

文章编号: 1000-4750(2013)03-0024-08

# 圆柱壳-圆锥壳组合结构振动分析的新方法

瞿叶高, 华宏星, 孟 光, 谌 勇, 龙新华

(上海交通大学机械系统与振动国家重点实验室, 上海 200240)

**摘 要:** 提出了一种区域分解法来分析不同边界条件下圆锥壳-圆柱壳-圆锥壳组合结构的自由振动和强迫振动特性。首先将组合壳体的位移边界与固定边界分开, 将其分解为圆柱壳、圆锥壳子结构; 为能获取组合壳体的高阶振动特性, 进一步将圆柱壳、圆锥壳子结构分解为自由的圆柱壳段和圆锥壳段。采用分区广义变分和最小二乘加权残值法将各壳段分区界面上的位移和转角协调方程引入到组合壳体的势能泛函中, 使组合壳体的振动分析问题, 归结为在满足分区界面位移和转角协调条件下的无约束泛函变分问题。圆柱壳段和圆锥壳段位移变量的周向和轴向分量分别采用 Fourier 级数和 Chebyshev 多项式展开。算例表明: 区域分解法计算出的不同边界条件下组合壳体自由振动和强迫振动结果与有限元软件 ANSYS 结果非常吻合; 该方法具有高效率、高精度和收敛性好等优点。

**关键词:** 区域分解; 分区广义变分; 最小二乘加权残值; 圆柱壳-圆锥壳组合壳体; 自由振动; 强迫振动

**中图分类号:** TH113; TU33 **文献标志码:** A **doi:** 10.6052/j.issn.1000-4750.2011.10.0690

## A NEW METHOD FOR VIBRATION ANALYSIS OF JOINED CYLINDRICAL-CONICAL SHELLS

QU Ye-gao, HUA Hong-xing, MENG Guang, CHEN Yong, LONG Xin-hua

(State Key Laboratory of Mechanical System and Vibration, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

**Abstract:** A domain decomposition approach is proposed for solving the free and forced vibration of joined conical-cylindrical-conical shell (CCCS) structures with different boundary conditions. The CCCS is preliminarily divided into cylindrical and conical shell substructures along the locations of the junctions and the prescribed-displacement boundaries; then these shell substructures are further decomposed into smaller cylindrical and conical shell segments to accommodate the computing requirement of high-order vibration modes and responses. The constraint equations derived from all interface continuity conditions are incorporated into the system energy function by means of the subdomain generalized variational principle and the least-squares weighted residual method, which involves the reduction of conditional extremum problems to extremum problems without any constraints. Double mixed series, i.e. the Fourier series and Chebyshev orthogonal polynomials, are adopted as assumed admissible displacement functions for each shell segment. To test the convergence, efficiency and accuracy of the present method, free and forced vibration solutions for CCCSs with different boundary conditions are compared with those obtained using finite element program ANSYS. Good agreement is observed and the present solution is found to be very efficient, robust and accurate.

**Key words:** domain decomposition; subdomain generalized variational principle; least-squares weighted residual method; joined cylindrical-conical shell; free vibration; forced vibration

收稿日期: 2011-10-19; 修改日期: 2012-03-08

通讯作者: 瞿叶高(1983—), 男, 山东人, 博士生, 从事计算力学、结构振动与噪声控制等研究(E-mail: quyegao@sjtu.edu.cn).

作者简介: 华宏星(1955—), 男, 上海人, 教授, 博士, 博导, 振动冲击噪声研究所所长, 从事振动控制技术在减振、抗冲、降噪中的应用等研究(E-mail: hhx@sjtu.edu.cn);

孟 光(1961—), 男, 陕西人, 教授, 博士, 博导, 从事旋转机械转子动力学、振动智能控制及智能机械等研究(E-mail: gmeng@sjtu.edu.cn);

谌 勇(1977—), 男, 四川人, 副教授, 博士, 从事结构冲击动力学及防护研究(E-mail: chen Yong@sjtu.edu.cn);

龙新华(1973—), 男, 江西人, 副教授, 博士, 从事非线性振动理论及其工程应用研究(E-mail: xhlong@sjtu.edu.cn).

由圆柱壳和圆锥壳构成的组合壳体在潜艇、航天器及导弹等结构中有着广泛的应用。这些组合壳体通常承受复杂的动态载荷且易产生有害振动，其动力学特性分析一直得到很多研究者的关注。然而由于壳体方程数学上的复杂性及壳体子结构协调条件匹配上的困难，已有的柱壳-锥壳组合结构振动解非常有限，仅有少数文献对组合壳体的自由振动进行了分析。Irie 等<sup>[1]</sup>采用传递矩阵法分析了圆柱壳-圆锥壳组合结构的自由振动特性。Efraim 和 Eisenberger<sup>[2]</sup>基于动刚度法得到了圆柱壳-圆锥壳组合结构的动刚度矩阵，并求得了组合结构的固有频率。Caresta 和 Kessissoglou<sup>[3]</sup>以 Donnell-Mushtari 壳体理论和 Flügge 壳体理论建立了圆锥壳和圆柱壳组合结构的运动微分方程，将圆柱壳和圆锥壳的位移分别以波传播法和幂级数法展开，最后得到了不同边界条件下组合壳体的固有频率。Galletly 和 Mistry<sup>[4]</sup>以一端固定，另一端由旋转壳体(圆锥壳、半球壳以及椭圆壳等)封闭的圆柱壳组合结构为研究对象，采用有限差分法和有限元法分析了其自由振动。Patel 等<sup>[5]</sup>采用有限元法分析了复合材料柱壳-锥壳组合结构的自由振动。

本文针对圆锥壳-圆柱壳-圆锥壳组合结构，提出了一种区域分解法来建立其动力学模型。首先将组合结构已知位移边界与固定边界分开，将其分解为圆柱壳、圆锥壳子结构，为了获取组合壳体的高阶振动响应特性，进一步将圆柱壳、圆锥壳子结构分解为自由圆柱壳段和圆锥壳段；然后采用分区广义变分原理和最小二乘加权残值法将所有壳段之间的分区界面(视位移边界界面为特殊的分区界

面)协调方程引入到组合结构能量泛函中，将组合结构的动力分析问题，归结为在满足子结构界面约束条件下的无约束泛函变分问题；最后将圆柱壳段、圆锥壳段位移变量的周向分量采用 Fourier 级数展开，轴向分量采用 Chebyshev 多项式展开，对总的能量泛函进行变分后得到组合壳体的离散动力学方程。通过将区域分解法计算出的不同边界条件下组合壳体自由振动频率及振动响应与有限元软件 ANSYS 计算结果进行对比，验证了区域分解方法的计算精度。

## 1 组合壳体结构的区域分解

本文讨论的组合壳体是一般边界条件的圆锥壳-圆柱壳-圆锥壳组合结构，其几何模型如图 1 所示。圆柱壳和圆锥壳中面上任意一点的轴向(或母线方向)、周向及法向位移分别为  $u_L$ 、 $v_L$ 、 $w_L$  和  $u_c^r$ 、 $v_c^r$ 、 $w_c^r$ ，其中上标  $r=1,2$  表示左侧或右侧锥壳。圆柱壳长度为  $L_0$ ，中面半径为  $R$ ，厚度为  $h_L$ ；圆锥壳的端面半径  $R_c^r$ ，锥壳  $\alpha_c^r$ ，厚度  $h_c^r$ 。圆柱壳弹性模量  $E_L$ 、泊松比  $\mu_L$ 、密度  $\rho_L$ ；圆锥壳弹性模量  $E_c^r$ 、泊松比  $\mu_c^r$ 、密度  $\rho_c^r$ 。

采用分区广义变分原理和最小二乘加权残值法建立组合壳体的动力学模型时，将组合结构已知位移边界与固定边界分开，将其分解为圆柱壳、圆锥壳子结构；为获取组合壳体的高阶振动特性，进一步将圆柱壳、圆锥壳子结构分解为自由的圆柱壳段和圆锥壳段。图 1 中壳体子结构内的虚线即为壳体分区界面。

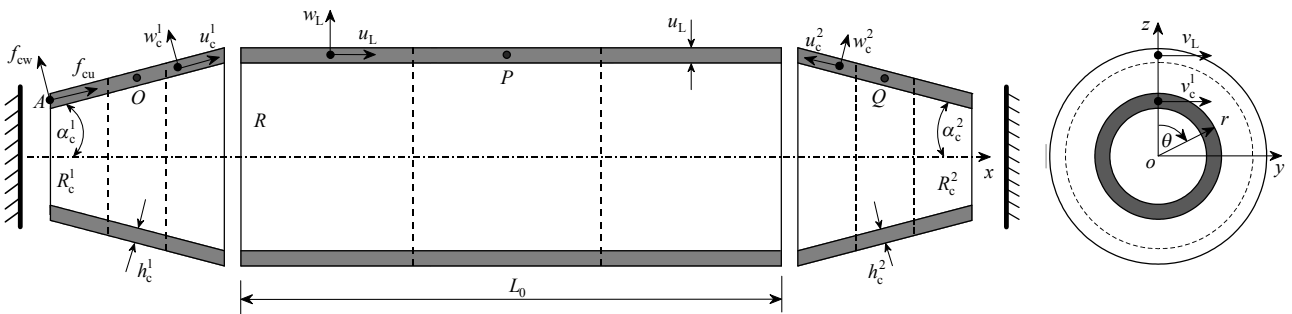


图 1 圆锥壳-圆柱壳-圆锥壳组合结构区域分解模型

Fig.1 Domain decomposition model of a joined conical-cylindrical-conical shell

### 1.1 圆柱壳子结构区域分解

将圆柱壳子结构沿轴向分为  $N$  个圆柱壳段，不考虑壳体的体力，根据修正的 Hamilton 原理，圆柱壳子结构总的势能  $\Pi_L$  为：

$$\Pi_L = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^N (T_{L,i} - U_{L,i} + W_{L,i}) dt + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{m,m'} \Pi_{L,\lambda} dt \quad (1)$$

其中： $T_{L,i}$ 、 $U_{L,i}$  和  $W_{L,i}$  分别为第  $i$  个柱壳段的动能、应变能和外载功； $\Pi_{L,\lambda}$  为广义变分项引入的相邻圆柱壳段  $m$  和  $m'$  之间的界面附加势能。

$$\Pi_{L,\lambda} = \int_l (\lambda_L \Theta_u + \beta_L \Theta_v + \eta_L \Theta_w + \gamma_L \Theta_g) dl \quad (2)$$

式中： $\lambda_L$ 、 $\beta_L$ 、 $\eta_L$  和  $\gamma_L$  为分别圆柱壳段  $m$  和  $m'$  公

共界面上的 Lagrange 乘子变量;  $\Theta_u$ 、 $\Theta_v$ 、 $\Theta_w$  和  $\Theta_g$  为圆柱壳段  $m$  和  $m'$  公共界面上位移和转角协调方程, 记为  $\Theta_u = u_L^m - u_L^{m'}$ ,  $\Theta_v = v_L^m - v_L^{m'}$ ,  $\Theta_w = w_L^m - w_L^{m'}$ ,  $\Theta_g = \partial w_L^m / \partial x - \partial w_L^{m'} / \partial x$ 。

基于 Reissner-Naghdi 薄壳理论<sup>[6]</sup>得到圆柱壳段的动能、应变能和外载功后, 将式(2)代入式(1), 根据广义变分原理, 可识别出圆柱壳分区界面上的 Lagrange 乘子  $\lambda_L$ 、 $\beta_L$ 、 $\eta_L$  和  $\gamma_L$  分别为:

$$\lambda_L = K_L^m \left[ \frac{\partial u_L^m}{\partial x} + \frac{\mu_L}{R} \left( \frac{\partial v_L^m}{\partial \theta} + w_L^m \right) \right] \quad (3a)$$

$$\beta_L = \bar{K}_L^m \left( \frac{1}{R} \frac{\partial u_L^m}{\partial \theta} + \frac{\partial v_L^m}{\partial x} \right) + \frac{\bar{D}_L^m}{R^2} \left( \frac{\partial v_L^m}{\partial x} - 2 \frac{\partial^2 w_L^m}{\partial x \partial \theta} \right) \quad (3b)$$

$$\eta_L = D_L^m \left( \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v_L^m}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial^3 w_L^m}{\partial x^3} - \frac{2 - \mu_L}{R^2} \frac{\partial^3 w_L^m}{\partial x \partial \theta^2} \right) \quad (3c)$$

$$\gamma_L = D_L^m \left[ \frac{\partial^2 w_L^m}{\partial x^2} - \frac{\mu_L}{R^2} \left( \frac{\partial v_L^m}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w_L^m}{\partial^2 \theta} \right) \right] \quad (3d)$$

式中:  $K_L^m$  和  $D_L^m$  分别为圆柱壳段  $m$  的薄膜刚度和弯曲刚度,  $K_L^m = E_L h_L / (1 - \mu_L^2)$ ,  $D_L^m = E_L h_L^3 / [12(1 - \mu_L^2)]$ ;  $\bar{K}_L^m = (1 - \mu_L) K_L^m / 2$ ,  $\bar{D}_L^m = (1 - \mu_L) D_L^m / 2$ 。

式(3)中所识别出的 Lagrange 乘子  $\lambda_L$ 、 $\beta_L$ 、 $\eta_L$  及  $\gamma_L$  具有实际的物理意义, 它们分别为圆柱壳段  $m$  和  $m'$  公共界面上的轴向薄膜力、Kelvin-Kirchhoff 等效周向剪力、Kelvin-Kirchhoff 等效法向剪力及界面弯矩(取负值)。对于圆锥壳也遵循类似的规律。将式(3)代入式(1)后得到新的能量泛函  $\bar{\Pi}_L$ , 为了保证区域分解计算的稳定性, 参照 Nitsche 法<sup>[7]</sup>在  $\bar{\Pi}_L$  基础上添加一项分区界面位移约束方程的最小二乘加权残值  $\Pi_{L,k}$ , 即:

$$\tilde{\Pi}_L = \bar{\Pi}_L - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{m,m'} \Pi_{L,k} dt \quad (4)$$

式中:

$$\Pi_{L,k} = \frac{1}{2} \int_l (\kappa_u \Theta_u^2 + \kappa_v \Theta_v^2 + \kappa_w \Theta_w^2 + \kappa_g \Theta_g^2) dl \quad (5)$$

其中:  $\kappa_u$ 、 $\kappa_v$ 、 $\kappa_w$  和  $\kappa_g$  为圆柱壳段  $m$  和  $m'$  分区界面上的权参数。

## 1.2 圆锥壳子结构区域分解

对于圆锥壳子结构, 沿着轴向将其分为  $N_c$  个锥壳段。为了描述方便, 略去圆锥壳上标  $r$ , 根据分区广义变分和最小二乘加权残值法直接构造出圆锥壳子结构能量泛函为:

$$\tilde{\Pi}_c = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^N (T_{c,i} - U_{c,i} + W_{c,i}) dt + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{m,m'} (\Pi_{c,\lambda} - \Pi_{c,\kappa}) dt \quad (6)$$

式中:  $T_{c,i}$ 、 $U_{c,i}$  和  $W_{c,i}$  分别为第  $i$  个圆锥壳段的动能、应变能和外载功;  $\Pi_{c,\lambda}$  和  $\Pi_{c,\kappa}$  分别为广义变分项和界面最小二乘加权残值引入的相邻圆锥壳段  $m$  和  $m'$  之间的界面附加能量泛函。

$$\Pi_{c,\lambda} = \int_l \{ \lambda_c \bar{\Theta}_u + \beta_c \bar{\Theta}_v + \eta_c \bar{\Theta}_w + \gamma_c \bar{\Theta}_g \} dl \quad (7)$$

$$\Pi_{c,\kappa} = \frac{1}{2} \int_l (\bar{\kappa}_u \bar{\Theta}_u^2 + \bar{\kappa}_v \bar{\Theta}_v^2 + \bar{\kappa}_w \bar{\Theta}_w^2 + \bar{\kappa}_g \bar{\Theta}_g^2) dl \quad (8)$$

其中:  $\lambda_c$ 、 $\beta_c$ 、 $\eta_c$  及  $\gamma_c$  为圆锥壳段  $m$  和  $m'$  公共界面上的 Lagrange 乘子变量;  $\bar{\kappa}_u$ 、 $\bar{\kappa}_v$ 、 $\bar{\kappa}_w$  和  $\bar{\kappa}_g$  为分区界面上的权参数;  $\bar{\Theta}_u$ 、 $\bar{\Theta}_v$ 、 $\bar{\Theta}_w$  和  $\bar{\Theta}_g$  为锥壳段分区界面上的位移和转角协调方程, 记为  $\bar{\Theta}_u = u_c^m - u_c^{m'}$ ,  $\bar{\Theta}_v = v_c^m - v_c^{m'}$ ,  $\bar{\Theta}_w = w_c^m - w_c^{m'}$ ,  $\bar{\Theta}_g = \partial w_c^m / \partial s - \partial w_c^{m'} / \partial s$ 。

圆锥壳段  $m$  和  $m'$  界面上的 Lagrange 乘子  $\lambda_c$ 、 $\beta_c$ 、 $\eta_c$  及  $\gamma_c$  分别为锥壳段分区界面上母线方向薄膜力、Kelvin-Kirchhoff 等效周向剪力、Kelvin-Kirchhoff 等效法向剪力及界面弯矩(取负值), 即:

$$\lambda_c = K_c^m \left[ \frac{\partial u_c^m}{\partial s} + \mu_c \left( \frac{u_c^m}{s} + \frac{1}{S_\alpha} \frac{\partial v_c^m}{\partial \theta} + \frac{w_c^m}{T_\alpha} \right) \right] \quad (9a)$$

$$\beta_c = \bar{K}_c^m \left( \frac{1}{S_\alpha} \frac{\partial u_c^m}{\partial \theta} + \frac{\partial v_c^m}{\partial s} - \frac{v_c^m}{s} \right) + \frac{\bar{D}_c^m}{T_\alpha} \left[ -\frac{1}{S_\alpha} \frac{\partial^2 w_c^m}{\partial s \partial \theta} + s \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial}{\partial s} \right) \right] \quad (9b)$$

$$\eta_c = D_c^m \left\{ \frac{1}{s^2} \frac{\partial w_c^m}{\partial s} - \frac{1}{s} \frac{\partial^2 w_c^m}{\partial s^2} - \frac{\partial^3 w_c^m}{\partial s^3} + \frac{(\mu_c - 3)\mathcal{G}}{s S_\alpha} + \frac{1 - 2\mu_c}{S_\alpha T_\alpha} \frac{\partial^2 v_c^m}{\partial s \partial \theta} - \frac{2 - \mu_c}{S_\alpha^2} \frac{\partial^3 w_c^m}{\partial s \partial \theta^2} \right\} \quad (9c)$$

$$\gamma_c = D_c^m \left( -\frac{\partial^2 w_c^m}{\partial s^2} - \frac{\mu_c}{s} \frac{\partial w_c^m}{\partial s} + \frac{\mu_c}{s S_\alpha} \mathcal{G} \right) \quad (9d)$$

其中:  $K_c^m$  和  $D_c^m$  分别为圆锥壳段  $m$  的薄膜刚度和弯曲刚度,  $K_c^m = E_c h_c / (1 - \mu_c^2)$ ,  $D_c^m = E_c h_c^3 / [12(1 - \mu_c^2)]$ ;  $\bar{K}_c^m = (1 - \mu_c) K_c^m / 2$ ;  $\mathcal{G} = (\partial v_c^m / \partial \theta) / T_\alpha - (\partial^2 w_c^m / \partial \theta^2) / S_\alpha$ ;  $S_\alpha = s \sin \alpha$ ,  $T_\alpha = s \tan \alpha$ 。

## 1.3 圆锥壳-圆柱壳-圆锥壳组合结构区域分解

在圆柱壳和圆锥壳子结构区域分解模型基础上, 采用前面给出的界面处理方法直接构造出圆锥壳-圆柱壳-圆锥壳组合结构总的势能  $\Pi_{Tot}$  为:

$$\Pi_{\text{Tot}} = \tilde{\Pi}_L + \sum_{r=1,2} \tilde{\Pi}_c^r + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{\zeta=-1,1} (\tilde{\Pi}_\lambda - \tilde{\Pi}_\kappa) dt \quad (10)$$

式中,  $\tilde{\Pi}_\lambda$  和  $\tilde{\Pi}_\kappa$  分别为广义变分项和最小二乘加权残值项引入的圆柱壳-圆锥壳界面附加势能。

根据圆柱壳和圆锥壳侧 Lagrange 乘子均可计算  $\tilde{\Pi}_\lambda$ , 考虑到前者表达式比较简单, 采用式(3)中圆柱壳侧 Lagrange 乘子来计算  $\tilde{\Pi}_\lambda$ , 即:

$$\tilde{\Pi}_\lambda = \int_l (\lambda_L \tilde{\Theta}_u + \beta_L \tilde{\Theta}_v + \eta_L \tilde{\Theta}_w + \gamma_L \tilde{\Theta}_g) dl \quad (11)$$

其中:  $\tilde{\Theta}_u$ 、 $\tilde{\Theta}_v$ 、 $\tilde{\Theta}_w$  和  $\tilde{\Theta}_g$  为圆柱壳与圆锥壳界面位移和转角协调方程,  $\tilde{\Theta}_u = u_L - \zeta \bar{C}_\alpha u_c + \zeta \bar{S}_\alpha w_c$ ,  $\tilde{\Theta}_v = v_L - v_c$ ,  $\tilde{\Theta}_w = w_L - \bar{S}_\alpha u_c - \bar{C}_\alpha w_c$ ,  $\tilde{\Theta}_g = \partial w_L / \partial x - \zeta \partial w_c / \partial s$ ;  $\bar{S}_\alpha = \sin \alpha_c$ ,  $\bar{C}_\alpha = \cos \alpha_c$ ;  $\zeta$  为引入的圆柱壳和圆锥壳界面条件控制参数,  $\zeta = 1$  和  $\zeta = -1$  分别表示为左侧和右侧界面条件。

由最小二乘加权残值法引入的圆柱壳与圆锥壳界面附加势能为:

$$\tilde{\Pi}_\kappa = \frac{1}{2} \int_l (\tilde{\kappa}_u \tilde{\Theta}_u^2 + \tilde{\kappa}_v \tilde{\Theta}_v^2 + \tilde{\kappa}_w \tilde{\Theta}_w^2 + \tilde{\kappa}_g \tilde{\Theta}_g^2) dl \quad (12)$$

式中,  $\tilde{\kappa}_u$ 、 $\tilde{\kappa}_v$ 、 $\tilde{\kappa}_w$  和  $\tilde{\kappa}_g$  为圆柱壳与圆锥壳界面上的权参数。

#### 1.4 组合壳体的离散动力学方程

前面通过分区广义变分和最小二乘加权残值法将组合壳体所有的分区界面位移协调方程引入到组合壳体的能量泛函中, 取消了界面位移协调关系对位移场函数的变分限制, 使壳段位移容许函数的选取变为灵活。根据圆柱壳段和圆锥壳段周向位移的周期性和连续性, 采用 Fourier 级数对其周向位移分量进行展开, 而轴向位移分量可采用幂级数多项式<sup>[8]</sup>、梁函数<sup>[9]</sup>、Chebyshev 多项式<sup>[10-11]</sup>以及三角函数<sup>[12]</sup>等进行展开。考虑到 Chebyshev 多项式具有较高的精度和良好的收敛性, 这里采用第一类正交 Chebyshev 多项式对壳段的轴向位移分量进行展开。对圆柱壳段和圆锥壳段引入如下无量纲坐标  $\bar{x}$  和  $\bar{s}$ :

$$x = L_i(\bar{x} + 1) / 2, \quad s = \eta_a \bar{s} + \eta_b \quad (13)$$

其中:  $x$  和  $\bar{x}$  分别为原始、变换后的圆柱壳坐标,  $x \in [0, L_i]$ ,  $\bar{x} \in [-1, 1]$ ;  $L_i$  为圆柱壳段  $i$  的长度。  $s$  和  $\bar{s}$  分别为变换前后的锥壳坐标,  $s \in [s_1, s_2]$ ,  $\bar{s} \in [-1, 1]$ ;  $\eta_a = (s_2 - s_1) / 2$ ,  $\eta_b = (s_1 + s_2) / 2$ 。

在无量纲坐标下, 圆柱壳和圆锥壳段轴向(或母线方向)、周向及法向位移对称形式的展开式为:

$$u_L = \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N U_m(\bar{x}) \cos n\theta \tilde{u}_{mn}(t) = U_L(\bar{x}, \theta) \tilde{\mathbf{u}}_L(t) \quad (14a)$$

$$v_L = \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N V_m(\bar{x}) \sin n\theta \tilde{v}_{mn}(t) = V_L(\bar{x}, \theta) \tilde{\mathbf{v}}_L(t) \quad (14b)$$

$$w_L = \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N W_m(\bar{x}) \cos n\theta \tilde{w}_{mn}(t) = W_L(\bar{x}, \theta) \tilde{\mathbf{w}}_L(t) \quad (14c)$$

$$u_c = \sum_{p=1}^P \sum_{n=0}^N U_p(\bar{s}) \cos n\theta \tilde{u}_{pn}(t) = U_c(\bar{s}, \theta) \tilde{\mathbf{u}}_c(t) \quad (15a)$$

$$v_c = \sum_{p=1}^P \sum_{n=0}^N V_p(\bar{s}) \sin n\theta \tilde{v}_{pn}(t) = V_c(\bar{s}, \theta) \tilde{\mathbf{v}}_c(t) \quad (15b)$$

$$w_c = \sum_{p=1}^P \sum_{n=0}^N W_p(\bar{s}) \cos n\theta \tilde{w}_{pn}(t) = W_c(\bar{s}, \theta) \tilde{\mathbf{w}}_c(t) \quad (15c)$$

式中:  $M$  和  $P$  分别为圆柱壳和圆锥壳段轴向(母线方向)位移分量的 Chebyshev 多项式截取阶数;  $N$  为壳体周向位移分量的 Fourier 级数截取阶数。对于反对称位移展开式, 需将 Fourier 级数中的正弦与余弦符号进行对调。

将圆柱壳和圆锥壳的离散位移表达式(14)和式(15)代入式(10), 经变分得到圆锥壳-圆柱壳-圆锥壳组合壳体动力学方程为:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + [\mathbf{K} - \bar{\mathbf{K}}_\lambda + \bar{\mathbf{K}}_\kappa] \mathbf{q} = \mathbf{F} \quad (16)$$

其中:  $\mathbf{q}$  为组合壳体所有壳段的广义坐标向量,  $\mathbf{q} = [\mathbf{q}_{1,c}^{\text{T}}, \dots, \mathbf{q}_{N_c,c}^{\text{T}}, \mathbf{q}_{1,L}^{\text{T}}, \dots, \mathbf{q}_{N,L}^{\text{T}}, \mathbf{q}_{1,c}^{\text{T}}, \dots, \mathbf{q}_{N_c,c}^{\text{T}}]^{\text{T}}$ ;  $\mathbf{M}$  为组合壳体的广义质量矩阵;  $\mathbf{K}$  为未考虑分区界面协调关系的组合壳体广义刚度矩阵;  $\bar{\mathbf{K}}_\lambda$  和  $\bar{\mathbf{K}}_\kappa$  为广义变分项和最小二乘加权残值项引入的各壳段分区界面附加广义刚度矩阵;  $\mathbf{F}$  为作用于组合壳体的广义外力向量。

## 2 组合壳体振动算例与讨论

### 2.1 组合壳体自由振动

以两端自由圆锥壳-圆柱壳-圆锥壳组合结构为研究对象, 采用区域分解法来分析其自由振动特性。组合壳体中所有壳体具有相同的材料参数, 弹性模量  $E = 210 \text{ GPa}$ , 密度  $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ , 泊松比  $\mu = 0.3$ 。圆柱壳尺寸:  $L_0 = 45 \text{ m}$ ,  $R = 3.25 \text{ m}$ ,  $h_L = 0.03 \text{ m}$ ; 两侧圆锥壳具有相同的几何尺寸:  $R_c^1 = R_c^2 = 0.5 \text{ m}$ ,  $\alpha_c^1 = \alpha_c^2 = 18^\circ$ ,  $h_c^1 = h_c^2 = 0.03 \text{ m}$ 。

将两侧圆锥壳子结构沿轴向等距分为  $N_c$  个锥壳段, 中间圆柱壳分为  $N$  个柱壳段; 每个圆柱壳段和圆锥壳段的轴向位移分量 Chebyshev 多项式阶数取  $M = P = 8$ 。组合壳体内各分区界面上的权参数

均取相同值  $\kappa = 1.0 \times 10^{14}$ 。为验证区域分解法的计算精度，在 ANSYS 建立了相应的组合壳体有限元模型，所有壳体均采用 SHELL63 单元进行网格化分。为获取组合壳体的高阶振动特性并保证有限元计算结果收敛，将组合壳体共划分为 36800 个单元 (36960 个节点)，网格模型为： $a_c^r \times b_c^r = 160 \times 40$ ， $a_L \times b_L = 160 \times 150$ ，其中  $a$  和  $b$  分别为壳体周向和轴向划分的网格数目，下标  $c$  和  $L$  分别指锥壳和柱壳子结构。区域分解法和有限元法计算出组合壳体周向波数  $n=0,1,2$  对应的无量纲频率  $\Omega_{n,m} = \omega R^2 \sqrt{\rho h_L / D_L}$ ，如表 1 所示。考虑到周向波数  $n \geq 1$  时，组合壳体对称和反对称模态频率成对出现，表 1 中仅给出了其中一组数据，且组合壳体的刚体模态频率已被剔出。

表 1 不同分区数目对应的圆锥壳-圆柱壳-圆锥壳组合壳体无量纲固有频率  $\Omega_{n,m}$

Table 1 Non-dimensional frequency parameter  $\Omega_{n,m}$  of a joined CCCS versus the number of shell segments

模态阶数	圆柱壳、圆锥壳子结构不同分区数目								FEM ANSYS	
	$N_c=2$				$N_c=12$					
$n$	$m$	$N=4$	$N=8$	$N=12$	$N=20$	$N=50$	$N_c=4$	$N_c=8$		
0	1	45.064	45.064	45.064	45.064	45.064	45.064	45.064	45.062	
	2	65.465	65.437	65.388	65.359	65.358	65.334	65.333	65.273	
	3	89.856	89.856	89.856	89.856	89.856	89.856	89.856	89.856	89.855
	4	126.697	126.460	126.061	125.840	125.831	125.637	125.630	125.115	
	5	134.025	134.025	134.025	134.025	134.025	134.025	134.025	134.033	
	6	177.027	177.027	177.027	177.027	177.027	176.687	176.674	175.164	
1	1	17.539	17.537	17.534	17.532	17.532	17.532	17.532	17.524	
	2	41.918	41.898	41.862	41.839	41.838	41.822	41.822	41.774	
	3	70.253	70.175	70.030	69.942	69.938	69.875	69.871	69.690	
	4	98.801	98.625	98.309	98.122	98.114	97.976	97.970	97.578	
	5	126.083	125.820	125.368	125.113	125.103	124.906	124.899	124.348	
	6	151.612	151.344	150.907	150.676	150.667	150.480	150.474	149.952	
2	1	4.301	4.296	4.294	4.294	4.287	4.293	4.293	4.288	
	2	12.482	12.461	12.446	12.439	12.436	12.432	12.431	12.414	
	3	21.249	21.207	21.170	21.154	21.154	21.127	21.121	21.114	
	4	25.646	25.624	25.608	25.602	25.601	25.575	25.564	25.602	
	5	33.495	33.494	33.491	33.488	33.488	33.473	33.466	33.494	
	6	49.455	49.417	49.360	49.326	49.324	49.293	49.287	49.234	

从表 1 可以看出，随着圆柱壳和圆锥壳分区数目的增大，壳体的频率计算结果很快收敛，且区域分解法计算的组合壳体频率与 ANSYS 计算结果非常吻合。圆柱壳和圆锥壳分区数目分别取  $N = 4$  和  $N_c = 2$  时，区域分解法计算出周向波数  $n = 0$  对应的前 14 阶频率与 ANSYS 计算结果相比，最大相对误差为 1.26%；而周向波数  $n = 2$  对应的前 8 阶模态结果最大相对误差仅为 1.19%。从计算效率方面来看，区域分解法远远高于传统有限元法，比如分区

数目取  $N = 4$  和  $N_c = 2$  时，区域分解法对应的单个周向波数下组合壳体自由度数目仅为 192，而 ANSYS 对应的自由度数目为 221760，且区域分解法计算时间耗费也远远低于 ANSYS。从而利用区域分解法可以快速分析组合壳体几何尺寸和材料特性等对结构固有频率的影响。

2.2 外部激励下组合壳体的振动响应

以左侧自由-右侧固支组合壳体为例，将其右侧的固支边界视为特殊分区界面，采用区域分解法来分析组合壳体在不同激励下的振动响应。首先在左侧圆锥壳自由端面施加周向轴对称线载荷  $f_{cv} = \bar{f}_{cv} \sin(\omega t + \varphi)$ ，载荷幅值取  $\bar{f}_{cv} = 1000 \text{ N}$ 。两侧圆锥壳和中间圆柱壳分别等距分为  $N_c = 2$  个锥壳段和  $N = 6$  个柱壳段。柱壳段和锥壳段的轴向位移分量 Chebyshev 多项式阶数取  $M = P = 8$ ，各壳段分区界面(包括固支边界条件处)上的权参数取相同值  $\kappa = 1.0 \times 10^{14}$ 。区域分解法及有限元软件 ANSYS 计算出 0~120Hz 频段内组合壳体  $P(x = 22.5, \theta = 0)$  和  $Q(R_c^2 = 2.15, \theta = 0)$  两点的周向位移频率响应曲线，如图 2 所示。壳体周向波数取  $n = 0 \sim 14$ ，频率计算步长取 0.1Hz。

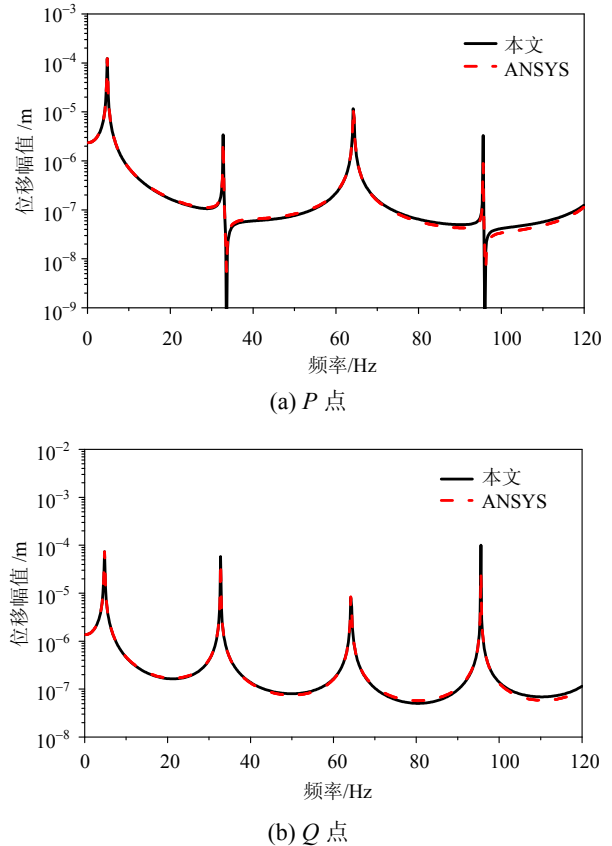
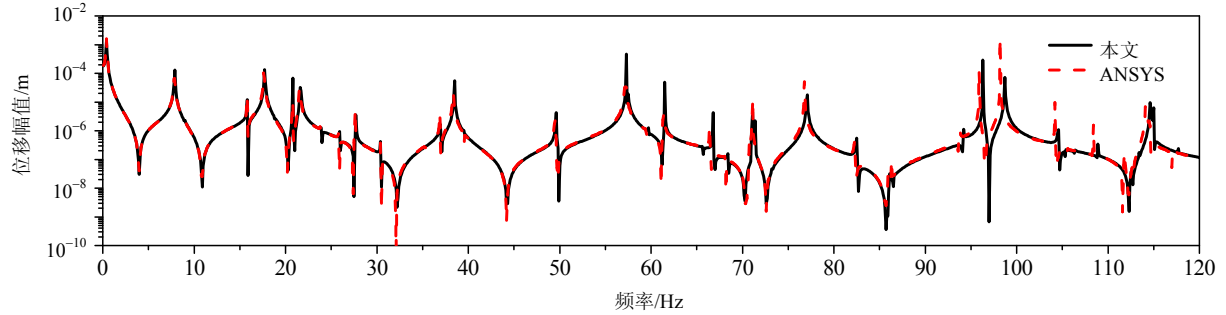


图 2 自由-固支组合壳体周向位移频率响应函数  
Fig.2 Frequency response functions (FRFs) of circumferential displacement for free-clamped joined shell

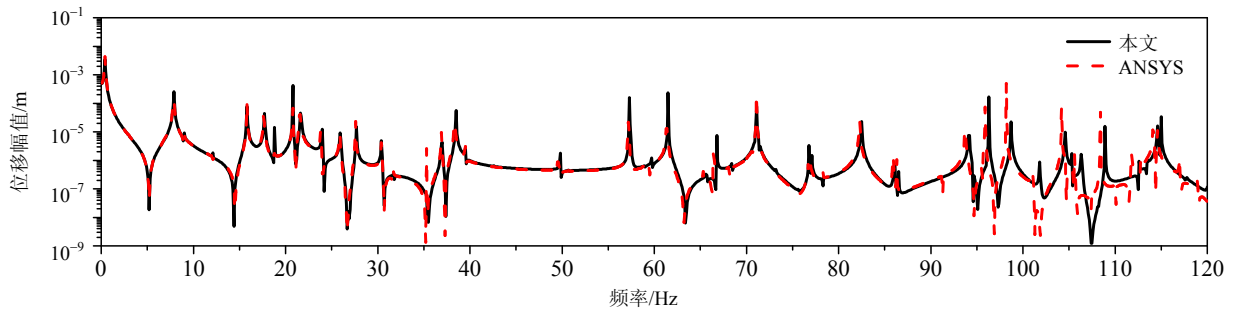
由图 2 可见, 区域分解方法与 ANSYS 所得响应结果在分析频段内非常吻合。在周向轴对称激励下, 组合壳体在 120Hz 内被激发出了 4 阶扭转共振响应, 对应的频率从小到大依次为 4.755Hz、32.781Hz、64.279Hz 及 95.612Hz。

在组合壳体中左侧锥壳  $A$  点 ( $R_c^1 = 0.5, \theta = 0$ )

处沿着母线坐标  $s$  方向对壳体施加集中载荷(如图 1)  $f_{cu} = \bar{f}_{cu} \sin(\omega t + \varphi)$ , 载荷幅值为  $\bar{f}_{cu} = 1000\text{N}$ 。区域分解法及有限元软件 ANSYS 计算出 0~120Hz 频段内组合壳体  $O$  ( $R_c^1 = 2.15, \theta = 0$ ) 和  $P$  两点的母线方向(轴向)及法向位移频响函数, 如图 3 和图 4 所示。组合壳体区域分解计算参数同前。



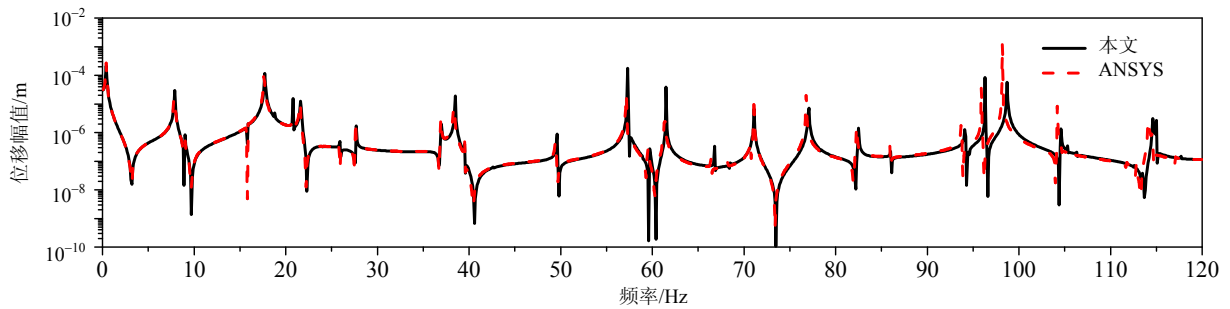
(a) 母线方向位移



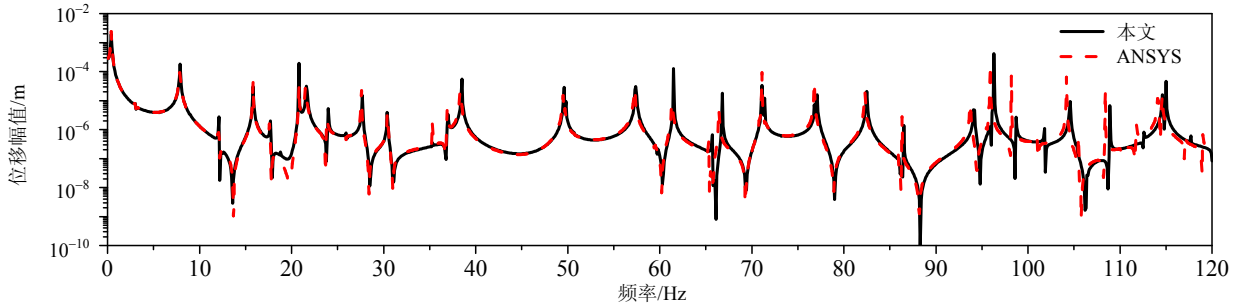
(b) 法向位移

图 3 自由-固支组合壳体  $O$  点位移频率响应函数

Fig.3 FRFs of point  $O$  for free-clamped joined shell



(a) 轴向位移



(b) 法向位移

图 4 自由-固支组合壳体  $P$  点位移频率响应函数

Fig.4 FRFs of point  $P$  for free-clamped joined shell

从图3和图4中可以看出,区域分解法计算出组合壳体在轴向集中载荷作用下的频域响应与ANSYS计算结果非常吻合。在个别频率处两种方法给出的响应峰值略有差别,这是因为计算模型中忽略了阻尼,在共振频率附近,微小的频率差别即可导致响应幅值有很大的变化。由于轴向集中载荷在左侧锥壳端面是非轴对称的,必然对壳体产生弯矩,考虑到整个组合壳体较长则其弯曲刚度较小,因此壳体各点法向也产生较大的位移响应。另外,

轴向位移峰值和法向位移峰值的频率并不完全能对应起来,即能激励起轴向位移共振值的频率并不一定能激励起法向位移峰值。

在左侧锥壳A点对组合壳体施加法向集中载荷(如图1)  $f_{cw} = \bar{f}_{cw} \sin(\omega t + \varphi)$ , 载荷幅值为  $\bar{f}_{cw} = 1000 \text{ N}$ 。区域分解法及有限元软件ANSYS计算出组合壳体Q点的母线方向及法向位移频响函数,如图5所示。组合壳体区域分解计算参数同前。

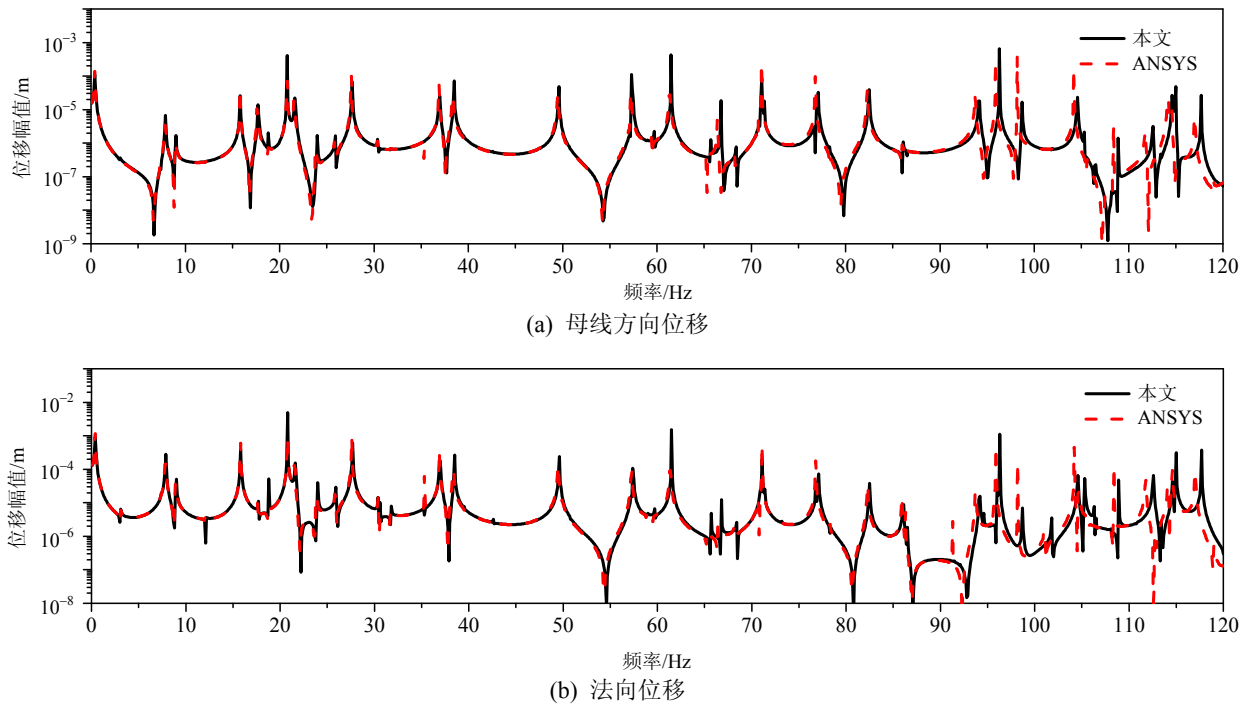


图5 自由-固支组合壳体去Q点位移频率响应函数  
Fig.5 FRFs of point Q for free-clamped joined shell

从图5中可以看出,两种方法计算出组合壳体在法向集中载荷作用下的频域响应结果也是相当吻合的。在高频段,区域分解法和有限元计算结果略有差别,这主要是因为本例中所取得壳体分区数目较少,适当地增加壳体的分区数目可改善高阶振动响应的计算精度。考虑到本例中组合壳体较长,其共振模态在0~120Hz内非常密集(共有600阶),将圆锥壳和圆柱壳分别等距分为  $N_c = 2$  个锥壳段和  $N = 6$  个柱壳段,周向波数取  $n = 0 \sim 14$ ,区域分解法即可得到较高精度的振动响应结果,其对应的自由度数目仅为6960,而有限元对应的自由度数目为221760。在MATLAB程序中形成整个组合壳体的区域分解矩阵并进行求解,单个频率响应的平均计算时间为1.86s(PC 2.4GHz);而ANSYS相应的时间耗费为21.6s。显然,区域分解法计算效率远远

高于有限元法。

在区域分解法中将组合壳体已知位移边界处的界面视为一种特殊的分区界面,按照壳体内部界面分析方法来处理,这样不仅简化了因边界条件限制而难以选取壳段容许函数的问题,而且实践证明这种边界处理方法还非常有利于计算机程式化,通过改变边界控制参数即可快速地分析不同边界条件下壳体的振动特性。

### 3 结论

针对圆锥壳-圆柱壳-圆锥壳组合结构的振动问题,本文提出了一种新的建模与分析方法。首先将组合壳体分解为圆柱壳、圆锥壳子结构,为了能获得组合壳体的高阶振动特性,进一步将圆柱壳、圆锥壳子结构分解为圆柱壳段和圆锥壳段,采用分区



广义变分原理和界面最小二乘加权残值法将壳段分区界面之间的位移协调方程放松并引入到组合结构能量泛函中,使组合结构的动力分析问题,归结为在满足分区界面约束条件下的无约束泛函变分问题。通过计算得出:

(1) 随着圆柱壳和圆锥壳分区数目的增大,壳体的频率计算结果收敛速度很快,且区域分解法计算出的组合壳体频率与 ANSYS 结果非常吻合。

(2) 区域分解法对应的组合壳体自由度数目和求解时间均远低于传统有限元法,其计算效率远远高于有限元法。

(3) 将组合壳体已知位移边界处的界面视为一种特殊的分区界面,按照壳体内部界面分析方法来统一处理,可快速地分析不同边界条件下壳体的振动特性。

#### 参考文献:

- [1] Irie T, Yamada G, Muramoto Y. Free vibration of joined conical-cylindrical shells [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1984, 95(1): 31—39.
- [2] Efraim E, Eisenberger M. Exact vibration frequencies of segmented axisymmetric shells [J]. *Thin-Walled Structures*, 2006, 44(3): 281—289.
- [3] Caresta M, Kessissoglou N J. Free vibrational characteristics of isotropic coupled cylindrical-conical shells [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2010, 329(6): 733—751.
- [4] Galletly G D, Mistry J. The free vibrations of cylindrical shells with various end closures [J]. *Nuclear Engineering and Design*, 1974, 30(2): 249—268.
- [5] Patel B P, Ganapathi M, Kamat S. Free vibration characteristics of laminated composite joined conical-cylindrical shells [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, 237(5): 920—930.
- [6] Leissa A W. *Vibration of shells (NASA SP-288)* [R]. Washington, DC: U.S. Government Printing Office, 1973.
- [7] Dupire G, Boufflet J P, Dambrine M, Villon P. On the necessity of Nitsche term [J]. *Applied Numerical Mathematics*, 2010, 60(9): 888—902.
- [8] Jafari A A, Bagheri M. Free vibration of non-uniformly ring stiffened cylindrical shells using analytical, experimental and numerical methods [J]. *Thin-Walled Structures*, 2006, 44(1): 82—90.
- [9] Yim J S, Sohn D S, Lee Y S. Free vibration of clamped-free circular cylindrical shell with a plate attached at an arbitrary axial position [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, 213(1): 75—88.
- [10] Zhou D, Cheung Y K, Lo S H, Au F T K. 3D vibration analysis of solid and hollow circular cylinders via Chebyshev-Ritz method [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2003, 192(13/14): 1575—1589.
- [11] Pellicano F. Vibrations of circular cylindrical shells: Theory and experiments [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, 303(1/2): 154—170.
- [12] Kurylov Ye, Amabili M. Polynomial versus trigonometric expansions for nonlinear vibrations of circular cylindrical shells with different boundary conditions [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2010, 329(9): 1435—1449.