文章编号: 1000-5641(2012)02-0049-07

Birkhoff 系统 Lie 对称性逆问题的两种提法和解法

龙梓轩[1], 张 毅[2]

(1. 苏州科技学院 数理学院, 江苏 215009; 2. 苏州科技学院 土木工程学院, 江苏 215011)

摘要: 首先, 列写出Birkhoff系统Lie对称性的确定方程、结构方程和守恒量; 其次, 给出Birkhoff系统Lie对称性逆问题的两种提法和解法. 结果表明: 同一Birkhoff函数(Birkhoff函数组)和第一积分可以对应不同的Birkhoff函数组(Birkhoff函数)和不同的Lie对称性, 也可以对应相同的Lie对称性和不同的Birkhoff函数组(Birkhoff函数).

关键词: Birkhoff系统; Lie对称性; 逆问题

中图分类号: O316 **文献标识码**: A **DOI:** 10.3969/j.issn.1000-5641.2012.003.008

Two formulations and solutions of the inverse problems for Lie symmetries in dynamics of a Birkhoffian system

LONG Zi-xuan[1], ZHANG Yi[2]

(1. *College of Mathematics and Physics, Suzhou University of Science and Technology, Jiangsu* 215009, *China*;
2. *College of Civil Engineering, Suzhou University of Science and Technology, Jiangsu* 215011, *China*)

Abstract: First, the determining equations, the structure equations and the conserved quantities of Lie symmetries for a Birkhoffian system were given; then two formulations and solutions of the inverse problems of Lie symmetries for the system were presented. The results show that the same Birkhoffian(Birkhoff's functions) and first integral can correspond to different Birkhoff's functions(Birkhoffian) and different Lie symmetries, and can also correspond to the same Lie symmetry and different Birkhoff's functions(Birkhoffian).

Key words: Birkhoffian system; Lie symmetry; inverse problem

0 引 言

19世纪末著名数学家Lie研究了微分方程在无限小群变换下的不变性, 即Lie对称性. 1979年, Lutzky将Lie理论应用于力学系统的运动微分方程, 开始研究力学系统的Lie对称性

收稿日期: 2011-06

基金项目: 国家自然科学基金(10972151); 江苏省普通高校研究生科研创新计划(CXLX110961); 苏州科技学院研究生科研创新计划(SKCX11S051)

作者简介: 龙梓轩, 女, 硕士研究生, 研究方向为数学物理. E-mail: longzixuan@foxmail.com

通讯作者: 张毅, 男, 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事约束系统动力学研究.
E-mail: weidiezh@pub.sz.jsinfo.net

与守恒量[1]. 近30年来, 约束力学系统的Lie对称性与守恒量的研究得到充分重视, 并取得一系列重要成果[2-10].

动力学逆问题是经典力学的主要问题之一[11-16], 常常引起力学家、数学家和工程技术专家的关注. 原因主要有两个：一是动力学逆问题有着非常广泛的应用; 二是该问题尚待最终解决. 随着科学技术的发展, 用动力学逆问题来模拟许多实际问题成为可能, 这使得其概念本身也在不断扩充[16]. 梅凤翔[16]研究了Birkhoff系统的Noether 对称性以及与Noether对称性相关的两类动力学逆问题. 本文将进一步研究Birkhoff系统Lie对称性的逆问题, 给出其两种提法和解法.

1 Birkhoff 系统的 Lie 对称性

本节将简短地给出Birkhoff系统的Lie对称性的基本结果, 详细的讨论和证明可参见文献[10]. Birkhoff系统的运动微分方程的一般形式为[17]

$$\left(\frac{\partial R_v}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^v}\right)\dot{a}^v-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}=0,\quad (\mu,v=1,2,\cdots,2n)\tag{1}$$

其中$B=B\left(t,a\right)$称为Birkhoff函数, $R_\mu=R_\mu\left(t,a\right)$称为Birkhoff函数组. 设系统的Birkhoff变量$a^\mu\left(\mu=1,2,\cdots,2n\right)$彼此独立, 而

$$\Omega_{\mu v}=\frac{\partial R_v}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^v}\tag{2}$$

称为Birkhoff张量. 假设系统(1)非奇异, 即$\det\left(\Omega_{\mu v}\right)\neq 0$, 则由式(1)可解出所有$\dot{a}^\mu$,

$$\dot{a}^\mu=\Omega^{\mu v}\left(\frac{\partial B}{\partial a^v}+\frac{\partial R_v}{\partial t}\right),\quad (\mu=1,2,\cdots,2n)\tag{3}$$

其中$\Omega^{\mu v}\Omega_{v\tau}=\delta_{\mu\tau}$. 取时间$t$和变量$a^\mu$的无限小变换

$$t^*=t+\Delta t,\quad a^{\mu*}(t^*)=a^\mu(t)+\Delta a^\mu,\quad (\mu=1,2,\cdots,2n),\tag{4}$$

或其展开式

$$t^*=t+\varepsilon\xi_0(t,a),\quad a^{\mu*}=a^\mu+\varepsilon\xi_\mu(t,a),\tag{5}$$

其中ε为无限小参数, ξ_0, ξ_μ为无限小生成元向量. Lie对称性是微分方程在无限小变换下的一种不变性. 如果无限小变换(5)的生成元ξ_0,ξ_μ满足确定方程

$$\dot{\xi}_\mu-\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^v}+\frac{\partial R_v}{\partial t}\right)\dot{\xi}_0=X^{(0)}\left[\Omega^{\mu v}\left(\frac{\partial B}{\partial a^v}+\frac{\partial R_v}{\partial t}\right)\right],\quad (\mu=1,2,\cdots,2n)\tag{6}$$

则相应不变性称为Birkhoff系统的Lie对称性. Lie对称性不一定导致守恒量. 对于Birkhoff系统的Lie对称性, 如果存在规范函数$\lambda=\lambda(t,a)$满足结构方程

$$\left(R_\mu\dot{a}^\mu-B\right)\dot{\xi}_0+X^{(1)}\left(R_\mu\dot{a}^\mu-B\right)+\dot{\lambda}=0,\tag{7}$$

则Birkhoff系统存在如下守恒量

$$I=R_\mu\xi_\mu-B\xi_0+\lambda=\text{const},\tag{8}$$

其中 $X^{(0)}=\xi_0\frac{\partial}{\partial t}+\xi_\mu\frac{\partial}{\partial a^\mu},\quad X^{(1)}=X^{(0)}+(\dot{\xi}_\mu-\dot{a}^\mu\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial a^\mu}$.

判断对称性的另一种方法是寻找Killing方程的解. 结构方程(7)可归结为如下Killing方程

$$\frac{\partial R_v}{\partial a^\mu}\xi_\mu+\frac{\partial \xi_\mu}{\partial a^v}R_\mu-B\frac{\partial \xi_0}{\partial a^v}+\frac{\partial R_v}{\partial t}\xi_0=-\frac{\partial \lambda}{\partial a^v},\quad (v=1,2,\cdots,2n) \tag{9}$$

$$R_\mu\frac{\partial \xi_\mu}{\partial t}-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}\xi_\mu-B\frac{\partial \xi_0}{\partial t}-\frac{\partial B}{\partial t}\xi_0=-\frac{\partial \lambda}{\partial t}. \tag{10}$$

由Killing方程(9)和(10)解得的生成元 ξ_0,ξ_μ, 如果满足确定方程(6), 则它相应于系统的Lie对称性.

2 Lie 对称性逆问题的第一种提法和解法

Birkhoff系统Lie对称性的动力学逆问题的第一种提法如下: 已知系统的Birkhoff函数组 $R_\mu(\mu=1,2,\cdots,2n)$, 按给定的一个第一积分

$$I(t,a)=C, \tag{11}$$

以及Killing方程(9)和(10)来寻求系统的Birkhoff函数 B 和Lie对称性变换的生成元 ξ_0,ξ_μ.

为解上述逆问题, 可从式(8)计算 $\frac{\partial\lambda}{\partial a^\nu}$, 并将结果代入式(9)得到

$$\left(\frac{\partial R_\mu}{\partial a^v}-\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}\right)\xi_\mu-\left(\frac{\partial R_v}{\partial t}+\frac{\partial B}{\partial a^v}\right)\xi_0=\frac{\partial I}{\partial a^v}.\quad (v=1,2,\cdots,2n) \tag{12}$$

解之, 得

$$\xi_\mu=\Omega^{\mu\nu}\left[\frac{\partial I}{\partial a^\nu}+\left(\frac{\partial B}{\partial a^v}+\frac{\partial R_v}{\partial t}\right)\xi_0\right].\quad (\mu=1,2,\cdots,2n) \tag{13}$$

从式(8)计算 $\frac{\partial\lambda}{\partial t}$, 并将结果代入式(10), 得到

$$\left(\frac{\partial R_\mu}{\partial t}+\frac{\partial B}{\partial a^\mu}\right)\xi_\mu=\frac{\partial I}{\partial t}. \tag{14}$$

将式(13)代入式(14), 得

$$\frac{\partial B}{\partial a^\mu}\Omega^{\mu\nu}\frac{\partial I}{\partial a^v}=\frac{\partial I}{\partial t}-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\Omega^{\mu\nu}\frac{\partial I}{\partial a^v}. \tag{15}$$

式(15)的右端是已知的, 它是关于 B 的偏微分方程. 解此方程, 便可求出Birkhoff函数B. 由此函数 B 和给定的Birkhoff函数组 $R_\mu(\mu=1,2,\cdots,2n)$, 确定方程(6)成为 $2n$ 个关于 ξ_0,ξ_μ 的常微分方程. 如果由式(13)确定的生成元 ξ_0,ξ_μ 满足确定方程(6), 则无限小变换(5)相应于系统的Lie对称性. 于是有以下定理.

定理 1 对于Birkhoff系统(1), 如果已知其Birkhoff函数组 $R_\mu(\mu=1,2,\cdots,2n)$ 和系统的一个第一积分(11), 则系统的Birkhoff函数 B 可由式(15)确定, 且如果方程(13)所确定的无限小生成元 ξ_0,ξ_μ满足确定方程(6), 则所得对称性是系统的Lie对称性.

例 1 已知4阶Birkhoff系统的Birkhoff函数组为[18]

$$\begin{aligned}&R_1=0,\quad R_2=a^1-a^4-(a^2+a^3)t+(a^2\sin t+a^4\cos t)\cos t,\\&R_3=a^1-a^4-(a^2+a^3)t, R_4=-(a^2\sin t+a^4\cos t)\sin t,\end{aligned} \tag{16}$$

以及一个第一积分

$$I = a^2 \cos t - a^4 \sin t, \tag{17}$$

试求系统的 Birkhoff 函数 B 和相应的 Lie 对称性.

由式 (16) 可知

$$(\Omega_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

故有

$$(\Omega^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

方程式 (15) 给出

$$-\frac{\partial B}{\partial a^1}\cos t - \frac{\partial B}{\partial a^2}\sin t + \frac{\partial B}{\partial a^3}\sin t - \frac{\partial B}{\partial a^4}\cos t = -2(a^2 \sin t + a^4 \cos t) \tag{20}$$

方程式 (20) 有解

$$B = (a^2)^2 + (a^4)^2, \tag{21}$$

$$B = (a^2 \sin t + a^4 \cos t)^2. \tag{22}$$

由 Birkhoff 函数 (21) 和式 (16)、(17), 方程 (13) 给出

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -\cos t - \xi_0(a^2 - a^3 + a^2\cos 2t - a^4 \sin 2t), \\ \xi_2 &= -\sin t + \xi_0(2a^4 - a^2 \sin 2t - a^4 \cos 2t), \\ \xi_3 &= \sin t - \xi_0(2a^4 - a^2 \sin 2t - a^4 \cos 2t), \\ \xi_4 &= -\cos t - \xi_0(2a^2 + a^2 \cos 2t - a^4 \sin 2t). \end{aligned} \tag{23}$$

若取

$$\xi_0 = 0, \tag{24}$$

则有

$$\xi_1 = -\cos t, \quad \xi_2 = -\sin t, \quad \xi_3 = \sin t, \quad \xi_4 = -\cos t. \tag{25}$$

由 Birkhoff 函数组 (16) 和 Birkhoff 函数 (21), 确定方程 (6) 给出

$$\begin{aligned} &\dot{\xi}_1 = -\xi_2(1 + \cos 2t) + \xi_3 + \xi_4 \sin 2t, \quad \dot{\xi}_2 = -\xi_2 \sin 2t + \xi_4(2 - \cos 2t), \\ &\dot{\xi}_3 = \xi_2 \sin 2t + \xi_4(-2 + \cos 2t), \quad \dot{\xi}_4 = -\xi_2(2 + \cos 2t) + \xi_4 \sin 2t, \end{aligned} \tag{26}$$

显然, 生成元 (24) 和 (25) 满足确定方程 (26). 因此, 生成元 (24)、(25) 相应于系统的 Lie 对称性. 由 Birkhoff 函数(22) 和式 (16)、(17), 方程 (13)给出

$$\xi_1 = -\cos t + a^3\xi_0, \quad \xi_2 = -\sin t + a^4\xi_0, \quad \xi_3 = \sin t - a^4\xi_0, \quad \xi_4 = -\cos t - a^2\xi_0. \tag{27}$$

若取

$$\xi_0 = 0, \tag{28}$$

则有

$$\xi_1 = -\cos t, \quad \xi_2 = -\sin t, \quad \xi_3 = \sin t, \quad \xi_4 = -\cos t. \tag{29}$$

由 Birkhoff 函数组 (16) 和 Birkhoff 函数 (22), 确定方程 (6) 给出

$$\dot{\xi}_1 = \xi_3, \quad \dot{\xi}_2 = \xi_4, \quad \dot{\xi}_3 = -\xi_4, \quad \dot{\xi}_4 = -\xi_2, \tag{30}$$

显然生成元 (28) 和 (29) 满足确定方程 (30). 因此, 它们相应于 Birkhoff 系统的 Lie 对称性. 若再取

$$\xi_0 = 1, \tag{31}$$

则有

$$\xi_1 = -\cos t + a^3, \quad \xi_2 = -\sin t + a^4, \quad \xi_3 = \sin t - a^4, \quad \xi_4 = -\cos t - a^2. \tag{32}$$

注意到将式 (16)、(22) 代入方程 (1) 得

$$\dot{a}^1 = a^3, \dot{a}^2 = a^4, \dot{a}^3 = -a^4, \dot{a}^4 = -a^2. \tag{33}$$

将生成元 (31) 和 (32) 代入确定方程 (30), 并利用方程 (33), 易知确定方程 (30) 成立. 因此, 所得生成元 (31)、(32) 也相应于 Birkhoff 系统的 Lie 对称性.

3　Lie 对称性逆问题的第二种提法和解法

Birkhoff 系统 Lie 对称性的动力学逆问题的第二种提法如下：已知系统的 Birkhoff 函数 B, 按给定的一个第一积分

$$I(t, a) = C, \tag{34}$$

以及 Killing 方程式 (9) 和 (10) 来寻求系统的 Birkhoff 函数组 $R_\mu(\mu = 1, 2, \cdots, 2n)$ 和 Lie 对称性变换的生成元 ξ_0, ξ_μ.

为解上述逆问题, 可利用关系式 (12) 和式 (14), 或关系式 (13) 和式 (15). 在已知 Birkhoff 函数 B 和第一积分 I 时, 由这些关系可求得 Birkhoff 函数组 R_μ 和生成元 ξ_μ, ξ_0, 进一步如果所得的生成元 ξ_0, ξ_μ 满足由上述 Birkhoff 函数 B 和 Birkhoff 函数组 R_μ 给出的确定方程 (6), 则无限小变换 (5) 相应于系统的 Lie 对称性. 于是有

定理 2　对于 Birkhoff 系统 (1), 如果已知其 Birkhoff 函数 B 和系统的一个第一积分 (34), 则系统的 Birkhoff 函数组 $R_\mu(\mu = 1, 2, \cdots, 2n)$ 可由式(15) 确定, 且如果由方程 (13) 所确定的无限小变换生成元 ξ_0, ξ_μ满足确定方程 (6), 则所得对称性是系统的 Lie 对称性.

例 2 已知2阶Birkhoff系统的Birkhoff函数以及第一积分

$$B=\frac{1}{2}\left[(a^1)^2+(a^2)^2\right], \tag{35}$$

$$I=\frac{1}{2}\left[(a^1)^2+(a^2)^2\right], \tag{36}$$

试求系统的Birkhoff函数组 R_1、R_2 和相应的Lie对称性.

关系式 (12) 和式 (14) 给出

$$\Omega_{12}\xi_2-\left(\frac{\partial R_1}{\partial t}+a^1\right)\xi_0=a^1,\quad \Omega_{21}\xi_1-\left(\frac{\partial R_2}{\partial t}+a^2\right)\xi_0=a^2,$$
$$\left(\frac{\partial R_1}{\partial t}+a^1\right)\xi_1+\left(\frac{\partial R_2}{\partial t}+a^2\right)\xi_2=0, \tag{37}$$

由方程 (37), 并注意到 $\Omega_{12}=-\Omega_{21}$, 得

$$\frac{\partial R_1}{\partial t}a^2-\frac{\partial R_2}{\partial t}a^1=0. \tag{38}$$

方程 (38) 有如下解

$$R_1=0, R_2=a^1, \tag{39}$$
$$R_1=a^2, R_2=0. \tag{40}$$

由式 (39) 和式 (35), 系统的运动方程 (1) 和确定方程 (6) 分别给出

$$\dot{a}^1=a^2,\quad \dot{a}^2=-a^1, \tag{41}$$

$$\dot{\xi}_1-a^2\dot{\xi}_0=\xi_2,\quad \dot{\xi}_2+a^1\dot{\xi}_0=-\xi_1, \tag{42}$$

将式 (39) 代入式 (37), 得

$$\xi_2-a^1\xi_0=a^1, -\xi_1-a^2\xi_0=a^2, a^1\xi_1+a^2\xi_2=0. \tag{43}$$

方程 (43) 有解

$$\xi_0=-1,\quad \xi_1=\xi_2=0, \tag{44}$$

$$\xi_0=0,\quad \xi_1=-a^2,\quad \xi_2=a^1. \tag{45}$$

将生成元 (44) 和生成元 (45) 分别代入方程 (42), 并利用方程 (41), 易知确定方程 (42) 成立. 因此, 生成元 (44) 和生成元 (45) 均相应于系统的 Lie 对称性.

由式 (40) 和式 (35), 系统的运动方程 (1) 和确定方程 (6) 给出

$$\dot{a}^1=-a^2,\quad \dot{a}^2=a^1, \tag{46}$$

$$\dot{\xi}_1+a^2\dot{\xi}_0=-\xi_2,\quad \dot{\xi}_2-a^1\dot{\xi}_0=\xi_1, \tag{47}$$

将式 (40) 代入式 (37), 得

$$-\xi_2 - a^1\xi_0 = a^1, \quad \xi_1 - a^2\xi_0 = a^2, \quad a^1\xi_1 + a^2\xi_2 = 0. \tag{48}$$

方程 (48) 有解

$$\xi_0 = -1, \xi_1 = 0, \xi_2 = 0, \tag{49}$$

$$\xi_0 = 1, \xi_1 = 2a^2, \xi_2 = -2a^1. \tag{50}$$

易知, 生成元 (49)、(50) 都对应于系统的 Lie 对称性.

4　结　　论

本文研究 Birkhoff 系统 Lie 对称性逆问题的提法和解法, 具体为：对于 Birkhoff 系统 (1), 如果给定系统的 Birkhoff 函数组 R_μ (或 Birkhoff 函数 B), 如何由已知的第一积分, 导出系统的 Birkhoff 函数 B(或 Birkhoff 函数组 R_μ) 以及相应的 Lie 对称性. 主要结论为文中的两个定理. 算例表明：① 同一 Birkhoff 函数组和第一积分可以对应不同的 Birkhoff 函数和不同的 Lie 对称性, 也可以对应相同的 Lie 对称性和不同的 Birkhoff 函数; ② 同一 Birkhoff 函数和第一积分可以对应不同的 Birkhoff 函数组和不同的 Lie 对称性, 也可以对应相同的 Lie 对称性和不同的 Birkhoff 函数组.

[参　考　文　献]

[1] LUTZKY M. Dynamical symmetries and conserved quantities[J]. J Phys A: Math Gen, 1979, 12(7): 973-981.

[2] 赵跃宇. 非保守力学系统的Lie对称性和守恒量[J]. 力学学报, 1994, 26(3): 380-384.

[3] 梅凤翔. Birkhoff系统的Lie对称性和守恒律[J]. 科学通报, 1998, 43(18)：1937-1939.

[4] FANG J H. Lie symmetries and conserved quantities of second-order nonholonomic mechanical system[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2002, 23(9): 1105-1110.

[5] 傅景礼, 王新民. 相对论性Birkhoff系统的Lie对称性和守恒量[J]. 物理学报, 2000, 49(6)：1023-1027.

[6] 张毅. Birkhoff系统的一类Lie对称性守恒量[J]. 物理学报, 2002, 51(3)：461-464.

[7] 张宏彬, 陈立群, 顾书龙. Birkhoff 系统的一般Lie 对称性和非Noether守恒量[J]. 力学学报, 2004, 36(2)：254-256.

[8] LUO S K. New types of the Lie symmetries and conserved quantities for a relativistic Hamilton system[J]. Chinese Physics Letters, 2003, 20(5): 597-599.

[9] ZHANG Y. Symmetries and conserved quantities of generalized Birkhoffian systems[J]. Journal of Southeast University(English Edition), 2010, 26(1): 146-150.

[10] 梅凤翔. 李群和李代数对约束力学系统的应用[M]. 北京：科学出版社, 1999.

[11] 梅凤翔. 非完整动力学逆问题的基本解法[J]. 力学学报, 1991, 23(2)：252-256.

[12] LIU F L, MEI F X. Formulation and solution for inverse problem of nonholonomic dynamics[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 1993, 14(4)：327-332.

[13] 张永发, 梅凤翔. Birkhoff系统动力学逆问题的两种提法和解法[J]. 北京理工大学学报, 1996, 16(4)：352-356.

[14] LI G C, MEI F X. An inverse problem in analytical dynamics[J]. Chinese Physics, 2006, 15(8)：1669-1671.

[15] 丁光涛. Noether-Birkhoff动力学逆问题[J]. 中国科学：物理学力学天文学, 2010, 40(2): 1514-1520.

[16] 梅凤翔. 动力学逆问题[M]. 北京：国防工业出版社, 2009.

[17] 梅凤翔, 史荣昌, 张永发, 等. Birkhoff系统动力学[M]. 北京：北京理工大学出版社, 1996.

[18] 梅凤翔. 约束力学系统的对称性与守恒量[M]. 北京：北京理工大学出版社, 2004.