\lambda}\left[\frac{\delta_i(s)}{s}\right]^{\lambda}\Delta s,\end{aligned}$$

因此
$$\frac{t^{\lambda}}{A(t)}\sum_{i=1}^{m}\int_{t}^{+\infty}P_i(s)\Big[1-\sum_{j=1}^{l}\beta_jB_j(\delta_i(s))\Big]^{\lambda}\left[\frac{\delta_i(s)}{s}\right]^{\lambda}\Delta s\leqslant\frac{1}{Lk^{2\lambda}}.$$
这与式 (6) 矛盾! 定理证毕.

例 1　考虑时间测度链 $[3,+\infty)_{\mathbf{T}}$ 上的二阶时滞动力方程
$$\{A(t)\phi([x(t)+B(t)g(x(\tau(t)))]^{\Delta})\}^{\Delta}+P(t)f(\phi(x(\delta(t))))=0,$$
这是方程 (1) 的特殊情形:$m=l=1$. 若取 $A(t)=t,\lambda=5,B(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{t},\tau(t)=\frac{t}{2},\delta(t)=\frac{t}{\sqrt{2}},P(t)=\frac{t}{(t+2)^5},g(u)=\frac{u}{\sqrt{2+\sin^4(u+3)}},f(u)=u$,则 $\frac{g(u)}{u}=\frac{1}{\sqrt{2+\sin^4(u+3)}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}=\beta(u\neq0)$,且
$$\begin{aligned}&\frac{t^{\lambda}}{A(t)}\sum_{i=1}^{m}\int_{t}^{+\infty}P_i(s)\Big[1-\sum_{j=1}^{l}\beta_jB_j(\delta_i(s))\Big]^{\lambda}\left[\frac{\delta_i(s)}{s}\right]^{\lambda}\Delta s\\&=\frac{t^5}{t}\int_t^{+\infty}\frac{s}{(s+2)^5}\left[1-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{s}\right)\right]^5\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right]^5\Delta s\geqslant\frac{t^4}{3\times128\sqrt{2}}\int_t^{+\infty}\frac{3}{s^3\sigma(s)}\Delta s\\&\geqslant\frac{t^4}{3\times128\sqrt{2}}\int_t^{+\infty}\frac{s^2+s\sigma(s)+\sigma^2(s)}{s^3\sigma^3(s)}\Delta s=\frac{t^4}{3\times128\sqrt{2}}\int_t^{+\infty}\left(\frac{-1}{s^3}\right)^{\Delta}\Delta s\to+\infty(t\to+\infty),\end{aligned}$$
定理 1 的其余条件显然满足. 于是由定理 1 知此时方程是振动的.

注 1　文献[9]中的定理 4.4 是本文定理 1 当 $m=1,\lambda=1,A(t)\equiv1,B_j(t)\equiv0$ 时的特殊情况. 此外, 由于例 1 中的方程是具有非线性中立项的, 因此现有文献中的定理均不能判定例 1 中的方程是否振动.

定理 2　设条件 (H_1)—(H_3) 成立, 若存在正的 Δ 可微函数 $\rho(s)$ 和常数 $\mu\geqslant1$, 使得
$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t^{\mu}}\int_{t_2}^{t}(t-s)^{\mu}\left\{L_0\Psi(s)-\frac{[|\rho^{\Delta}(s)|A(\sigma(s))]^{\lambda+1}}{(\lambda+1)^{\lambda+1}[\rho(s)A(s)]^{\lambda}}\right\}\Delta s=+\infty,\tag{8}$$
这里 $t_2\geqslant t_0,L_0>0$ 为某常数, 函数 $\Psi(s)$ 定义如式 (9) . 则方程(1)在 $[t_0,+\infty)_{\mathbf{T}}$ 上是振动的.
$$\Psi(s)=\rho(s)\sum_{i=1}^{m}P_i(s)\Big[1-\sum_{j=1}^{l}\beta_jB_j(\delta_i(s))\Big]^{\lambda}\left[\frac{\delta_i(s)}{\sigma(s)}\right]^{\lambda}.\tag{9}$$

证　明　不失一般性, 设方程(1)在 $[t_0,+\infty)_{\mathbf{T}}$ 上有一个最终正解 $x(t)$, 类似于定理 1, 知当 $t\in[t_1,+\infty)_{\mathbf{T}}$ 时, 式 (4) 成立, $y^{\Delta\Delta}(t)<0$. 于是由引理 2 和引理 3, 对常数 $k\in(0,1)$, 存在 $t_2\geqslant\max\{t_k,t_1\}$, 使得
$$y(t)\leqslant y(\sigma(t))\leqslant\frac{\sigma(t)}{k\delta_i(t)}y(\delta_i(t))\leqslant\frac{\sigma(t)}{k\delta_i(t)}y(t),t\in[t_2,+\infty)_{\mathbf{T}}.\tag{10}$$

定义广义的 Riccati 变换 $w(t)=\rho(t)\frac{A(t)\phi(y^{\Delta}(t))}{\phi(y(t))}=\rho(t)\frac{A(t)(y^{\Delta}(t))^{\lambda}}{(y(t))^{\lambda}},t\in[t_2,+\infty)_{\mathbf{T}}$,

则 $w(t)>0$. 分别注意到式 (5) 、引理 3 及 $[(y(t))^{\lambda}]^{\Delta}\geqslant\lambda(y(t))^{\lambda-1}y^{\Delta}(t)$, 有

$$\begin{aligned}
w^{\Delta}(t)&=\frac{\rho^{\Delta}(t)}{\rho(\sigma(t))}w(\sigma(t))+\rho(t)\frac{[A(t)(y^{\Delta}(t))^{\lambda}]^{\Delta}(y(t))^{\lambda}-A(t)(y^{\Delta}(t))^{\lambda}[(y(t))^{\lambda}]^{\Delta}}{(y(t))^{\lambda}[y(\sigma(t))]^{\lambda}}\\
&\leqslant\frac{\rho^{\Delta}(t)}{\rho(\sigma(t))}w(\sigma(t))-\rho(t)\frac{L\sum\limits_{i=1}^{m}P_i(t)[x(\delta_i(t))]^{\lambda}}{[y(\sigma(t))]^{\lambda}}-\rho(t)\frac{A(t)(y^{\Delta}(t))^{\lambda}[(y(t))^{\lambda}]^{\Delta}}{(y(t))^{\lambda}[y(\sigma(t))]^{\lambda}}\\
&\leqslant\frac{\rho^{\Delta}(t)w(\sigma(t))}{\rho(\sigma(t))}-L\rho(t)\sum_{i=1}^{m}P_i(t)\Big[1-\sum_{j=1}^{l}\beta_jB_j(\delta_i(t))\Big]^{\lambda}\left[\frac{y(\delta_i(t))}{y(\sigma(t))}\right]^{\lambda}\\
&\quad-\lambda\rho(t)\frac{A(t)(y^{\Delta}(t))^{\lambda+1}}{y(t)[y(\sigma(t))]^{\lambda}}.
\end{aligned}\tag{11}$$

又因 $y^{\Delta\Delta}(t)<0$, 所以 $y^{\Delta}(t)\geqslant y^{\Delta}(\sigma(t))$, 于是由式 (11) , 并注意到式 (10) 和式 (9) , 得

$$\begin{aligned}
w^{\Delta}(t)&\leqslant\frac{\rho^{\Delta}(t)w(\sigma(t))}{\rho(\sigma(t))}-L\rho(t)\sum_{i=1}^{m}P_i(t)\Big[1-\sum_{j=1}^{l}\beta_jB_j(\delta_i(t))\Big]^{\lambda}\left[\frac{k\delta_i(t)}{\sigma(t)}\right]^{\lambda}\\
&\quad-\lambda\rho(t)\frac{A(t)(y^{\Delta}(\sigma(t)))^{\lambda+1}}{[y(\sigma(t))]^{\lambda+1}}\\
&=\frac{\rho^{\Delta}(t)}{\rho(\sigma(t))}w(\sigma(t))-Lk^{\lambda}\Psi(t)-\frac{\lambda\rho(t)A(t)}{[\rho(\sigma(t))A(\sigma(t))]^{\frac{\lambda+1}{\lambda}}}[w(\sigma(t))]^{\frac{\lambda+1}{\lambda}}.
\end{aligned}$$

若记 $L_0=Lk^{\lambda}$, 上式两边同乘 $(t-s)^{\mu}$, 并积分, 得

$$\begin{aligned}
\int_{t_2}^{t}L_0(t-s)^{\mu}\Psi(s)\Delta s&\leqslant-\int_{t_2}^{t}(t-s)^{\mu}w^{\Delta}(s)\Delta s+\int_{t_2}^{t}(t-s)^{\mu}\frac{\rho^{\Delta}(s)}{\rho(\sigma(s))}w(\sigma(s))\Delta s\\
&\quad-\int_{t_2}^{t}(t-s)^{\mu}\frac{\lambda\rho(s)A(s)[w(\sigma(s))]^{\frac{\lambda+1}{\lambda}}}{[\rho(\sigma(s))A(\sigma(s))]^{\frac{\lambda+1}{\lambda}}}\Delta s\\
&=-\left[(t-s)^{\mu}w(s)\right]_{t_2}^{t}\\
&\quad+\int_{t_2}^{t}[(t-s)^{\mu}]_s^{\Delta}\,w(\sigma(s))\Delta s+\int_{t_2}^{t}(t-s)^{\mu}\frac{\rho^{\Delta}(s)}{\rho(\sigma(s))}w(\sigma(s))\Delta s\\
&\quad-\int_{t_2}^{t}\frac{(t-s)^{\mu}\lambda\rho(s)A(s)}{[\rho(\sigma(s))A(\sigma(s))]^{\frac{\lambda+1}{\lambda}}}[w(\sigma(s))]^{\frac{\lambda+1}{\lambda}}\Delta s\\
&\leqslant(t-t_2)^{\mu}w(t_2)+\int_{t_2}^{t}\frac{(t-s)^{\mu}\rho^{\Delta}(s)}{\rho(\sigma(s))}w(\sigma(s))\Delta s\\
&\quad-\int_{t_2}^{t}\frac{(t-s)^{\mu}\lambda\rho(s)A(s)[w(\sigma(s))]^{\frac{\lambda+1}{\lambda}}}{[\rho(\sigma(s))A(\sigma(s))]^{\frac{\lambda+1}{\lambda}}}\Delta s.
\end{aligned}\tag{12}$$

现取

$$\gamma=\frac{\lambda+1}{\lambda},\quad a=[\lambda\rho(s)A(s)]^{\frac{\lambda}{\lambda+1}}\frac{w(\sigma(s))}{\rho(\sigma(s))A(\sigma(s))},$$

$$b=\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^{\lambda}[|\rho^{\Delta}(s)|A(\sigma(s))]^{\lambda}[\lambda\rho(s)A(s)]^{\frac{-\lambda^2}{\lambda+1}},$$

由引理 4, 有 $\gamma ab^{\gamma-1}-a^{\gamma}\leqslant(\gamma-1)b^{\gamma}$, 代入此式, 得

$$\frac{|\rho^{\Delta}(s)|}{\rho(\sigma(s))}w(\sigma(s))-\frac{\lambda\rho(s)A(s)[w(\sigma(s))]^{\frac{\lambda+1}{\lambda}}}{[\rho(\sigma(s))A(\sigma(s))]^{\frac{\lambda+1}{\lambda}}}\leqslant\frac{[|\rho^{\Delta}(s)|A(\sigma(s))]^{\lambda+1}}{(\lambda+1)^{\lambda+1}[\rho(s)A(s)]^{\lambda}}.\tag{13}$$

将式 (13) 代入式 (12), 得

$$\int_{t_2}^{t} L_0(t-s)^{\mu}\Psi(s)\Delta s \leqslant (t-t_2)^{\mu}w(t_2) + \int_{t_2}^{t}(t-s)^{\mu}\frac{[|\rho^{\Delta}(s)|A(\sigma(s))]^{\lambda+1}}{(\lambda+1)^{\lambda+1}[\rho(s)A(s)]^{\lambda}}\Delta s.$$

所以

$$\frac{1}{t^{\mu}}\int_{t_2}^{t}(t-s)^{\mu}\left\{L_0\Psi(s) - \frac{[|\rho^{\Delta}(s)|A(\sigma(s))]^{\lambda+1}}{(\lambda+1)^{\lambda+1}[\rho(s)A(s)]^{\lambda}}\right\}\Delta s \leqslant \left(1-\frac{t_2}{t}\right)^{\mu} w(t_2).$$

上式两边取上极限, 得与式 (8) 矛盾! 定理证毕.

注 2　通过选择恰当的 Δ 可微函数 $\rho(t)$, 就能导出许多关于方程(1)的具体振动准则.

例 2　若方程 (1) 中 $m=1, B_j(t)\equiv 0, f(u)=u$, 并在定理 2 中取 $\rho(t)=1$, 我们就有:

推论 1　设 $P(t)>0, A(t)>0, A^{\Delta}(t)\geqslant 0$ 且 $\int_{t_0}^{+\infty}[A(s)]^{-\frac{1}{\lambda}}\Delta s=+\infty$, 若存在常数 $\mu\geqslant 1$, 使得 $\limsup\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{t^{\mu}}\int_a^t(t-s)^{\mu}P(s)\left[\frac{\delta(s)}{\sigma(s)}\right]^{\lambda}\Delta s = +\infty$($a\geqslant t_0$为常数), 则方程 $\{A(t)\phi(x^{\Delta}(t))\}^{\Delta}+P(t)\phi(x(\delta(t)))=0$ 在 $[t_0,+\infty)_{\mathbf{T}}$ 上是振动的.

注 3　推论 1 就是二阶微分方程 Kamenev 型振动准则的推广.

显然, 本文结果给出了具有非线性中立项的动力方程 (1) 振动的几个充分条件, 这些结果即使当 $\mathbf{T}=\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{T}=\mathbf{N}$ 时也是新的, 推广并改进了现有文献中的结果.

[参　考　文　献]

[1] 高承华, 罗华. 一类二阶差分方程泛函边值问题的多解性[J]. 高校应用数学学报, 2009, 24(1): 75-85.

[2] 杨甲山. 具有正负系数的二阶中立型方程的振动性定理[J]. 华东师范大学学报: 自然科学版, 2011(2): 10-16.

[3] HILGER S. Analysis on measure chains-a unified approach to continuous and discrete calculus[J]. Results Math, 1990, 18: 18-56.

[4] BOHNER M, PETERSON A. Dynamic Equations on Time Scales, an Introduction with Applications[M]. Boston: Birkhauser, 2001.

[5] AGARWAL R P, BOHNER M, O'REGAN D, et al. Dynamic equations on time scales: a survey[J]. J Comput Appl Math, 2002, 141(1-2): 1-26.

[6] SAHINER Y. Oscillation of second order delay differential equations on time scales [J]. Nonlinear Analysis, TMA, 2005, 63: e1073-e1080.

[7] ZHANG Q X, GAO L. Oscillation criteria for second-order half-linear delay dynamic equations with damping on time scales[J]. Sci Sin Math, 2010, 40(7): 673-682.

[8] AGARWAL R P, BOHNER M, LI W T. Nonoscillation and Oscillation: Theory for Functional Differential Equations[M]. New York: Marcel Dekker, 2004.

[9] AGARWAL R P, BOHNER M, SAKER S H. Oscillation of second order delay dynamic equations[J]. Canadian Applied Mathematics Quarterly, 2005, 13(1): 1-18.

[10] HAN Z L, SHI B, SUN S R. Oscillation of second-order delay dynamic equation on time scales[J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2007, 46(6): 10-13.

[11] 杨甲山. 时间测度链上一类二阶非线性动力方程的振动性[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2011, 48(2): 278-282.

[12] 杨甲山, 方彬. 时间测度链上一类二阶动力方程的振动准则[J]. 高校应用数学学报 A 辑, 2011, 26(2): 149-157.