

文章编号: 1000-5641(2012)04-0027-09

## 跳扩散过程下期权定价的数值方法

黎 伟, 周圣武

(中国矿业大学 理学院, 江苏 徐州 221116)

**摘要:** 研究了跳扩散过程下期权价值所满足 PIDE 方程的数值计算方法. 利用四阶差分格式对空间离散, 引入四阶 Lagrange 插值多项式对边界进行延拓, 得到一个非齐次线性系统. 基于矩阵指数的 Padé 逼近方法及其分数表示形式, 构建了一种高阶光滑 Crank-Nicolson 差分格式. 数值计算验证了该方法的有效性, 讨论了跳跃强度对标准期权和障碍期权的影响. 与传统的 Crank-Nicolson 格式相比, 该格式很好地处理了在执行价格和障碍点附近数值震荡的问题. 该方法亦可应用于一般具有非光滑边界的线性系统问题.

**关键词:** 期权; 跳扩散过程; 数值方法; Padé 逼近; 光滑 Crank-Nicolson 格式

**中图分类号:** O211.6, F830.9 **文献标识码:** A

**DOI:** 10.3969/j.issn.1000-5641.2012.04.004

## Numerical method for option pricing under jump-diffusion process

LI Wei, ZHOU Sheng-wu

(College of Sciences, China University of Mining and Technology,  
Xuzhou Jiangsu 221116, China)

**Abstract:** Numerical method for partial integro-differential equation (PIDE) resulting from option value under jump-diffusion process was studied. A non-homogeneous linear system was obtained by discretizing the spatial derivatives utilizing the fourth-order difference and extending boundary using fourth-order Lagrange interpolating polynomial. Based on Padé approximations and partial fraction version of the matrix exponential, a high-order smoothing Crank-Nicolson scheme was constructed. Numerical calculation discussed the influence of jump intensity on vanilla option value and barrier option value, showed that the algorithm was efficient. Compared with classic Crank-Nicolson scheme, the numerical scheme avoided the spurious oscillation near the strike price and barrier value. The algorithm also can be used in the general linear boundary value problem which has non-smooth boundary.

**Key words:** option; jump-diffusion process; numerical method; Padé approximation; smoothing Crank-Nicolson scheme

收稿日期: 2011-09

基金项目: 国家自然科学基金(61005089); 中央高校基本科研业务费专项基金(JGK101677)

第一作者: 黎伟, 男, 硕士研究生, 研究方向为期权定价、金融计算. E-mail: liwei\_123@126.com

## 0 引言

经典 Black-Scholes 期权定价模型在金融市场中占有重要地位<sup>[1]</sup>. 然而, 大量实证研究表明, 资产价格并不是连续变化的, 一些突发的情况会引起资产价格发生跳跃. Merton<sup>[2]</sup> 首次在几何布朗运动中引入泊松过程来描述股票价格的演变行为, 并通过解一个 PIDE 方程得到了标准欧式期权价值的级数表示形式. 然而, 对于大部分奇异期权(如障碍期权)来讲, 它们的价值目前并没有解析表达式. 因此, 跳扩散过程下期权定价的数值研究便具有一定的意义. 目前国外已有一些相关文献, 如: Cont 等<sup>[3]</sup> 给出一般指数 Lévy 模型下的一种有限差分法; Carr 等<sup>[4]</sup> 将积分方程化为微分方程, 提出了一类有效的数值方法; Salmi 和 Toivanen<sup>[5]</sup> 构造了美式期权定价的一种迭代格式等. 国内对于带跳的期权定价数值研究则主要集中在二叉树方法和蒙特卡洛模拟法, 对于相应偏微分方程数值方法的研究较少.

对于障碍期权, 由于边界的非光滑性, 一般的 Crank-Nicolson 格式(C-N 格式)会在非光滑点产生数值震荡. Tangman 等<sup>[6]</sup> 应用指数时间差分法对障碍期权进行定价, 一定程度上避免了传统 C-N 格式在非光滑点的数值震荡; Zvan 等<sup>[7]</sup> 通过在障碍点应用后退的欧拉格式来避免此种情况的出现, 但后退的欧拉格式只有一阶精度; 于是, 基于矩阵指数的 Padé 逼近方法, Wade 等<sup>[8]</sup> 在扩散过程下利用二阶中心差分对离散障碍期权建立了一种光滑 C-N 差分格式; 甄莉君等<sup>[9]</sup> 应用其对具有双障碍期权性质的理财产品进行了定价. 本文在此基础上, 考虑了跳扩散过程下标准欧式期权和障碍期权的数值计算格式, 利用四阶有限差分及四阶 Lagrange 插值多项式, 将原问题化为非齐次线性系统问题, 利用 Padé 逼近方法建立了一种具有四阶精度的高阶光滑 C-N 格式. 数值结果表明本文算法是有效合理的.

## 1 跳扩散过程下期权定价数学模型

假设标的资产价格满足如下随机微分方程

$$\frac{dS(t)}{S(t-)} = \mu dt + \sigma dW(t) + (\eta - 1) dN(t), \quad (1)$$

其中:  $(W(t))_{t \geq 0}$  和  $(N(t))_{t \geq 0}$  分别为带  $\sigma$ -域流的完备概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$  上的标准布朗运动和强度为  $\lambda$  的泊松过程;  $\mu$  和  $\sigma$  分别为资产价格没有发生跳跃时的期望收益率和波动率;  $\eta - 1$  表示资产价格的跳跃幅度, 且  $\kappa = E[\eta - 1]$ ;  $N(t)$  与  $W(t)$  相互独立.

由文献[10]可知, 风险中性条件下期权价值  $V(S, t)$  满足如下 PIDE

$$V_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 V_{SS} + (r - \lambda \kappa) S V_S - (r + \lambda) V + \lambda \int_0^{+\infty} V(S\eta, t) f(\eta) d\eta = 0, \quad (2)$$

式中:  $r$  为无风险利率;  $f(\eta)$  为  $\eta$  的概率密度函数, 且在到期日  $t = T$  有  $V(S, T) = g(S)$ .

对于标准欧式看涨期权, 到期收益  $g(S) = \max\{S - K, 0\}$ ,  $K$  为执行价格. 若  $\ln(\eta) \sim N(\alpha, \gamma^2)$ , Merton<sup>[2]</sup> 给出了期权价值的一种级数表示形式

$$V(S, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\lambda(1 + \kappa)\tau]^n}{n!} e^{-\lambda(1 + \kappa)\tau} V_{BS}(\tau, S, K, r_n, \sigma_n), \quad (3)$$

式中:  $\tau = T - t$ ,  $\sigma_n^2 = \sigma^2 + n\gamma^2/\tau$ ,  $r_n = r - \lambda\kappa + n(\alpha + 0.5\gamma^2)/\tau$ ,  $V_{BS}(\cdot)$  为没有跳跃时欧式看涨期权价值.

对于障碍期权, 到期收益除了满足标准欧式看涨期权的收益函数外, 还与标的资产在整个有效期内是否达到障碍值有关. 以上升敲出看涨期权为例, 有上边界条件  $V(B, t) = 0$ .

## 2 方程的变换

对于标准欧式看涨期权, 方程(2)的求解区域为  $(S, t) \in (0, +\infty) \times [0, T]$ . 显然, 当  $S \rightarrow 0$  时, 期权价值趋近于0, 即  $\lim_{S \rightarrow 0} V(S, t) = 0$ ; 当  $S \rightarrow +\infty$  时, 几乎可以肯定期权到期后会被执行, 故  $\lim_{S \rightarrow +\infty} V(S, t) = S - Ke^{-r(T-t)}$ . 由于在实际交易中, 资产价格不会出现0或无穷大的情形, 为便于计算, 假设  $S \in [S_{\min}, S_{\max}]$ . 对于上升敲出看涨期权, 由于障碍值的存在, 方程(2)的求解区域为  $(S, t) \in [S_{\min}, B] \times [0, T]$ .

为叙述方便, 以下讨论均是针对标准欧式看涨期权, 对于障碍期权只需改变相应的边界即可. 作如下变量替换

$$x = \ln(S/K), y = \ln(\eta), \tau = T - t, v(x, \tau) = V(Ke^x, T - \tau),$$

那么定解问题(2)可转化为

$$\begin{cases} v_\tau = \frac{1}{2}\sigma^2 v_{xx} + \left(r - \lambda\kappa - \frac{1}{2}\sigma^2\right)v_x - (r + \lambda)v + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} v(x + y, \tau)p(y)dy, \\ v(x, 0) = f(x), v(x_{\min}, \tau) = 0, v(x_{\max}, \tau) = Ke^{x_{\max}} - Ke^{-r\tau}. \end{cases} \quad (4)$$

这里  $x_{\min} = \ln(S_{\min}/K)$ ,  $x_{\max} = \ln(S_{\max}/K)$ ,  $f(x) = g(Ke^x)$ ,  $p(y)$  是随机变量  $y = \ln(\eta)$  的概率密度函数. 本文假设  $\ln(\eta) \sim N(\alpha, \gamma^2)$ , 易知,  $\kappa = e^{\alpha+0.5\gamma^2} - 1$ .

对于方程(4)中的积分部分, 作变量替换  $z = x + y$ , 取  $\Omega_z = [x_{\min}, x_{\max}]$ , 则

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} v(x + y, \tau)p(y)dy &= \int_{\Omega_z} v(z, \tau)p(z - x)dz + \int_{\mathbf{R} \setminus \Omega_z} v(z, \tau)p(z - x)dz \\ &\approx \int_{\Omega_z} v(z, \tau)p(z - x)dz + \int_{x_{\max}}^{+\infty} (Ke^z - Ke^{-r\tau})p(z - x)dz \\ &= \int_{\Omega_z} v(z, \tau)p(z - x)dz + Ke^{x+\alpha+\frac{\gamma^2}{2}}\Phi\left(\frac{x - x_{\max} + \alpha + \gamma^2}{\gamma}\right) - Ke^{-r\tau}\Phi\left(\frac{x - x_{\max} + \alpha}{\gamma}\right) \\ &= \int_{\Omega_z} v(z, \tau)p(z - x)dz + \varepsilon(x, \tau), \end{aligned} \quad (5)$$

其中  $\Phi(\cdot)$  为累积标准正态分布函数.

## 3 模型数值解法

将区间  $[x_{\min}, x_{\max}]$  分成  $N$  等份 ( $N$  为偶数), 得  $N + 1$  个离散点

$$\Omega_h = \{x_i \in \mathbf{R} : x_i = x_{\min} + ih, i = 0, 1, 2, \dots, N, h = (x_{\max} - x_{\min})/N\},$$

对偏导数  $v_x$  和  $v_{xx}$  作如下四阶有限差分近似<sup>[11,12]</sup>

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x_i, \tau) = \nabla_i(\tau) + O(h^4), \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_i, \tau) = \Delta_i(\tau) + O(h^4), \quad i = 1, 2, \dots, N - 1, \quad (6)$$

$$\nabla_i(\tau) = \frac{v(x_{i-2}, \tau) - 8v(x_{i-1}, \tau) + 8v(x_{i+1}, \tau) - v(x_{i+2}, \tau)}{12h}, \quad (7)$$

$$\Delta_i(\tau) = \frac{-v(x_{i-2}, \tau) + 16v(x_{i-1}, \tau) - 30v(x_i, \tau) + 16v(x_{i+1}, \tau) - v(x_{i+2}, \tau)}{12h^2}. \quad (8)$$



这里

$$\begin{aligned} a_{11} &= \gamma_1 - 6\alpha_1, \quad a_{12} = \delta_1 + 4\alpha_1, \quad a_{13} = \xi_1 - \alpha_1, \\ a_{N-1N-3} &= \alpha_{N-1} - \xi_{N-1}, \quad a_{N-1N-2} = \beta_{N-1} + 4\xi_{N-1}, \quad a_{N-1N-1} = \gamma_{N-1} - 6\xi_{N-1}, \\ \alpha_i &= \frac{\sigma^2}{24h^2} - \frac{r - 0.5\sigma^2 - \lambda\kappa}{12h}, \quad \beta_i = -\frac{2\sigma^2}{3h^2} + \frac{2(r - 0.5\sigma^2 - \lambda\kappa)}{3h}, \quad \gamma_i = \frac{5\sigma^2}{4h^2} + r + \lambda, \\ \delta_i &= -\frac{2\sigma^2}{3h^2} - \frac{2(r - 0.5\sigma^2 - \lambda\kappa)}{3h}, \quad \xi_i = \frac{\sigma^2}{24h^2} + \frac{r - 0.5\sigma^2 - \lambda\kappa}{12h}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned}$$

由算子半群相关理论<sup>[14]</sup>, 方程 (12) 的精确解可表示为

$$\mathbf{u}(\tau) = e^{-\tau\mathbf{A}}\mathbf{u}(0) + \int_0^\tau e^{-(\tau-s)\mathbf{A}}\mathbf{b}(s) ds. \quad (13)$$

注意: 对于障碍期权  $\mathbf{b}(s) = \mathbf{0}$ . 对时间等距划分, 取  $\tau_m = mk$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots, M$ , 且  $Mk = T$ . 由式 (13) 可知

$$\mathbf{u}(\tau_{m+1}) = e^{-(k+\tau_m)\mathbf{A}}\mathbf{u}(0) + e^{-k\mathbf{A}} \int_0^{\tau_m} e^{-(\tau_m-s)\mathbf{A}}\mathbf{b}(s) ds + \int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}} e^{-(\tau_{m+1}-s)\mathbf{A}}\mathbf{b}(s) ds, \quad (14)$$

作变量替换  $s - \tau_m = k\delta$ , 则式 (14) 可写为

$$\mathbf{u}(\tau_{m+1}) = e^{-k\mathbf{A}}\mathbf{u}(\tau_m) + k \int_0^1 e^{-k\mathbf{A}(1-\delta)}\mathbf{b}(\tau_m + k\delta) d\delta. \quad (15)$$

于是求方程 (12) 解的问题转化为矩阵指数的逼近问题. 本文采用  $(p, q)$ -Padé 逼近<sup>[15-17]</sup> 计算  $e^{-z}$ . 令  $R_{p,q}(z) = P_{p,q}(z)/Q_{p,q}(z)$ , 这里

$$P_{p,q}(z) = \sum_{j=0}^p \frac{(p+q-j)!p!}{(p+q)!j!(p-j)!} (-z)^j, \quad Q_{p,q}(z) = \sum_{j=0}^q \frac{(p+q-j)!q!}{(p+q)!j!(q-j)!} (z)^j, \quad (16)$$

且满足当  $z \rightarrow 0, z \in \mathbf{C}$  时,  $R_{p,q}(z) = e^{-z} + O(|z|^{p+q+1})$ . 则式 (15) 可近似表示为

$$\mathbf{u}_{m+1} = R_{p,q}(k\mathbf{A})\mathbf{u}_m + k \sum_{i=1}^2 Q_{p,q}^{(i)}(k\mathbf{A})\mathbf{b}(\tau_m + \delta_i k), \quad (17)$$

这里  $\mathbf{u}_m$  为  $\mathbf{u}(\tau_m)$  的近似值,  $Q_{p,q}^{(i)}(z)$  与  $R_{p,q}(z)$  是同分母有理函数,  $\delta_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$  和  $\delta_2 = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$  为区间  $[0,1]$  中的高斯正交点<sup>[18]</sup>, 并且满足

$$\sum_{i=1}^2 \delta_i^l Q_{p,q}^{(i)}(z) = \frac{l!}{z^{l+1}} \left( R_{p,q}(z) - \sum_{j=0}^l \frac{z^j}{j!} \right), \quad l = 0, 1. \quad (18)$$

由文献 [19] 可知, 当  $p = 0$  时, 数值格式 (17) 是 L-稳定的. 本文将  $R_{q,q}$  与  $R_{0,2q}$  两种 Padé 逼近结合起来, 构造一种精度为  $2q$  的光滑 Padé 格式, 与单独使用  $R_{q,q}$  逼近相比, 该种格式能够避免在非光滑点附近出现数值震荡. 具体数值格式如下,

$$\mathbf{u}_{m+1} = \begin{cases} R_{0,2q}(k\mathbf{A})\mathbf{u}_m + k \sum_{i=1}^2 Q_{0,2q}^{(i)}(k\mathbf{A})\mathbf{b}(\tau_m + \delta_i k), & 0 \leq m < m_0, \\ R_{q,q}(k\mathbf{A})\mathbf{u}_m + k \sum_{i=1}^2 Q_{q,q}^{(i)}(k\mathbf{A})\mathbf{b}(\tau_m + \delta_i k), & m \geq m_0. \end{cases} \quad (19)$$

为了避免在格式(19)中计算高阶矩阵多项式的逆, 本文采用  $R_{p,q}(z)$  和  $\{Q_{p,q}^{(i)}(z)\}_{i=1}^2$  的一种分数表示形式<sup>[20-22]</sup>, 如下

$$R_{p,q}(z) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{q_1} \frac{w_j}{z-c_j} + 2 \sum_{j=q_1+1}^{q_1+q_2} \Re\left(\frac{w_j}{z-c_j}\right), & p < q, \\ (-1)^q + \sum_{j=1}^{q_1} \frac{w_j}{z-c_j} + 2 \sum_{j=q_1+1}^{q_1+q_2} \Re\left(\frac{w_j}{z-c_j}\right), & p = q, \end{cases} \quad (20)$$

$$Q_{p,q}^{(i)}(z) = \sum_{j=1}^{q_1} \frac{w_{ij}}{z-c_j} + 2 \sum_{j=q_1+1}^{q_1+q_2} \Re\left(\frac{w_{ij}}{z-c_j}\right), \quad i = 1, 2. \quad (21)$$

这里  $c_j$  表示  $R_{p,q}(z)$  和  $Q_{p,q}^{(i)}(z)$  的极点, 且满足  $q_1 + 2q_2 = q$ ,  $w_j = P_{p,q}(c_j)/Q_{p,q}'(c_j)$  和  $w_{ij} = N_{p,q}^{(i)}(c_j)/D_{p,q}^{(i)'}(c_j)$ ; 多项式  $N_{p,q}^{(i)}(z)$  和  $D_{p,q}^{(i)}(z)$  分别是  $Q_{p,q}^{(i)}(z)$  的分子多项式和分母多项式.

将式(20)和式(21)带入数值格式(19), 则可得到一种新的数值算法, 该算法只需解一些后退的欧拉线性问题, 不需要计算高阶矩阵多项式的逆. 以四阶格式为例, 取  $q = 2$ , 则对于(0,4)-Padé格式, 利用 Matlab 2009a 计算极点及相应参数取值为:  $q_1 = 0, q_2 = 2$ , 且

$$\begin{aligned} c_1 &= -0.270\ 555\ 768\ 932 + i2.504\ 775\ 904\ 362, & w_{11} &= 0.174\ 204\ 307\ 472 - i0.023\ 488\ 268\ 401\ 1, \\ c_2 &= -1.729\ 444\ 231\ 068 - i0.888\ 974\ 376\ 122, & w_{12} &= 0.508\ 808\ 394\ 420 + i0.002\ 507\ 912\ 891\ 1, \\ w_1 &= -0.541\ 413\ 348\ 429 + i0.248\ 562\ 520\ 866, & w_{21} &= -0.295\ 373\ 909\ 959 - i0.179\ 575\ 890\ 979\ 9, \\ w_2 &= 0.541\ 413\ 348\ 429\ 2 + i1.588\ 859\ 182\ 223, & w_{22} &= 0.112\ 361\ 208\ 066 + i0.596\ 907\ 381\ 204\ 2, \end{aligned}$$

算法迭代过程为

$$\mathbf{u}_{m+1} = 2\Re(\mathbf{y}_1) + 2\Re(\mathbf{y}_2), \quad 0 \leq m < m_0, \quad (22)$$

其中

$$(k\mathbf{A} - c_1\mathbf{I})\mathbf{y}_1 = w_1\mathbf{u}_m + kw_{11}\mathbf{b}(\tau_m + \delta_1k) + kw_{21}\mathbf{b}(\tau_m + \delta_2k),$$

$$(k\mathbf{A} - c_2\mathbf{I})\mathbf{y}_2 = w_2\mathbf{u}_m + kw_{21}\mathbf{b}(\tau_m + \delta_1k) + kw_{22}\mathbf{b}(\tau_m + \delta_2k).$$

对于(2,2)-Padé格式, 极点及相应参数取值为:  $q_1 = 0, q_2 = 1$ , 且

$$\begin{aligned} c_1 &= -3.0 - i1.732\ 050\ 807\ 568\ 877, & w_{11} &= -0.866\ 025\ 403\ 78 + i3.232\ 050\ 807\ 57, \\ w_1 &= -6.0 + i10.392\ 304\ 845\ 413\ 27, & w_{21} &= 0.866\ 025\ 403\ 78 + i0.232\ 050\ 807\ 569, \end{aligned}$$

算法迭代过程为

$$\mathbf{u}_{m+1} = \mathbf{u}_m + 2\Re(\mathbf{y}), \quad m \geq m_0, \quad (23)$$

其中:  $(k\mathbf{A} - c_1\mathbf{I})\mathbf{y} = w_1\mathbf{u}_m + kw_{11}\mathbf{b}(\tau_m + \delta_1k) + kw_{21}\mathbf{b}(\tau_m + \delta_2k)$ .

结合式(22)和式(23), 则可得到一种对于时间和空间精度均为四阶的光滑差分格式. 注意: 如果对  $v_x$  和  $v_{xx}$  采用二阶中心差分, 且对格式(17)采用(1,1)-Padé逼近方法, 则格式(17)就是类似一般的C-N差分格式. 因此格式(19)可以说是一种高阶光滑C-N差分格式.

#### 4 数值试验

本节将通过对标准欧式看涨期权和上升敲出期权进行数值模拟来验证以上算法的有效性, 假设各参数取值如下,

$$T - t = 1, \quad \alpha = 0, \quad \gamma = 0.3, \quad \lambda = 2, \quad x_{\min} = -2, \\ x_{\max} = 2, \quad K = 50, \quad r = 0.05, \quad \sigma = 0.4, \quad m_0 = 3.$$

对于上升敲出障碍期权, 取敲出障碍点  $B = 70$ , 图 1 和图 2 给出了本文数值格式与传统 C-N 格式的比较关系, 由图可知, 用传统 C-N 格式计算障碍期权价值时, 在执行价格和障碍点附近均出现了严重的数值震荡, 且在计算相应避险参数时更为显著, 本文算法很好地解决了传统格式的缺点.

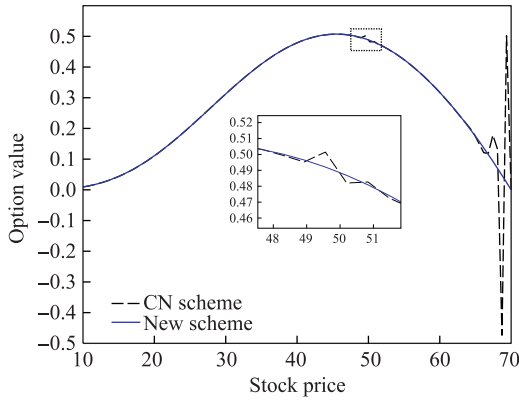


图1 股价与障碍期权价值的关系

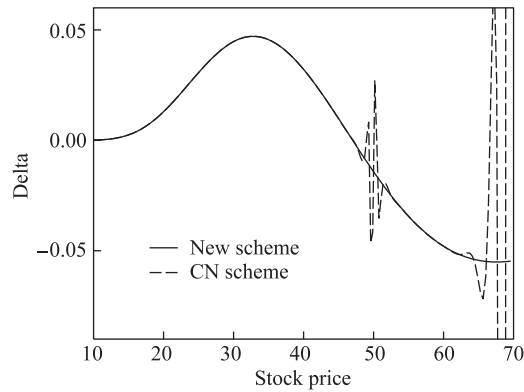


图2 股价与 Delta 值的关系

Fig.1 Relation between stock price and option value Fig.2 Relation between stock price and Delta

为验证具体的收敛阶数, 以 Merton 解析解中级数和前 500 项为基准, 用 Matlab 2009a 编程计算, 表 1 和表 2 分别给出了本文算法计算标准欧式看涨期权价值时  $L^2$  误差和  $L^\infty$  误差与空间节点数、时间节点数的关系以及相应的收敛阶数, 其中收敛阶数的计算方法为误差比率的与相应步长比率的比值的对数. 由表可知, 本文所构建的算法对于时间和空间基本可以达到四阶收敛精度, 说明本文算法是有效可行的.

表 1 计算误差与空间节点数的关系 ( $M=2000$ )

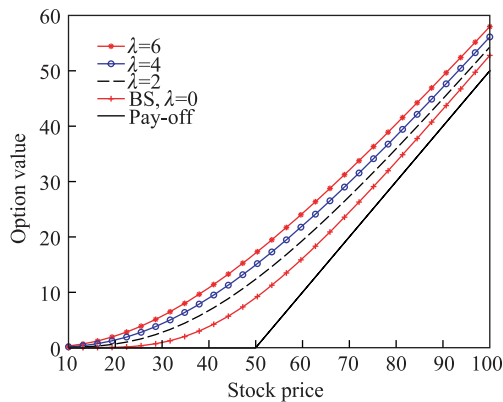
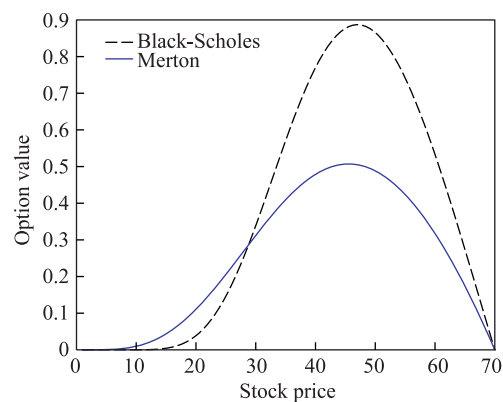
Tab.1 Relation between errors and nodes of space

$N$	$L^\infty$ 误差	阶数	$L^2$ 误差	阶数
40	2.435 6e-2	—	1.842 1e-2	—
80	2.273 5e-3	3.421 3	1.634 2e-3	3.494 7
160	1.593 9e-4	3.834 3	1.129 3e-4	3.855 1
320	1.064 6e-5	3.904 2	7.536 4e-6	3.905 4
640	6.959 4e-7	3.935 2	4.715 5e-7	3.998 4
1 280	4.424 6e-8	3.914 7	3.021 4e-8	3.964 1

表2 计算误差与时间节点数的关系 ( $N=4000$ )

$M$	$L^\infty$ 误差	阶数	$L^2$ 误差	阶数
10	5.241 6e-3	-	3.168 3e-3	-
20	5.421 7e-4	3.143 2	3.366 0e-4	3.234 6
40	3.769 5e-5	3.846 3	2.263 7e-5	3.894 3
80	2.371 2e-6	3.990 7	1.414 8e-6	4.000 0
160	1.481 8e-7	4.000 1	8.835 1e-8	4.001 2
320	9.261 1e-9	4.000 0	5.520 8e-9	4.000 3

下面讨论跳跃强度  $\lambda$  对期权价值的影响. 在不同跳跃强度下, 图3和图4分别给出了标准欧式看涨期权和上升敲出期权的价值变化. 对于标准看涨期权来讲, 跳跃强度的增大导致了标的资产未来收益不确定性的加剧, 因此考虑跳现象时的价值明显高于不考虑时的价值, 且随着跳跃强度的增大, 期权的价值也在增大; 此外, 期权价值总是大于立即执行期权所获得收益, 这也从侧面反映了对于不支付红利的美式看涨期权, 提前执行是没有意义的. 而对于上升敲出期权来讲, 跳跃强度的增大使得标的资产未来获得更高收益的机会和触发障碍点的机会同时增大, 从而必定存在一个平衡点, 当标的资产价格低于该点时, 前者占主导地位, 考虑跳现象时的期权价值较高; 当标的资产价格高于该点时, 后者占主导地位, 期权的价值反而较低, 图4也说明了这个问题.

图3 参数  $\lambda$  对标准期权的影响Fig.3 Influence of parameter  $\lambda$  for vanilla option图4 参数  $\lambda$  对障碍期权的影响Fig.4 Influence of parameter  $\lambda$  for barrier option

## 5 结 论

本文呈现了跳扩散过程下标准欧式期权和障碍期权的一种四阶光滑 Crank-Nicolson 格式, 该格式只需解一些后退的 Euler 线性问题, 不需要计算高阶矩阵多项式的逆. 数值计算验证了该格式的有效性, 与传统的 Crank-Nicolson 格式相比, 在提高计算精度同时, 很好地处理了在执行价格和障碍点附近数值震荡的问题. 该方法不仅可以解决类似的欧式期权定价问题, 还可以应用到美式、随机波动率及一般的线性系统问题, 具有较高的应用价值.

**致谢** 衷心感谢各位评审专家对本文提出的若干有益修改意见!



## [参 考 文 献]

- [1] BLACK F, SCHOLES M. The pricing of options and corporate liabilities[J]. *Political Economy*, 1973, 81: 637-659.
- [2] MERTON R C. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous[J]. *Journal of Financial Economics*, 1976, 3: 125-144.
- [3] CONT R, VOLTCHEKOVA E. A finite difference scheme for option pricing in jump diffusion and exponential Lévy models[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2005, 43: 1596-1626.
- [4] CARR P, MAYO A. On the numerical evaluation of option prices in jump diffusion processes[J]. *European Journal of Finance*, 2007, 13: 353-372.
- [5] TOIVANEN J, SALMI S. An iterative method for pricing American options under jump-diffusion models[J]. *Applied Numerical Mathematics*, 2011, 61: 821-831.
- [6] TANGMAN D Y, GOPAUL A, BHURUTH M. Exponential time integration and Chebychev discretisation schemes for fast pricing of options[J]. *Applied Numerical Mathematics*, 2008, 58: 1309-1319.
- [7] ZVAN R, VETZAL K R, FORSYTH P A. PDE methods for pricing barrier options[J]. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 2000, 24: 1563-1590.
- [8] WADE B A, KHALIQ A Q M, YOUSUF M, et al. On smoothing of the Crank-Nicolson scheme and higher order schemes for pricing barrier options[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2007, 204: 144-158.
- [9] 甄莉君, 张兴永, 牛成虎, 黎伟. 挂钩黄金理财产品定价的数值方法[J]. *华东师范大学学报: 自然科学版*, 2011, 5: 25-32.
- [10] KWOK Y K. *Mathematical models of financial derivatives*[M]. Berlin: Springer-Verlag Press, 2008.
- [11] THOMAS J W. *Numerical partial differential equations: finite difference methods*[M]. Berlin: Springer-Verlag Press, 1995.
- [12] COMPANY R, JÓDAR L, PINTOS J R. Computing option pricing models under transaction costs[J]. *Computers and Mathematics with Applications*, 2010, 59: 651-662.
- [13] SPIKE T L, SUN H W. Fourth order compact boundary value method for option pricing with jumps[J]. *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, 2009, 1(6): 845-861.
- [14] 王明新. *算子半群与发展方程*[M]. 北京: 科学出版社, 2006.
- [15] 王仁宏, 朱功勤. *有理函数逼近及其应用*[M]. 北京: 科学出版社, 2004.
- [16] KHALIQ A Q M, MARTN-VAQUERO J, WADE B A, et al. Smoothing schemes for reaction-diffusion systems with nonsmooth data[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2009, 223: 374-386.
- [17] MOHAMMAD S. Smoothing of Crank-Nicolson scheme for the two-dimensional diffusion with an integral condition[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2009, 214: 512-522.
- [18] KHALIQ A Q M, VOSS D A, YOUSUF M. Pricing exotic options with L-stable Padé schemes[J]. *Journal of Banking and Finance*, 2007, 31: 3438-3461.
- [19] YOUSUF M. On the class of high order time stepping schemes based on Padé approximations for the numerical solution of Burgers' equation [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2008, 205: 442-453.
- [20] KHALIQ A Q M, TWIZELL E H, VOSS D A. On parallel algorithms for semidiscretized parabolic partial differential equations based on subdiagonal Padé approximations[J]. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 1993, 9: 107-116.
- [21] MOHAMMAD S. Fourth order positively smoothed Padé schemes for parabolic partial differential equations with nonlocal boundary conditions[J]. *Applied Mathematical Sciences*, 2010, 42: 2065-2080.
- [22] YOUSUF M. Efficient L-stable method for parabolic problems with application to pricing American options under stochastic volatility[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2009, 213: 121-136.