

文章编号: 1000-4750(2013)03-0032-05

偏心轴向荷载作用下薄壁箱梁的 约束扭转翘曲应力研究

张元海, 林丽霞

(兰州交通大学土木工程学院, 甘肃, 兰州 730070)

摘 要: 以薄壁箱梁的约束扭转分析理论为基础, 将薄壁箱梁所受偏心轴向荷载作为一种外加双力矩荷载考虑, 建立偏心轴向荷载作用下薄壁箱梁约束扭转的双力矩这一广义内力的计算公式。为了便于计算翘曲应力, 进一步推导了扭转中心位置及主扇性坐标的实用计算公式。通过对一模型箱梁进行计算, 并与按通用有限元软件 ANSYS 壳单元计算结果进行比较, 验证了该文方法和所推导公式的正确性。详细分析箱室高宽比以及悬臂板宽度变化对偏心轴向荷载作用下薄壁箱梁约束扭转翘曲应力的影响。研究表明: 箱室高宽比及悬臂板宽度对悬臂板端部翘曲应力的影响最大, 对腹板与上翼缘、下翼缘交接处翘曲应力的影响相对较小; 在偏心轴向分布荷载作用下, 悬臂箱梁固定端横截面上控制点处的翘曲应力可达到初等梁应力的 12%, 不容忽视。

关键词: 薄壁箱梁; 约束扭转; 翘曲应力; 扭转中心; 扇性坐标

中图分类号: U448.213 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2011.10.0719

RESEARCH ON WARPING STRESS OF RESTRAINED TORSION FOR THIN-WALLED BOX GIRDER UNDER ECCENTRIC AXIAL LOAD

ZHANG Yuan-hai, LIN Li-xia

(School of Civil Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou, Gansu 730070, China)

Abstract: Based on the theory of restrained torsion for a thin-walled box girder, the equations of bimoment for the restrained torsion of a thin-walled box girder under an eccentric axial load are derived through taking the eccentric axial load as a kind of a bimoment load. The practical formulas for the twist centre and principal sectorial coordinate are further derived to simplify the calculation of warping stress. A box girder model is analyzed and the calculated stresses are in a good agreement with those obtained by the shell element of the finite element software ANSYS, validating the presented method and formulas. The influence of the variation of box depth-width ratios and cantilever plate widths on the warping stress for restrained torsion of a thin-walled box girder under an eccentric axial load is analyzed in detail. It is shown that: the depth-width ratio and the cantilever plate width affect remarkably the warping stress at the tip of a cantilever plate, while they have a smaller effect on the warping stress at the intersection of web and top or bottom plates; the warping stress at the control point on the fixed end cross section of the cantilever box girder under an eccentric axial load reaches 12% of that calculated by the elementary beam theory, which should not be ignored.

Key words: thin-walled box girder; restrained torsion; warping stress; centre of torsion; sectorial coordinate

薄壁箱梁由于具有优越的受力性能, 因而被广泛应用于现代桥梁工程中。薄壁箱梁的结构分析和

应力计算已有多种方法^[1], 其中, 将组成箱梁的各板件离散为壳单元的有限元法虽具有计算精度高、

收稿日期: 2011-10-30; 修改日期: 2012-03-12

基金项目: 国家自然科学基金项目(51068018, 51268029); 长江学者和创新团队发展计划项目(IRT1139)

通讯作者: 张元海(1965—), 男, 甘肃武山人, 教授, 博士, 博导, 主要从事桥梁结构空间分析与设计理论研究(E-mail: zyh17012@163.com).

作者简介: 林丽霞(1975—), 女, 广东五华人, 副教授, 博士, 主要从事桥梁结构有限元分析与计算理论研究(E-mail: linlixia@126.com).

适应性强等诸多优点,但也存在计算量大、计算结果不便实用等缺点,而基于梁理论的一维分析方法在工程实用计算中获得了广泛应用。多年来,不少学者在薄壁箱梁的结构分析方面,尤其是在基于梁理论的扭转分析方面,开展了大量研究工作,发表的相关文献已有不少,如文献[2-10]等。薄壁箱梁在偏心轴向荷载作用下一般也存在扭转问题,然而这方面的相关文献却很少。在实际桥梁工程中,薄壁箱梁受偏心轴向荷载作用的例子并不少见。例如:当车辆在薄壁箱梁桥上制动时,制动力则以偏心轴向荷载方式作用于箱梁;张拉箱梁内的纵向预应力钢束时(悬臂束和连续束),预加力也是偏心作用于箱梁(有竖向偏心距),此外,为了防止箱梁发生侧向弯曲,需尽量沿横向对称张拉,但实际上难以做到完全对称张拉,或由于箱梁横截面本身具有左右不对称性,因而,预加力沿横向也会具有偏心。所以,开展薄壁箱梁在偏心轴向荷载作用下的结构分析和应力研究具有实用价值。

本文以薄壁箱梁的扭转理论为基础,研究薄壁箱梁在偏心轴向荷载作用下的应力分析问题。除考虑箱梁的常规轴向拉压和弯曲变形外,还考虑偏心轴向荷载产生的约束扭转作用。结合数值算例,具体分析偏心轴向荷载作用下薄壁箱梁横截面上的约束扭转翘曲应力分布规律,提出薄壁箱梁应力计算中容易忽视的有关问题。

1 偏心轴向荷载引起的约束扭转分析

图1所示箱梁在自由端横截面上D点处作用有偏心轴向集中荷载P,此时箱梁除发生轴向压缩、竖向弯曲、侧向弯曲外,还发生约束扭转。就约束扭转而言,集中荷载P使箱梁在悬臂端作用一集中外加双力矩荷载 \tilde{B} :

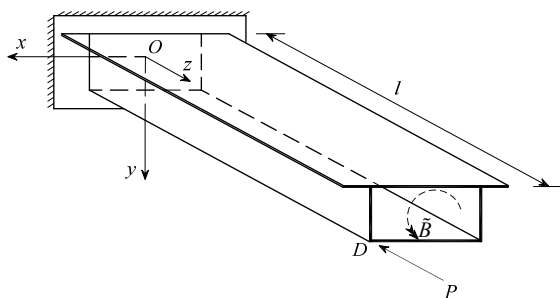


图1 受偏心轴向荷载作用的悬臂箱梁简图

Fig.1 Cantilever box girder under eccentric axial load

$$\tilde{B} = -P \cdot \omega_D \quad (1)$$

式中, ω_D 为 P 作用点 D 处的主扇性坐标。

根据薄壁箱梁约束扭转微分方程的初参数解可知^[8],图1所示箱梁的双力矩 $B(z)$ 为:

$$B(z) = B_0 \text{ch}(kz) - GJ_d \beta'_0 \eta \text{sh}(kz) + T_0 \eta \text{sh}(kz) \quad (2)$$

式中: B_0 、 β'_0 、 T_0 为初参数,它们分别为箱梁起始端($z=0$)的双力矩、广义翘曲位移、扭矩; J_d 为抗扭惯性矩; $\eta = \mu/k$, μ 为约束系数, k 为约束扭转特征参数。

由于固定端无翘曲,且全梁不受扭矩作用,故式(2)右端第2项和第3项均为零。利用边界条件 $B(z)|_{z=l} = \tilde{B}$ 可确定 B_0 ,从而双力矩方程为:

$$B(z) = \frac{\tilde{B}}{\text{ch}(kl)} \text{ch}(kz) \quad (3)$$

当图1所示箱梁受偏心轴向均布荷载 q 作用时,若 q 作用点处的主扇性坐标为 ω_q ,则箱梁受到的均布双力矩荷载为 $\tilde{m}_\omega = -q \cdot \omega_q$,此时箱梁双力矩的初参数方程为:

$$B(z) = B_0 \text{ch}(kz) - GJ_d \beta'_0 \eta \text{sh}(kz) + T_0 \eta \text{sh}(kz) + \tilde{m}_\omega \int_0^z \text{ch}[k(z-\xi)] d\xi = B_0 \text{ch}(kz) - GJ_d \beta'_0 \eta \text{sh}(kz) + T_0 \eta \text{sh}(kz) + \frac{1}{k} \tilde{m}_\omega \text{sh}(kz)$$

由边界条件确定初参数后,双力矩方程即可表达为:

$$B(z) = \frac{1}{k} \tilde{m}_\omega [\text{sh}(kz) - \text{th}(kl) \text{ch}(kz)] \quad (4)$$

对其余支承条件的箱梁,其双力矩方程亦可按相应边界条件确定初参数后得到。求得箱梁任一横截面上的双力矩这一广义内力后,横截面上任一点处的翘曲正应力 σ_ω 可按下式计算:

$$\sigma_\omega = \frac{B}{I_\omega} \omega \quad (5)$$

式中: I_ω 为主扇性惯性矩; ω 为主扇性坐标。

2 扭心位置和主扇性坐标的实用公式

薄壁箱梁横截面上的翘曲正应力 σ_ω 与主扇性坐标 ω 具有相同的分布规律,而扭转中心(主极点)位置的确定又是计算主扇性坐标的前提。众所周知,如果按照有关文献中给出的计算过程计算这些几何参数,将是特别繁琐的。因此,建立扭心和主扇性坐标的实用计算公式很有必要。

图2所示薄壁箱形截面具有左右对称性,故扭心 S 必位于对称轴 y 轴上。图2中, Oxy 为形心坐标系,扭心 S 至顶板中点 B 的距离为 d 。若用 $\omega_B(s)$ 表示以 B 为辅助极点且周线坐标 s 的起始点也选在

B 点时周线上任一点的辅助扇性坐标, 则有:

$$d = -\frac{1}{I_y} \int_A \omega_B(s) x(s) t(s) ds \quad (6)$$

$$\omega_B(s) = \int_0^s \rho_B(s) ds - \psi \int_0^s \frac{1}{t(s)} ds \quad (7)$$

式中: I_y 为横截面对 y 轴的惯性矩; $\rho_B(s)$ 为辅助极点 B 至周线上任一点处切线的距离; $t(s)$ 为壁厚; ψ 为扭转参数。

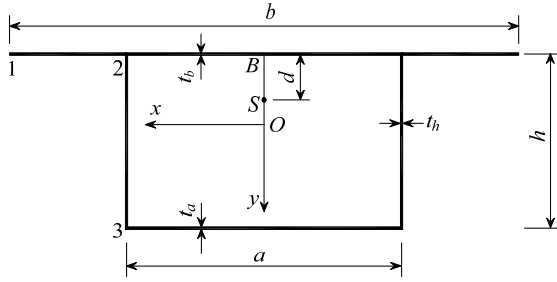


图2 箱梁横截面简图

Fig.2 Cross section of box girder

如图2所示, 左侧悬臂板端部、左侧腹板与翼缘板交接处等控制点位置分别以1、2、3表示, 则由式(7)容易求得这些控制点处的辅助扇性坐标分别为:

$$\omega_{B1} = \omega_{B2} = -\frac{a}{2t_b} \psi, \quad \omega_{B3} = \frac{ah}{2} - \left(\frac{a}{2t_b} + \frac{h}{t_h} \right) \psi$$

式中:

$$\psi = 2ah / \left(\frac{a}{t_b} + \frac{a}{t_a} + \frac{2h}{t_h} \right)$$

注意到顶板、底板中点处的辅助扇性坐标均为零, 且相邻控制点间的辅助扇性坐标均按直线分布, 此外, 该扇性坐标图关于 y 轴呈反对称分布, 则由式(6)可求得:

$$d = \frac{a^2 h}{a^3 t_a + b^3 t_b + 6a^2 h t_h} \cdot \frac{\lambda}{\kappa} \quad (8)$$

式中:

$$\lambda = 3b^2 + 6h^2 - \left(2 - \frac{t_a}{t_b} \right) a^2 + ah \left(\frac{9t_h}{t_b} + \frac{2t_a}{t_h} - \frac{3t_h}{t_a} \right);$$

$$\kappa = \frac{a}{t_a} + \frac{a}{t_b} + \frac{2h}{t_h}.$$

扭心位置确定后, 任一点的主扇性坐标 ω 则很容易求得。图2所示箱形截面控制点1、2、3处的主扇性坐标计算式分别为:

$$\omega_1 = \frac{1}{2} bd - ah / \left(1 + \frac{t_b}{t_a} + 2 \frac{h}{a} \frac{t_b}{t_h} \right) \quad (9)$$

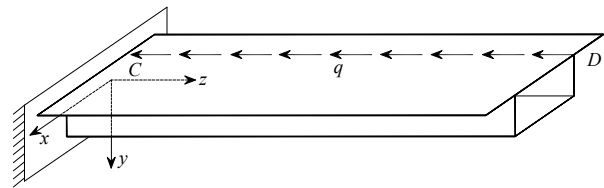
$$\omega_2 = \frac{1}{2} ad - ah / \left(1 + \frac{t_b}{t_a} + 2 \frac{h}{a} \frac{t_b}{t_h} \right) \quad (10)$$

$$\omega_3 = \frac{a}{2} (h+d) - ah \left(\frac{2h}{t_h} + \frac{a}{t_b} \right) / \left(\frac{2h}{t_h} + \frac{a}{t_b} + \frac{a}{t_a} \right) \quad (11)$$

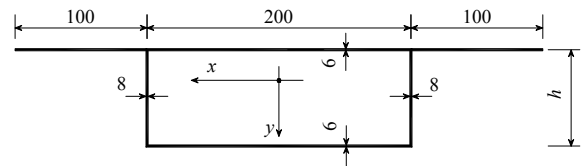
3 算例验证及翘曲应力参数分析

悬臂箱梁模型如图3所示, 梁长为1.2m, 箱室宽度 $a=200\text{mm}$, 上翼缘全宽 $b=400\text{mm}$, 梁高 h 也取为 200mm , 各板件厚度如图3(b)所示。轴向均布线荷载 $q=1\text{kN/m}$ 作用于顶板与腹板交接处的 CD 线上。材料弹性模量为 3000MPa , 剪切模量为 1083MPa 。按本文导出的公式, 求得横截面扭心至顶板中面的距离为 89.1mm , 求得位于 x 轴正半轴的三个控制点(即悬臂板端部、顶板与腹板交点、底板与腹板交点)的主扇性坐标分别为 $\omega_1=6387\text{mm}^2$, $\omega_2=-2521\text{mm}^2$, $\omega_3=336\text{mm}^2$ 。

该横截面的主扇性惯性矩为 $I_\omega=2.10 \times 10^{10} \text{mm}^6$, 抗扭惯性矩 $I_d=5.49 \times 10^7 \text{mm}^4$, 极惯性矩 $I_p=5.63 \times 10^7 \text{mm}^4$; 对形心轴的惯性矩分别为 $I_x=4.46 \times 10^7 \text{mm}^4$, $I_y=6.80 \times 10^7 \text{mm}^4$ 。



(a) 支承条件与荷载情况



(b) 横截面尺寸 /mm

图3 悬臂箱梁算例简图

Fig.3 Example of cantilever box girder

图4示出按本文考虑约束扭转的薄壁梁理论、初等梁理论、通用有限元软件 ANSYS 壳单元 (SHELL63 单元) 等3种方法计算的固定端横截面上翼缘板、下翼缘板的正应力分布, 以便进行比较。由图4可以看出, 按本文方法(考虑约束扭转影响)的计算值与 ANSYS 计算值总体上吻合良好, 而按初等梁理论(忽略约束扭转)的计算结果与 ANSYS 计算值之间存在明显偏差, 尤其是在悬臂板端部和荷载作用点处明显偏大。

在荷载作用点处即图 4 右腹板与顶板交点处,按初等梁理论求得的应力为 -0.536MPa ,按本文方法求得的应力为 -0.598MPa (其中翘曲应力为 -0.062MPa),翘曲应力占初等梁总应力的 12%,可见,约束扭转翘曲应力不容忽略。值得指出的是,如果偏心轴向荷载作用点处的主扇性坐标为零,则不发生约束扭转,此时才可按初等梁理论计算。

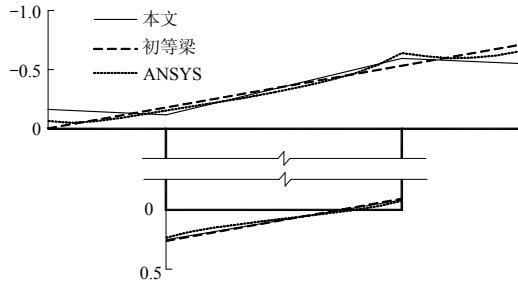


图 4 固定端横截面应力比较 /MPa

Fig.4 Comparison of stresses at cross section of fixed end

为了考察梁高变化对翘曲应力的影响,在保持箱梁上翼缘、下翼缘宽度不变的情况下($b=400\text{mm}$, $a=200\text{mm}$),当梁高从 40mm 增大至 400mm(步长 20mm)时,亦即箱室高宽比 h/a 从 0.2 增大至 2.0 时,按本文方法计算的固定端横截面 3 个控制点处(位置参见图 2 中的点 1、2、3,下同)翘曲应力的变化曲线如图 5 所示。由图 5 可以看出,箱室高宽比对悬臂板端部翘曲应力 $\sigma_{\omega 1}$ 的影响最大,当高宽比小于 1.2 时,翘曲应力 $\sigma_{\omega 1}$ 随高宽比的增大而增大,而当高宽比大于 1.2 后,翘曲应力 $\sigma_{\omega 1}$ 随高宽比的增大而减小,当高宽比大于 1.8 后,翘曲应力 $\sigma_{\omega 1}$ 甚至变为拉应力。高宽比的变化对腹板与上翼缘、下翼缘交接处翘曲应力 $\sigma_{\omega 2}$ 和 $\sigma_{\omega 3}$ 的影响相对较小。

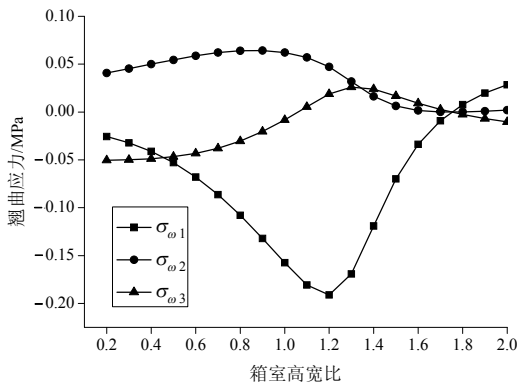


图 5 箱室高宽比对翘曲应力的影响

Fig.5 Warping stress versus depth-width ratio

为了考察悬臂板宽度变化对不同截面型式箱梁翘曲应力的影响,取 $a=200\text{mm}$,上翼缘全宽 b 从 200mm 增大至 600mm(步长 20mm),亦即上翼缘、

下翼缘板宽之比 b/a 从 1.0 增大至 3.0,梁高分别为 80mm、200mm、400mm(分别对应于宽箱梁、方箱梁、高箱梁)时,固定端横截面 3 个控制点处翘曲应力的变化曲线如图 6~图 8 所示。由图 6~图 8 可以看出,对宽箱梁和方箱梁,翼缘板宽度比的变化对腹板与上翼缘、下翼缘交接处翘曲应力 $\sigma_{\omega 2}$ 和 $\sigma_{\omega 3}$ 的影响都较小,但对高箱梁,翼缘板宽度比变化对翘曲应力 $\sigma_{\omega 2}$ 和 $\sigma_{\omega 3}$ 的影响相对较大。翼缘板宽度比

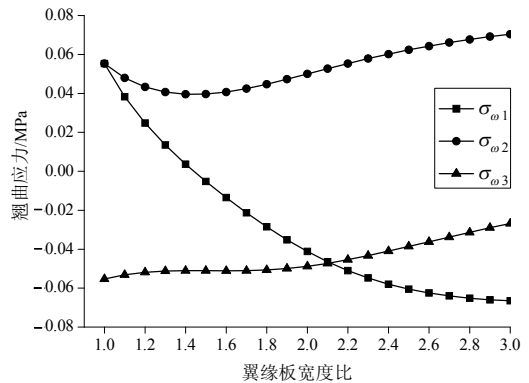


图 6 宽箱梁翼缘板宽度比对翘曲应力的影响

Fig.6 Warping stress versus ratio of flange widths for wide box girder

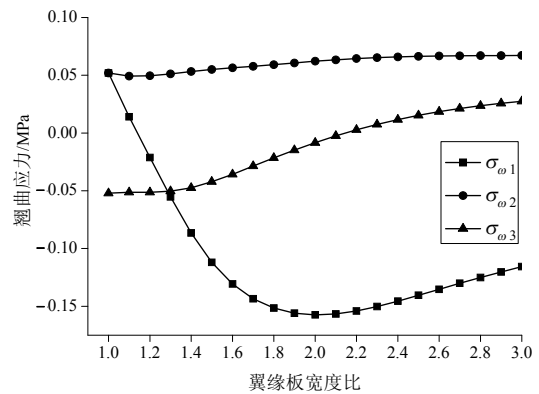


图 7 方箱梁翼缘板宽度比对翘曲应力的影响

Fig.7 Warping stress versus ratio of flange widths for square box girder

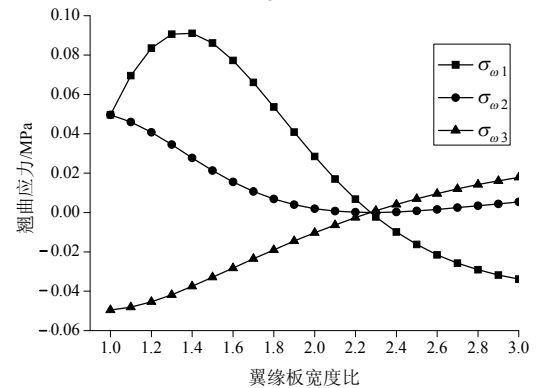


图 8 高箱梁翼缘板宽度比对翘曲应力的影响

Fig.8 Warping stress versus ratio of flange widths for deep box girder

对各种型式箱梁悬臂板端部翘曲应力的影响均较显著,随着悬臂板宽度比的逐渐增大,悬臂板端部翘曲应力均会由拉变为压,但影响规律不同。

4 结论

(1) 本文研究了薄壁箱梁在偏心轴向荷载作用下的约束扭转问题,将偏心轴向荷载作为外加双力矩荷载考虑,导出了偏心轴向荷载作用下约束扭转分析中双力矩这一广义内力的计算公式以及扭转中心位置及主扇性坐标的实用计算公式。通过对一模型箱梁进行计算,并与按通用有限元软件 ANSYS 壳单元计算结果进行比较,验证了本文方法和所推导公式的正确性。

(2) 按初等梁理论计算偏心轴向荷载作用下薄壁箱梁的应力时,由于忽略了约束扭转翘曲应力,将不能客观反应薄壁箱梁的实际应力分布。计算表明,悬臂箱梁算例在偏心轴向分布荷载作用下,固定端横截面上控制点处的约束扭转翘曲应力达到初等梁应力的 12%,不容忽视。只有当偏心轴向荷载作用点处的主扇性坐标为零时,才可按初等梁理论计算应力。

(3) 在偏心轴向分布荷载作用下,薄壁箱梁的箱室高宽比对悬臂板端部翘曲应力的影响最大,对腹板与上翼缘、下翼缘交接处翘曲应力的影响相对较小。当箱梁的高宽比小于 1.2 时,悬臂板端部翘曲应力随高宽比的增大而增大,但当高宽比大于 1.2 后,翘曲应力随高宽比的增大反而减小,当高宽比大于 1.8 时翘曲应力甚至改变符号。

(4) 箱梁悬臂板宽度同样对悬臂板端部翘曲应力的影响最大,对腹板与上翼缘、下翼缘交接处翘曲应力的影响相对较小。对比计算表明,在偏心轴向分布荷载作用下,随着悬臂板宽度的逐渐增大,宽箱梁、方箱梁及高箱梁三种截面型式箱梁的悬臂板端部翘曲应力均会改变符号,但影响规律完全不同。

参考文献:

- [1] Sennah K M, Kennedy J B. Literature review in analysis of box-girder bridges [J]. *Journal of Bridge Engineering*, ASCE, 2002, 7(2): 134—143.
- [2] Wang R H, Li Q S, Wu J R, et al. A spatial elastic displacement model for curved box girders with corner stiffeners [J]. *Computers & Structures*, 2005, 83(12/13): 1021—1029.
- [3] Hiroaki K. Consideration of the problem of shearing and torsion of thin-walled beams with arbitrary cross section [J]. *Thin-Walled Structures*, 2001, 39(8): 671—684.
- [4] 郭薇薇, 夏禾, 张楠. 单室薄壁箱梁考虑偏载影响的活载加载计算分析[J]. *土木工程学报*, 2004, 37(12): 32—37.
Guo Weiwei, Xia He, Zhang Nan. Live-load loading calculation of thin-walled box girders considering transverse eccentric loads [J]. *China Civil Engineering Journal*, 2004, 37(12): 32—37. (in Chinese)
- [5] 卢彭真, 魏召兰, 占玉林, 等. 基于位移场的薄壁箱梁结构约束扭转和畸变效应分析[J]. *四川大学学报(工程科学版)*, 2009, 41(1): 74—79.
Lu Pengzhen, Wei Zhaolan, Zhan Yulin, et al. Analysis of restrained torsion and distortion effect for thin-walled box girder structure based on displacement field [J]. *Journal of Sichuan University (Engineering Science Edition)*, 2009, 41(1): 74—79. (in Chinese)
- [6] 张元海. 薄壁箱梁的翘曲连续性条件[J]. *力学与实践*, 2009, 31(5): 26—29.
Zhang Yuanhai. The condition of warping continuity of thin-walled box girder [J]. *Mechanics in Engineering*, 2009, 31(5): 26—29. (in Chinese)
- [7] 张元海, 李乔. 考虑剪滞变形及约束扭转二次剪切变形影响时薄壁曲线箱梁的挠曲扭转分析[J]. *土木工程学报*, 2009, 42(3): 93—98.
Zhang Yuanhai, Li Qiao. Flexural-torsional analysis of thin-walled curved box girders with shear lag and secondary shear deformation in restraint torsion [J]. *China Civil Engineering Journal*, 2009, 42(3): 93—98. (in Chinese)
- [8] 郭金琼, 房贞政, 郑振. 箱形梁设计理论[M]. 第 2 版. 北京: 人民交通出版社, 2008: 51—92.
Guo Jinqiong, Fang Zhenzheng, Zheng Zhen. Design theory of box girder [M]. 2nd ed. Beijing: China Communications Press, 2008: 51—92. (in Chinese)
- [9] 黄剑源. 薄壁结构的扭转分析(上册)[M]. 北京: 中国铁道出版社, 1983: 201—259.
Huang Jianyuan. Torsion analysis of thin-walled structures (Part one) [M]. Beijing: China Railway Publishing House, 1983: 201—259. (in Chinese)
- [10] 倪元增, 钱寅泉. 弹性薄壁梁桥分析[M]. 北京: 人民交通出版社, 2000: 57—76.
Ni Yuanzeng, Qian Yinquan. Elastic analysis of thin-walled beam bridge [M]. Beijing: China Communications Press, 2000: 57—76. (in Chinese)