文章编号：1000-4750(2013)03-0001-07

半刚性连接钢框架二阶弹塑性稳定分析的 QR 法

李秀梅，秦 荣

(广西大学土木建筑工程学院，广西，南宁 530004)

摘 要：基于 QR 法研究半刚性连接钢框架的稳定性，采用梁两端附带零长度转动弹簧的通用半刚性连接梁单元，通过转动弹簧和 Kishi-Chen 三参数模型来模拟梁柱半刚性连接的非线性力学性能，考虑二阶效应的影响，采用塑性铰模型及修正的 Newton-Raphson 迭代法，建立了平面钢框架二阶弹塑性稳定分析的 QR 法计算格式和步骤，并设计了相应的 C++源程序，最后通过典型算例分析了半刚性连接钢框架的稳定性能，表明了该算法的优越性。

关键词：钢框架；稳定分析；QR 法；半刚性连接；弹塑性；二阶效应

中图分类号：TU311; TU391 **文献标志码：**A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2011.09.0644

QR METHOD FOR SECOND-ORDER ELASTOPLASTIC STABILITY ANALYSIS OF STEEL SEMI-RIGID FRAME

LI Xiu-mei , QIN Rong

(College of Civil and Architecture Engineering, Guangxi University, Nanning, Guangxi 530004, China)

Abstract: Based on QR method, the stability of a steel semi-rigid frame was studied in this paper. A general semi-rigid beam element model with a zero-length rotational spring at both ends of the beam was used. The mechanical properties of semi-rigid connections were simulated by a rotational spring and a Kish-Chen three-parameter model. Considered the second-order effect, adopted a plastic hinge model and a modified Newton-Raphson iteration method, the calculation format and steps of QR method for the second-order elastic-plastic stability analysis of steel frames were constituted. Furthermore, the corresponding C++ source codes were designed. Finally, the stability of a typical steel frame was analyzed. The superiority of this method was showed.

Key words: steel frame; stability analysis; QR method; semi-rigid connection; elastoplastic; second-order effect

钢结构具有强度高、延性好、抗震性能优越等优点，但构件通常比较细长，组成构件的板件又比较纤薄，二阶效应明显，容易发生失稳破坏，失稳是钢结构破坏的主要形式，它往往会决定结构的承载能力[1]。分析表明，通常采用的特征值稳定及二阶弹性稳定计算往往会过高地估计结构的稳定承载力[2]。实际工程中，结构在设计时都尽可能避免发生弹性失稳破坏，真正的稳定破坏往往发生在材料的塑性开展到一定程度，节点形成塑性转动使约束变弱时，因而同时考虑二阶效应和材料非线性的影响，对钢框架作二阶弹塑性稳定分析才能真正揭示结构的稳定承载能力[3]。

杆端约束是影响钢结构稳定主要因素，目前，钢框架中梁柱普遍采用螺栓连接或栓焊混合连接，连接节点转动特性介于完全刚接和理想铰接两者之间[4]，既可以传递一定的弯矩，梁柱之间又会产生一定的相对转动，属半刚性连接，连接的改变直接影响钢框架的稳定性[5−6]。而在钢框架分析及设计

收稿日期：2011-09-28；修改日期：2012-03-31

基金项目：广西理工科学实验中心重点项目(LGZX201101)；广西教育厅项目(201012MS009)

通讯作者：李秀梅(1968－)，女，辽宁人，教授，博士，主要从事高层结构分析的新理论新方法研究(E-mail: lixiumei_gx@126.com).

作者简介：秦 荣(1936－)，男，湖南人，教授，主要从事计算力学研究(E-mail: CMSSI@163.com).

中，为简化计算都将节点简化为完全刚接或理想铰接，与实际不符。目前的商用有限元软件考虑半刚性连接时，建模非常困难，未知量多，计算的成本及难度很大，专业设计软件还无法考虑连接节点的半刚性。通过研究提供简单实用的计算理论及方法[7]，这是目前钢结构稳定分析及设计急需解决的问题。

本文基于秦荣教授提出的高层建筑结构分析的 QR 法[8]，采用梁两端附带零长度转动弹簧的通用半刚性连接梁单元模型[9]，应用三参数的 Kishi-Chen 模型来描述梁柱连接节点的非线性力学性能[10]，根据塑性铰模型和荷载增量法，采用修正的 Newton-Raphson 迭代法求解非线性方程组，跟踪整个加载平衡路径，建立了平面钢框架二阶弹塑性稳定分析的 QR 法计算格式，给出具体的计算步骤，并设计了相应的 C++程序，通过典型算例分析了半刚性钢框架的稳定临界荷载，证明该方法的优势。

1 梁柱半刚性连接节点的力学模型

按照从强到弱的顺序，常用的半刚性连接有短 T 型连接、外伸端板连接、带双腹板角钢上下翼缘角钢连接、上下翼缘角钢连接、腹板角钢连接等形式。研究表明[10]：梁柱半刚性连接对轴力和剪力的影响很小，通常用弯矩 M 和梁柱之间相对转角 θ_r 的关系来描述其力学性能。构成连接节点的各组合材料本身不连续，各组合件之间会产生相对滑移、错动和局部屈服，梁柱翼缘或腹板也可能产生局部屈曲，受以上因素的影响，连接节点的力学性能呈现明显的非线性。结构分析中通常采用线性函数、样条函数、幂函数、指数函数来模拟。本文采用了 Kishi-Chen 提出的三参数幂函数模型[10]：

$$\theta_r = \frac{M}{R_{ki}} \frac{1}{[1-(M/M_u)^n]^{1/n}} \tag{1}$$

该模型只有 3 个参数，其中 R_{ki} 为连接的初始刚度，M_u 为连接的极限弯矩，n 为 M-θ_r 曲线的形状参数。各参数可根据节点构造确定，也可根据试验测得。该模型精度高，简单实用，需要的参数少，而且也不会出现负刚度问题，因此在结构分析中广泛采用。

2 考虑二阶效应的半刚性连接梁单元

忽略梁柱半刚性连接节点的尺寸，假定力和转动变形都集中在一点，用零长度转动弹簧来模拟其转动特性，弹簧的转动刚度由半刚性连接的力学模型确定，转动刚度为零代表理想铰接或塑性铰，连接刚度无穷大代表完全刚接，因而该弹簧可以描述梁柱之间的任意连接形式。把梁单元和两端零长度转动弹簧组合，构成通用的半刚性连接梁单元模型[9,11](如图 1)。

假定梁端半刚性连接的转动刚度分别为 R_A和R_B；θ_A和θ_B分别为梁端结点的转角位移，梁端弯矩分别为 M_A和M_B；弹簧的转动变形：

$$\theta_{RA} = M_A / R_A \text{，} \quad \theta_{RB} = M_B / R_B \text{。}$$

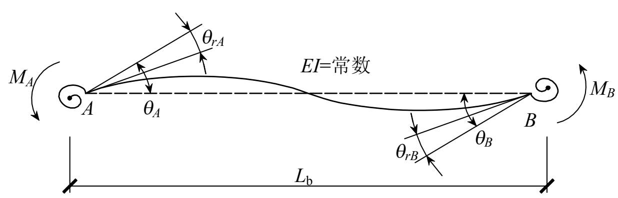


图 1 半刚性连接梁单元

Fig.1 Beam element with semi-rigid connection

根据弹簧变形和梁端弯曲变形之间的协调关系，根据梁柱法建立的刚接单元的刚度方程并凝聚掉弹簧转动的内部自由度θ_{rA}和θ_{rB}，仍取结点 A、B 的位移为单元的基本未知量，可建立起该通用的单元刚度方程[12]：

$$\boldsymbol{F}_{Loc}^{e} = \boldsymbol{k}_{Loc}^{e} \boldsymbol{\delta}_{Loc}^{e} \tag{2}$$

其中，$\boldsymbol{F}_{Loc}^{e}$、$\boldsymbol{\delta}_{Loc}^{e}$、$\boldsymbol{k}_{Loc}^{e}$ 分别为单元局部坐标描述的单元杆端力向量、杆端位移向量和刚度矩阵。

$$\boldsymbol{\delta}_{Loc}^{e} = \{\theta_A \quad \theta_B \quad u\}^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{F}_{Loc}^{e} = \{M_A \quad M_B \quad P\}^{\mathrm{T}} \tag{4}$$

$$\boldsymbol{k}_{Loc}^{e} = \frac{EI}{L}\begin{bmatrix} S_{ii} & S_{ij} & 0 \\ S_{ij} & S_{jj} & 0 \\ 0 & 0 & -A/I \end{bmatrix} \tag{5}$$

其中：

$$S_{ii} = (\mu_B C^2 - \mu_B S^2 + C)/\mu_0, \quad S_{ij} = S/\mu_0,$$
$$S_{jj} = (C + \mu_A C^2 - \mu_A S^2)/\mu_0 \tag{6}$$

$$\begin{cases} \mu_A = \dfrac{EI}{LR_A}, \quad \mu_B = \dfrac{EI}{LR_B} \\ \mu_0 = (1+\mu_A C)(1+\mu_B C) - \mu_A \mu_B S^2 \end{cases} \tag{7}$$

其中：C 和 S 是刚性连接单元的稳定函数；S_{ii}、S_{jj}、S_{ij} 是半刚性连接单元的稳定函数[12]，反应轴力 P 对稳定的影响。该单元模型在不增加单元及结点自由度总数的基础上描述了梁柱节点的半刚性影响。

当单元跨间存在非结点荷载作用时，考虑梁柱连接节点半刚性的影响，可按照结点位移等效的原

则将其转化为等效结点荷载，具体做法参照文献[11－12]。

3　材料的弹塑性模型

为简化计算，建筑型钢采用图 2 所示的理想弹塑性模型，计算中只需给定屈服应力 σ_s 和弹性模量 E 即可。也可以采用其它更为精确的本构关系模型，只是程序设计略为复杂一些。钢框架结构体系的弹塑性分析采用弯矩-轴力相关的塑性铰模型，忽略塑性沿截面及杆长度方向的逐渐屈服和塑性扩展。塑性铰模型虽然没有塑性区模型精度高，但其简单实用、计算效率高，满足工程精度要求[11]。

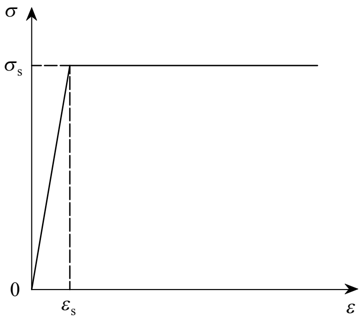


图 2　型钢的应力-应变关系曲线

Fig.2　σ-ε curve of steel

3.1　塑性铰的判断

本文采用我国《钢结构设计规范》(GB50017-2003)给出的压弯构件塑性屈服准则：

$$\begin{cases} 当\dfrac{P}{P_y} \leqslant 0.13时， & \dfrac{M}{M_P} = 1.0, \\ 当\dfrac{P}{P_y} > 0.13时， & \dfrac{P}{P_y} \dfrac{M}{1.15 M_P} = 1.0 \end{cases} \tag{8}$$

式(8)塑性铰的判断中考虑了弯矩-轴力的相关性，其中 P_y 为轴心受力屈服强度，即 $P_y = \sigma_s A$；M_P 是截面受纯弯时的塑性弯矩承载力，即 $M_P = S\sigma_s$，A、S 分别为杆件截面的面积和面积矩。

当式(8)中屈服面方程的左端项≥1就视为形成新的塑性铰[12]。

3.2　塑性铰形成单元刚度方程的修正

新的塑性铰形成后内力将进行重新分布，此处杆件的曲率开始出现不连续[9]。因此需对力-位移增量关系做出修正[13]。

如果塑性铰出现在单元 A 端，转角位移增量 $\dot{\theta}_A$ 已不再独立，可以用其它位移增量描述，此时单元刚度方程的增量形式可修正为：

$$\begin{Bmatrix} \dot{M}_A \\ \dot{M}_B \\ \dot{P} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_{jj} - S_{ij}^2 / S_{ii} & 0 \\ 0 & 0 & -A/I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_A \\ \dot{\theta}_B \\ \dot{u} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1 \\ S_{ij} / S_{ii} \\ 0 \end{Bmatrix} \Delta M_{AP} \tag{9}$$

同理如果单元 B 端形成塑性铰，单元刚度方程的增量形式修正为：

$$\begin{Bmatrix} \dot{M}_A \\ \dot{M}_B \\ \dot{P} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} S_{ii} - S_{ij}^2 / S_{jj} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A/I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_A \\ \dot{\theta}_B \\ \dot{u} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} S_{ij} / S_{jj} \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \Delta M_{BP} \tag{10}$$

如果单元两端同时出现塑性铰，刚度方程为：

$$\begin{Bmatrix} \dot{M}_A \\ \dot{M}_B \\ \dot{P} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A/I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_A \\ \dot{\theta}_B \\ \dot{u} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Delta M_{AP} \\ \Delta M_{BP} \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{11}$$

式(9)~式(11)描述了单元端部出现塑性铰时单元杆端位移和杆端力之间的增量关系，其中 ΔM_{AP}、ΔM_{BP} 是轴力 P 变化引起的杆端弯矩改变量，可由截面的塑性屈服准则(式(8))确定。式(9)~式(11)可统一表示为：

$$\dot{\boldsymbol{F}}_{Loc} = \boldsymbol{k}_{Loc}^{e} \dot{\boldsymbol{\delta}}_{Loc}^{e} + \Delta \boldsymbol{F}_{PLoc} \tag{12}$$

4　QR 法基本原理

QR 法是秦荣教授于 1984 年提出来的[9]，是在样条有限点法和有限单元法的基础上发展起来的一种高层建筑结构分析的新方法。该方法对整个平面结构仅作一个方向的样条结点离散(图 3)，把样条结点的广义位移参数作为基本未知量，采用 B 样条函数和正交多项式乘积的线性组合作为位移场函数。利用有限单元法的离散信息，需对单元的刚度方程作一个基本未知量的变换，但 QR 法的未知量数只与样条结点的数目及正交多项式的级数项有关，与单元的数目及结点未知位移的总数无直接关系，对于高层建筑结构，它可以大大缩减结构计算的自由度，弥补有限元法的不足。平面钢框架静力分析的 QR 法基本原理如下[8]。

4.1　QR 法分析的整体位移函数

图 3 所示的平面钢框架，在 x 方向一般采用均

匀的样条结点离散，y 方向采用正交多项式，用样条基函数和正交多项式乘积的线性组合构造整个结构的位移场函数[8]。

$$u=\sum_{m=1}^{R}\sum_{i=0}^{N}\phi_i(x)a_{im}X_m(y)\text{，}v=\sum_{m=1}^{R}\sum_{i=0}^{N}\phi_i(x)b_{im}X_m(y)\text{，}$$

$$\theta=\sum_{m=1}^{R}\sum_{i=0}^{N}\phi_i(x)c_{im}H_m(y)\text{。} \tag{13}$$

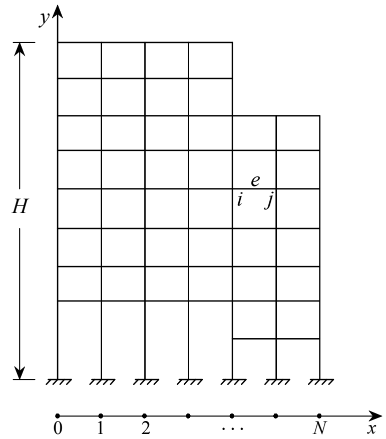


图 3 平面框架及其离散

Fig.3 Plane frame and discretization

用矩阵形式可表示为：

$$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{N\delta} \tag{14}$$

其中，$\boldsymbol{\delta}$ 就是 QR 法的基本未知量，它是 $3R(N+1)$ 阶向量，决定于样条结点的数目 N 及正交多项式的级数项数 R。式(14)描述了任意点的位移(u,v,θ)与 QR 法广义位移 $\boldsymbol{\delta}$ 之间的关系。$\boldsymbol{\delta}=\{\boldsymbol{\delta}_1^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{\delta}_2^{\mathrm{T}}\ \cdots\ \boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}\}^{\mathrm{T}}$，其中：

$$\boldsymbol{\delta}_m=\{a_{0m},b_{0m},c_{0m},a_{1m},b_{1m},c_{1m},\cdots,a_{Nm},b_{Nm},c_{Nm}\}^{\mathrm{T}}$$

其中，$\boldsymbol{N}$ 是 QR 法的形函数矩阵：

$$\boldsymbol{N}=[\boldsymbol{N}_1\quad \boldsymbol{N}_2\quad \cdots\quad \boldsymbol{N}_R] \tag{15}$$

$$\boldsymbol{N}_m=[\boldsymbol{N}_{0m}\ \ \boldsymbol{N}_{1m}\ \cdots\ \boldsymbol{N}_{Nm}]$$

$$\boldsymbol{N}_{im}=\mathrm{diag}(X_m(y),X_m(y),H_m(y))\phi_i(x)\text{，}$$

$$(m=1,2,\cdots,R\text{；}\ i=0,1,\cdots,N) \tag{16}$$

$$\phi_i(x)=\frac{10}{3}\varphi_3\left(\frac{x}{h}-i\right)-\frac{4}{3}\varphi_3\left(\frac{x}{h}-i+\frac{1}{2}\right)-\frac{4}{3}\varphi_3\left(\frac{x}{h}-i-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{6}\varphi_3\left(\frac{x}{h}-i+1\right)+\frac{1}{6}\varphi_3\left(\frac{x}{h}-i-1\right) \tag{17}$$

其中，$X_m(y)$、$H_m(y)$ 反映 y 方向变形规律，一般要满足柱底部的边界条件。本文取正交多项式：

$$X_m(y)=\sum_{n=1}^{m}(-1)^{n-1}\frac{(m+n)!}{(m-n)!(n+1)!(n-1)!}\left(\frac{y}{H}\right)^n \tag{18}$$

如果柱底固定支座，取 $H_m(y)=X_m(y)$。

对于任意的平面梁单元，整体坐标下，单元的节点位移向量：

$$\boldsymbol{\delta}_g^{\mathrm{e}}=\{u_1\quad v_1\quad \theta_1\quad u_2\quad v_2\quad \theta_2\}^{\mathrm{T}} \tag{19}$$

利用式(13)、式(14)，单元的结点位移向量可以用 QR 法的广义位移表示为：

$$\boldsymbol{\delta}_g^{\mathrm{e}}=\boldsymbol{N}_{\mathrm{e}}\boldsymbol{\delta}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{N}_i\\ \boldsymbol{N}_j\end{bmatrix}\boldsymbol{\delta} \tag{20}$$

其中：$\boldsymbol{N}_{\mathrm{e}}$ 为单元的形函数矩阵；$\boldsymbol{N}_i$、$\boldsymbol{N}_j$ 为单元两个端点的形函数矩阵，只要把单元结点(x_i,y_i)、(x_j,y_j)坐标代入式(16)即可。

4.2 QR 法结构刚度方程

整体坐标描述的单元的总势能泛函：

$$\varPi_{\mathrm{e}}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\delta}_g^{\mathrm{eT}}\boldsymbol{k}_g^{\mathrm{e}}\boldsymbol{\delta}_g^{\mathrm{e}}-\boldsymbol{\delta}_g^{\mathrm{eT}}\boldsymbol{f}_g^{\mathrm{e}} \tag{21}$$

根据单元坐标和整体坐标描述的单元结点位移分量之间的几何关系，可建立起单元坐标变换矩阵 $\boldsymbol{T}_{cg}$ [12]，然后把式(21)中整体坐标描述的各量进行坐标变换，并把式(20)也代入式(21)，最后得到用广义位移表示的单元总势能泛函：

$$\varPi_{\mathrm{e}}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{K}}^{\mathrm{e}}\boldsymbol{\delta}-\boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{e}} \tag{22}$$

其中：

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{K}}^{\mathrm{e}}&=\boldsymbol{N}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_{cg}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{k}_{Loc}^{\mathrm{e}}\boldsymbol{T}_{cg}\boldsymbol{N}_{\mathrm{e}}\\ \bar{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{e}}&=\boldsymbol{N}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_{cg}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}_{Loc}^{\mathrm{e}}\end{aligned} \tag{23}$$

其中，$\bar{\boldsymbol{K}}^{\mathrm{e}}$、$\bar{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{e}}$ 分别为 QR 法的单元刚度矩阵和荷载向量。则整个结构的总势能泛函为：

$$\varPi=\sum_{\mathrm{e}}\varPi_{\mathrm{e}}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}}\sum_{\mathrm{e}}\bar{\boldsymbol{K}}^{\mathrm{e}}\boldsymbol{\delta}-\boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}}\sum_{\mathrm{e}}\bar{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{e}} \tag{24}$$

利用变分原理：$\delta\varPi=0$，可得 QR 法的结构刚度方程：

$$\boldsymbol{K\delta}=\boldsymbol{P} \tag{25}$$

$$\boldsymbol{K}=\sum_{\mathrm{e}}\bar{\boldsymbol{K}}^{\mathrm{e}},\quad \boldsymbol{P}=\sum_{\mathrm{e}}\bar{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{e}} \tag{26}$$

每个单元经过式(23)的坐标变换，就得到 QR 法的单元刚度矩阵 $\bar{\boldsymbol{K}}^{\mathrm{e}}$ 及荷载向量 $\bar{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{e}}$，可直接叠加到结构 $\boldsymbol{K}$、$\boldsymbol{P}$ 中。也可以直接把非零元素装配到总刚矩阵相应的样条结点位置。而且插值函数满足位移边界条件，不需要对刚度方程再进行边界修正，直接解方程即可得到 QR 法的广义位移 $\boldsymbol{\delta}$，根据结点的坐标按式(13)可计算任意结点的真实位移，回到单元计算各单元内力。

5　半刚接钢框架二阶弹塑性稳定分析

考虑二阶效应及梁柱连接半刚性的影响，采用塑性铰模型及修正的 Newton-Raphson 迭代法，非线性方程组求解中通常采用提高收敛速度的措施，如迭代步长及初始值的选取等对本文 QR 法非线性分析同样适用，钢框架二阶弹塑性稳定分析的 QR 法计算格式及步骤如下[12]：

1) 结构离散及数据初始化。

同时对结构进行有限元网格离散和样条结点离散。每根杆件可划分一个单元，柱与柱刚接，梁柱之间可采用任意连接方式。考虑连接的非线性，输入 Kishi-Chen 模型的三参数。假定结构初始广义位移 $\boldsymbol{\delta}_0$ 、各单元初始内力 $\boldsymbol{R}_0$ 及已施加荷载参数 λ_0 均为 0，设定加载步长增量 $\Delta\lambda$，计算中可根据每级加载平衡迭代次数及塑性开展程度缩减一半。

2) 按荷载步循环，采用修正 Newton-Raphson 迭代法计算：$i=0,1,2,3,\cdots$

a) 计算结构总刚度矩阵 $\boldsymbol{K}_i$ 。

首先根据单元结点弯矩确定连接节点的瞬时转动刚度 R_A 、R_B，按式(5)计算单元刚度矩阵 $\boldsymbol{k}_{Loc}^{\mathrm{e}}$，按式(23)变换，就得到 QR 法的单元刚度矩阵 $\bar{\boldsymbol{K}}^{\mathrm{e}}$，然后按样条结点编码装配到结构的总刚度矩阵中去。对单元循环就得到第 i 级荷载作用下结构的总刚度矩阵 $\boldsymbol{K}_i$，对总刚度矩阵进行 LU 三角分解，在后面的不平衡迭代过程中保持不变。

b) 计算本级荷载增量 $\Delta\boldsymbol{P}_i$。

考虑梁单元结点属性，计算各单元的等效结点荷载向量[12]，然后对各结点荷载依次做 QR 变换，就得到结构的总荷载向量 $\boldsymbol{P}$ 。确定本级荷载增量：$\Delta\boldsymbol{P}_i=\Delta\lambda\boldsymbol{P}$ ；施加本级荷载时，视初始不平衡力向量 $\Delta\boldsymbol{P}_i^0=\Delta\boldsymbol{P}_i$ 。

c) 消除不平衡力的迭代计算，$j=1,2,3,\cdots$

i) 计算位移及内力增量。

解方程 $\boldsymbol{K}_i\Delta\boldsymbol{\delta}_i^j=\Delta\boldsymbol{P}_i^j$ ，就得到广义位移增量，根据式(20)计算各单元的结点位移增量 $\Delta\boldsymbol{\delta}_{ig}^{j\mathrm{e}}$ ；进一步计算出各单元的内力增量；从而得到整个结构的内力增量 $\Delta\boldsymbol{R}_i^j$ 。

ii) 截面塑性判断。

根据当前内力状态按式(8)判断是否形成新的塑性铰，是则根据屈服准则修正荷载增量参数 $\Delta\lambda_i$ 及相应的内力增量 $\Delta\boldsymbol{R}_i^1$ 、位移增量 $\Delta\boldsymbol{\delta}_i^1$ 。控制每级加载塑性铰出现的数目尽可能不超过一个，以保证每一级加载过程中结构的刚度基本保持不变。修正塑性铰截面的转动刚度，将它设为 0。

iii) 更新结构当前的位移及内力。

叠加迭代产生的位移及内力增量，已施加的荷载参数：$\lambda_{i+1}=\lambda_i+\Delta\lambda_i$ 。

iv) 计算结构不平衡力向量。

根据结构已施加荷载和当前结点内力的差值计算不平衡力向量：

$$\Delta\boldsymbol{P}_i^{j+1}=\lambda_{i+1}\boldsymbol{P}-\boldsymbol{R}_{i+1}\text{。}$$

v) 收敛性判断。

根据不平衡力准则判断收敛性，如果 $\Delta P_i^{j+1}|/\|\lambda_{i+1}P|>\varepsilon$ ，回到第 i)步，进入下一次迭代。否则终止迭代，再做一次塑性判断。

d) 稳定性及结束判断。

如果某控制点的位移发生突变、荷载位移曲线出现拐点、迭代达到设定的迭代次数仍不收敛或 $|K_i|\leqslant 0$ ，可认为结构达到稳定的临界状态，终止计算。否则返回到步骤 a)，施加下一级荷载。

6　算例分析

如图 4 所示外伸端板连接钢框架[2]，连接节点几何特性见表 1。梁柱采用欧洲轻钢标准工字钢及 H 型钢，柱：底部三层 HEB240，即 $240\times240\times10\times17$ ，顶部三层 HEB1800，即 $180\times180\times8.5\times14$ ；梁：顶层 IPE270，即 $270\times135\times6.6\times10.2$ ，其它 IPE330，即 $330\times160\times7.5\times11.5$ ，截面参数见表 2。弹性模量为 $E=2.06\times10^5\text{MPa}$ ，屈服强度 $f_{\mathrm{y}}=235\text{MPa}$ 。

本文利用 QR 法对该例进行了一阶弹塑性(不考虑二阶效应)和二阶弹塑性稳定分析，半刚性连接均采用 Kishi-Chen 模型。同时也给出了梁柱刚接时的计算结果。网格离散每根柱杆划分 1 个单元，每根梁划分 2 个单元，共 78 个单元。QR 法离散 *N*=8，*R*=5。本文 QR 法的自由度总数 135，而采用有限元软件分析时，每个梁柱连接节点要设置独立的转动弹簧单元来模拟半刚性连接，连接位置要设置 2 个结点，并耦合相应的平动自由度，共 126 个单元，107 个结点，自由度总数 321。计算结果见表 3。整个结构的荷载采用相同的比例因子(荷载因子)逐级施加，荷载因子-顶层侧移曲线如图 5 所示，塑性铰分布如图 6 所示。

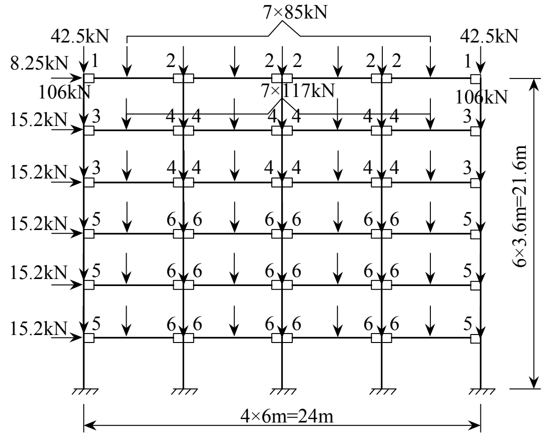


图 4 四跨六层钢框架

Fig.4 Four spans six storey frame

表 1 梁柱半刚性连接性能参数(n=1.5)

Table 1 Property parameters of the semi-rigid joints (n=1.5)

编号	连接类型	极限弯矩 M_u/(kN・m)	初始刚度 R_i/(kN・m/rad)
1	IPE 270 - HEB 180	65	16100
2	IPE 270 - HEB 180	80	54500
3	IPE 330 - HEB 180	83	25700
4	IPE 330 - HEB 180	105	84500
5	IPE 330 - HEB 240	99	31700
6	IPE 330 - HEB 240	112	79300

表 2 杆件单元的截面参数

Table 2 Sections parameters of the bar elements

截面编号	截面型号	A/cm^2	I/cm^4	M_P/(kN・m)	P_y/kN
1	IPE330	62.6	11770	179	1471
2	IPE270	45.9	5790	108	1078
3	HEB240	106.0	11260	238	2491
4	HEB180	65.3	3830	109	1534

表 3 钢框架稳定临界荷载因子

Table 3 Stable limit load factors of the frame

计算方法	一阶弹塑性分析		二阶弹塑性分析	
连接方式	刚性	半刚性	刚性	半刚性
本文 QR 法	1.6751	1.4152	1.6501	1.3445
有限元法[2]	1.674	1.384	——	1.346

从表 3 可以看出，QR 法和文献[2]有限元法的计算结果非常接近，说明本文 QR 法的精度是有保证的。半刚性连接一阶弹塑性分析的结果有一定的差距主要是因为文献[2]节点采用的是双线性模型。对比一阶和二阶分析的结果，可以看出结构高度不大时，二阶效应对刚接框架的稳定性影响不大，但对半刚性连接钢框架的稳定性影响较大。连接的半刚性使结点的约束减弱，结构的整体刚度降低，进一步放大结构的二阶效应，更容易失稳。从图 5 可以看出，同时考虑半刚性连接和二阶效应影响，稳定临界力降低很多。

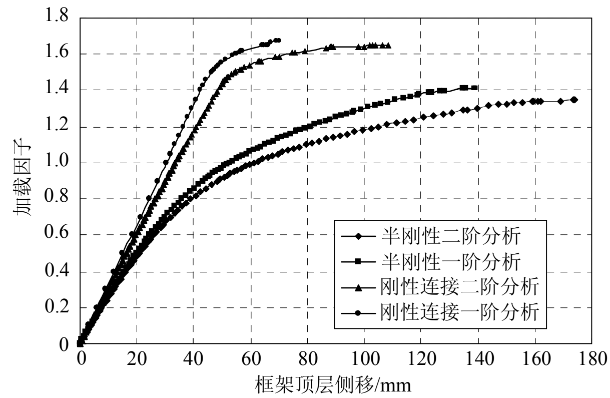
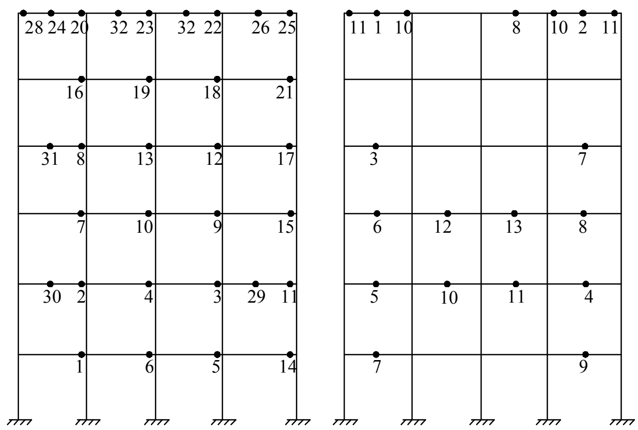


图 5 荷载因子-顶层侧移曲线

Fig.5 Curve of load factor-top lateral displacement



(a) 梁柱刚接 (b) 梁柱半刚接

图 6 塑性铰分布

Fig.6 Plastic hinge distribution

从图 6 可以看出，失稳破坏前很多杆件截面已经进入塑性状态，梁柱连接形式不同，塑性的分布及出现顺序都不同。梁柱刚接时，梁端分配的负弯矩较大，塑性铰首先出现在梁端。梁柱半刚性连接时，杆端约束减弱，改变了内力在梁柱之间的分配比例，梁端分配的负弯矩较小，梁跨中正弯矩较大，塑性铰多分布在跨中截面。

7 结论

本文应用两端附带零长度转动弹簧的半刚性连接梁单元模型，采用塑性铰模型和修正的 Newton-Raphson 迭代法，建立了平面半刚性连接钢框架二阶弹塑性稳定分析的 QR 法计算格式，并给出了算法的步骤。典型算例分析表明：梁柱连接的半刚性及二阶效应减小了杆端约束及结构的抗侧刚度，使得结构临界荷载降低，位移增大，降低钢结构的稳定性能。钢框架的失稳一般发生在塑性开展后，材料非线性对稳定承载力影响很大，二阶弹

塑性分析才能真正揭示其稳定承载能力。

本文 QR 法未知量少，精度较高，既发挥了 B 样条函数高阶紧凑的优点又避免了对样条基函数的复杂的微积分过程。QR 法刚度方程是按样条结点排列的，每个样条结点包含若干有限元结点的刚度贡献，局部失稳不会影响后续的计算，梁柱塑性铰贯通，结点的转动刚度变为零也无需像有限元法一样重新确定结构的自由度，整个非线性计算过程中未知量数恒定。在处理钢框架刚接、半刚接、铰接、塑性铰同时存在以及单元之间结点自由度不协调问题变得简单易行。QR 法既利用了有限元法的优点又弥补了它的不足，结构层数越多 QR 法的优势愈明显。

参考文献：

[1] 田兴运, 钢结构稳定的概念设计[J]. 工业建筑, 2008, 38(增刊): 619－623.
Tian Xingyun. Conception design of steel structure bucking [J]. Industrial Construction, 2008, 38(Suppl): 619－623. (in Chinese)

[2] Gizejowski M A, Barszcz A M. Review of analysis methods for inelastic design of steel semi-continuous frames [J]. Journal of Constructional Steel Research, 2006, 62: 81－92.

[3] 赵建. 影响钢框架稳定承载力要素的有限元分析[J]. 钢结构, 2009, 24(4): 17－18.
Zhao Jian. FE analysis of factors influencing stable bearing capacity of steel frames [J]. Steel Construction, 2009, 24(4): 17－18. (in Chinese)

[4] Ashraf M, Nethercot D A, Ahmed B. Sway of semi-rigid steel frames: Part 1: Regular frames [J]. Engineering Structures, 2004, 26(12): 1809－1819.

[5] 卢小松, 陈向荣, 刘红博. 半刚性连接节点对有侧移钢框架稳定承载力的影响[J]. 钢结构, 2007, 22(6): 20－24.
Lu Xiaosong, Chen Xiangrong, Liu Hongbo. The effect of semi-rigid joints on the buckling capacity of sway steel frames [J]. Steel Construction, 2007, 22(6): 20－24. (in Chinese)

[6] 李国华, 申林, 顾强. 半刚性连接钢框架非线性有限元分析[J]. 武汉理工大学学报, 2007, 29(2): 68－71.
Li Guohua, Shen Lin, Gu Qiang. Nonlinear FEM analysis of semi-rigid frames in steel structure [J]. Journal of Wuhan University of Technolog, 2007, 29(2): 68－71. (in Chinese)

[7] Wong Y L, Yu T, Chan S L. A simplified analytical method for unbraced composite frames with semi-rigid connections [J]. Journal of Constructional Steel Research, 2007, 63(7): 961－969.

[8] 秦荣, 梁汉吉, 李秀梅, 苏金凌. 超限高层建筑结构分析的 QR 法[M]. 北京: 科学出版社, 2010: 190－218.
Qin Rong, Liang Hanji, Li Xiumei, Su Jinling. QR method for high-rise building structure analysis [M]. Beijing: Science Press, 2010: 190－218. (in Chinese)

[9] 李晓娟, 王新堂, 郑绍华. 半刚性连接平面钢框架整体稳定分析的单元刚度矩阵[J]. 宁波大学学报, 2007, 20(1): 86－89.
Li Xiaojuan, Wang Xintang, Zheng Shaohua. Stiffness matrix of element for overall stability analysis of plane steel frames with semi-rigid connections and geometrical imperfection [J]. Journal of Ningbo University, 2007, 20(1): 86－89. (in Chinese)

[10] Kishi N, Chen Wai-Fah. Moment-rotation relations of semi-rigid connections with angles [J]. Journal of Structural Engineering, 1990, 116(7): 1813－1834.

[11] 刘永华, 张耀春. 半刚性钢框架实用非线性分析[J]. 工程力学, 2007, 24(12): 6－13.
Liu Yonghua, Zhang Yaochun. Practical nonlinear analysis for semi-rigid steel frames [J]. Engineering Mechanics, 2007, 24(12): 6－13. (in Chinese)

[12] 李秀梅. 高层钢框架结构分析的新方法研究[D]. 南宁: 广西大学, 2008.
Li Xiumei. New method for tall steel frame structure analysis [D]. Nanning: Guangxi University, 2008. (in Chinese)