文章编号: 1000-5641(2012)04-0036-07

Ricci 流下薛定谔方程的 Harnack 估计

王建红[1,2]

(1. 黄山学院 数学系, 黄山 245041; 2. 华东师范大学 数学系, 上海 200241)

摘要: 利用 C. M. Guenther 处理热方程的方法证明了, 度量沿 Ricci 流演化的闭流形上薛定谔方程正解的梯度估计和 Harnack 不等式, 从而推广了有关结论.

关键词: 薛定谔方程; 梯度估计; Harnack 不等式; Ricci 流

中图分类号: O186.16 **文献标识码:** A **DOI:** 10.3969/j.issn.1000-5641.2012.04.005

Harnack estimate for the Schrödinger equation under Ricci flow

WANG Jian-hong[1,2]

(1. *Department of Mathematics, Huangshan University, Anhui* 245041, *China;*
2. *Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai* 200241, *China*)

Abstract: This paper established the gradient estimate and Harnack inequalities of the Schrödinger equation when the metric is evolved by Ricci flow, and extended the results of the heat equation by C. M. Guenther.

Key words: Schrödinger equation; gradient estimate; Harnack inequality; Ricci flow

0 引 言

1975 年, Yau 提出了广泛应用于几何分析中的梯度估计. 它在研究方程解的性质中起了极其重要的作用[1]. 梯度估计一般只适合于某些椭圆方程和抛物方程, 重要的有热方程和调和方程的梯度估计. 考虑度量固定黎曼流形上方程(正)解的梯度估计, 已有许多重要的研究成果. 具体见文献 [1-3], 这些理论对几何分析具有深远的影响.

后来, Hamilton 利用梯度估计的方法研究一般的几何发展方程, 成为研究几何流的一个重要技巧. 特别是证明了黎曼流形上 Ricci 流的 Harnack 估计[4], 在奇性分析方面应用极其广泛. 对于曲面的情形, Hamilton 证明了数量曲率大于零时, 关于数量曲率的 Harnack 估计; 而 B. Chow 证明了数量曲率可正可负的情形, 分别见文献 [5,6].

对于其他几何流, Hamilton 证明了平均曲率流的 Harnack 估计[7]; B. Chow 在文献 [8,9] 中分别证明了高斯曲率流和 Yamabe 流的 Harnack 估计; H. D. Cao 证明了 Kahler-Ricci 流的 Harnack 估计[10].

收稿日期: 2011-06

基金项目: 国家自然科学基金 (10871069); 黄山学院自然科学研究项目 (2011XKJ013)

作者简介: 王建红, 女, 助教, 硕士, 研究方向为几何分析. E-mail: linrui1986@yahoo.com.cn.

本文考虑的是度量随 Ricci 流演化情形下, 薛定谔方程正解的梯度估计和 Harnack 不等式. Ricci 流是 1982 年 Hamilton 提出的[11], 它是度量的一个发展方程, 即 $\partial_t g = -2Rc$, 其中 g 是黎曼度量, Rc 指 Rc 曲率. 这是一个退化的抛物方程, 但在短时间内解是存在且唯一的.

Cao-Hamilton 证明了一种特殊薛定谔方程的 Harnack 估计[12], 即

定理 A 设 $(M^n, g(t)), t \in [0, T)$ 是闭流形上 Ricci 流的解, 且曲率算子非负, f 是方程 $\partial_t f = \Delta f + Rf$ 的正解, 令 $u = -\log f$, 则有

$$2\Delta u - |\nabla u|^2 - 3R - 2\frac{n}{t} \leqslant 0, \forall t \in (0, T). \tag{0.1}$$

特别的, 当流形是闭曲面时, 设 f 是方程 $\partial_t f = \Delta f + Rf$ 的正解, 若 $R > 0$, 则有

$$\partial_t \log f - |\nabla \log f|^2 + \frac{1}{t} = \Delta \log f + R + \frac{1}{t} \geqslant 0.$$

由于闭曲面上数量曲率的发展方程为 $\frac{\partial R}{\partial t} = \Delta R + R^2$, 所以 $f = R > 0$ 满足方程, 因此 $\partial_t \log R - |\nabla \log R|^2 + \frac{1}{t} = \Delta \log R + R + \frac{1}{t} \geqslant 0$. 由此结论可得初始数量曲率为正的闭曲面在规范化的 Ricci 流下收敛到一个常正曲率曲面.

本文设 $(M^n, g(t)), t \in [0, T)$ 是闭流形上 Ricci 流的解, 令 u 是薛定谔方程的正解, 即

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2R_{ij}, \\ \big(\Delta_{g(t)} - \partial_t - q(x)\big)u(x,t) = 0, \end{cases} \tag{0.2}$$

其中 $q(x) \in C^2(M)$. 由于流形是闭的, 所以 $q(x)$ 有界. 不妨设 $q(x) \leqslant \gamma$ (γ 是非负常数).

本文利用文献 [13] 中处理 Ricci 流下热方程 Harnack 估计的方法得出了如下的梯度估计和 Harnack 不等式.

定理 0.1 令 $(M^n, g(t))$ 是闭的 n 维黎曼流形, $g(t)$ 满足 $\frac{\partial}{\partial t} g = -2Rc, t \in [0, T]$, 假设 $|Rc| \leqslant k, |\nabla R| \leqslant k_1$, Rc, R 分别指 Rc 曲率和数量曲率. 设 u 是 $(\Delta - \partial_t - q)u = 0, (x,t) \in M \times [0, T]$ 正解,其中 $q(x) \in C^2(M), q(x) \leqslant \gamma, \Delta q(x) \leqslant \theta, \gamma, \theta, k, k_1$均是非负常数. 令 $f = \log u$, 则存在 $\widetilde{T} = \min\{T, \frac{3}{2k+k_1}\}$, 使得下式成立.

$$C_1|\nabla f|^2 - f_t \leqslant \frac{n}{2t} + C_2(1+t),\ \ \forall\, t \in (0, \widetilde{T}], \tag{0.3}$$

其中 C_1, C_2 是依赖于 $k, k_1, T, \gamma, \theta, n$ 的非负常数.

大多数文献中都是考虑度量固定的黎曼流形上一些抛物方程或椭圆方程正解的梯度估计, 而此定理给出了度量沿 Ricci 流演化的闭流形上薛定谔方程正解的一种比较简洁的梯度估计. 薛定谔方程在量子力学中有很重要的应用背景, 可以说是黎曼几何和量子力学的一个结合点, 而 Ricci 流是几何分析中一个重要的度量演化方程, 因此, 考虑 Ricci 流下薛定谔方程正解的梯度估计更加有力的说明了几何和方程是密不可分的. 并且此定理推广了文献 [13] 中关于热方程的结论.

将此梯度估计沿着一条时空路径积分, 则得方程 (0.2) 正解的 Harnack 不等式, 即比较解在不同时空点的大小关系.

定理 0.2 设 $(M^n, g(t)), t \in [0, T)$ 是闭流形上 Ricci 流的解, 所满足的条件和定理 0.1 一样. 则

$$u(x,t_1) \leqslant u(y,t_2)\Big(\frac{t_2}{t_1}\Big)^{\frac{n}{2}} \exp\Big\{\int_{t_1}^{t_2} \frac{|\dot{\gamma_{(t)}}|^2_{g(t)}}{4C_1}\mathrm{d}t + C_2(t_2 - t_1) + \frac{C_2}{2}(t_2^2 - t_1^2)\Big\}.$$

$\forall x,y\in M^n, 0<t_1<t_2\leqslant \widetilde{T}=\min\{T,\frac{3}{2k+k_1}\}, C_1, C_2$ 是依赖于 k,k_1,γ,θ,n,T的非负常数.

1 证明定理

引理 1.1 设 $(M^n,g(t))$ 是 n 维闭流形, 且 $|Rc|\leqslant k, |\nabla R|\leqslant k_1$, Rc, R 分别指 Rc 曲率和数量曲率. 设 u 是方程 (0.2) 正解,其中 $q(x)\in C^2(M), q(x)\leqslant\gamma, \Delta q(x)\leqslant\theta, \gamma,\theta,k,k_1$均是非负常数. 令 $F=|\nabla f|^2-f_t-q-B(t,f_t)-\frac{1+\partial_Y B}{2}R$, 其中 $B(t,f_t)$ 是待定函数, 且 $B(t,Y)$ 关于 Y 是线性的,则

$$\begin{aligned}LF\geqslant&\frac{2}{n}(F+B)^2-(2k+k_1)(1+\partial_Y B)|\nabla f|^2+\partial_t B-\frac{k^2(1+\partial_Y B)^2}{2}\\&-(1+\partial_Y B)k_1-\theta+\frac{R}{2}\partial_t\partial_Y B.\end{aligned}$$

证 明 令 $f=\log u$, 则有 $f_t=\Delta f+|\nabla f|^2-q(x)$. 定义算子 $L=\Delta+2\nabla f\nabla-\partial_t$, 则由 Bachlar 公式可得

$$\begin{aligned}L|\nabla f|^2&=\Delta|\nabla f|^2+2\nabla f\nabla|\nabla f|^2-\partial_t|\nabla f|^2\\&=2Rc(\nabla f,\nabla f)+2|\nabla\nabla f|^2+2\langle\nabla\Delta f,\nabla f\rangle+2\nabla f\nabla|\nabla f|^2\\&\quad-2Rc(\nabla f,\nabla f)-2\langle\nabla f,\nabla f_t\rangle\\&=2|\nabla\nabla f|^2+2\langle\nabla f,\nabla(\Delta f+|\nabla f|^2-f_t)\rangle\\&=2|\nabla\nabla f|^2+2\langle\nabla f,\nabla q\rangle.\end{aligned}\tag{1.1}$$

由 $\Delta f_t=\partial_t(\Delta f)-2\langle Rc,\nabla\nabla f\rangle$ 可得

$$\begin{aligned}Lf_t&=\Delta f_t+2\nabla f\nabla f_t-\partial_t f_t\\&=\partial_t(\Delta f)-2\langle Rc,\nabla\nabla f\rangle+2\nabla f\nabla f_t-\partial_t f_t\\&=\partial_t(\Delta f-f_t)-2\langle Rc,\nabla\nabla f\rangle+2\nabla f\nabla f_t\\&=\partial_t(-|\nabla f|^2+q)-2\langle Rc,\nabla\nabla f\rangle+2\nabla f\nabla f_t\\&=-2Rc(\nabla f,\nabla f)-2\langle\nabla f,\nabla f_t\rangle-2\langle Rc,\nabla\nabla f\rangle\\&\quad+2\nabla f\nabla f_t=-2Rc(\nabla f,\nabla f)-2\langle Rc,\nabla\nabla f\rangle.\end{aligned}\tag{1.2}$$

由于 $F=|\nabla f|^2-f_t-q-B(t,f_t)-\frac{1+\partial_Y B}{2}R$, $B(t,f_t)$ 是待定函数, 且 $q(x)$ 与 t 无关, 所以

$$\begin{aligned}Lq&=\Delta q+2\nabla f\nabla q, LB(t,f_t)=\partial_Y^2 B|\nabla f_t|^2+\partial_Y BLf_t-\partial_t B.\\LB(t,f_t)&=\partial_Y BLf_t-\partial_t B=\partial_Y B\big(-2Rc(\nabla f,\nabla f)-2\langle Rc,\nabla\nabla f\rangle\big)-\partial_t B.\qquad(1.3)\\L(\partial_Y BR)&=\Delta(\partial_Y BR)+2\nabla f\nabla(\partial_Y BR)-\partial_t(\partial_Y BR)\\&=(\Delta\partial_Y B)R+\partial_Y B\Delta R+2\nabla\partial_Y B\nabla R+2\nabla f\big((\nabla\partial_Y B)R+\partial_Y B\nabla R\big)\\&\quad-(\partial_t\partial_Y B)R-\partial_Y B\partial_t R.\end{aligned}$$

由于 $B(t,Y)$ 关于 Y 是线性函数, 所以

$$L(\partial_Y BR)=\partial_Y B\Delta R+2\partial_Y B\nabla f\nabla R-(\partial_t\partial_Y B)R-\partial_Y B\partial_t R.$$

因为在 Ricci 流下 $\partial_t R=\Delta R+2|Rc|^2$, 所以

$$L(\partial_Y BR)=2\partial_Y B\nabla f\nabla R-(\partial_t\partial_Y B)R-2\partial_Y B|Rc|^2, \tag{1.4}$$

$$L(R)=\Delta R+2\nabla f\nabla R-\partial_t R=\Delta R+2\nabla f\nabla R-\Delta R-2|Rc|^2=2\nabla f\nabla R-2|Rc|^2. \tag{1.5}$$

综合式 (1.1)—(1.5), 可得

$$\begin{aligned}LF&=L|\nabla f|^2-Lf_t-Lq-\frac{1}{2}LR-\frac{1}{2}L(\partial_Y BR)-LB(t,f_t)\\&=2|\nabla\nabla f|^2+2\langle\nabla f,\nabla q\rangle+2Rc(\nabla f,\nabla f)+2\langle Rc,\nabla\nabla f\rangle\\&\quad-2\langle\nabla f,\nabla q\rangle-\Delta q-\langle\nabla f,\nabla R\rangle+|Rc|^2\\&\quad-\frac{1}{2}\big(2\partial_Y B\nabla f\nabla R-(\partial_t\partial_Y B)R-2\partial_Y B|Rc|^2\big)\\&\quad+2\partial_Y BRc(\nabla f,\nabla f)+2\partial_Y B\langle Rc,\nabla\nabla f\rangle+\partial_t B\\&=2|\nabla\nabla f|^2+2(1+\partial_Y B)Rc(\nabla f,\nabla f)+2(1+\partial_Y B)\langle Rc,\nabla\nabla f\rangle\\&\quad+(1+\partial_Y B)|Rc|^2-(1+\partial_Y B)\nabla f\nabla R+\frac{R}{2}\partial_t\partial_Y B-\Delta q+\partial_t B.\end{aligned}$$

若 $\partial_Y B\geqslant 0,\Delta q\leqslant\theta,|\nabla R|\leqslant k_1,Rc\geqslant -k$, 则 $\nabla f\nabla R\leqslant k_1|\nabla f|\leqslant k_1+k_1|\nabla f|^2$. 所以,

$$\begin{aligned}LF&=2|\nabla\nabla f+\frac{1+\partial_Y B}{2}Rc|^2-\frac{(1+\partial_Y B)^2}{2}|Rc|^2+2(1+\partial_Y B)Rc(\nabla f,\nabla f)\\&\quad+(1+\partial_Y B)|Rc|^2-(1+\partial_Y B)\nabla f\nabla R+\frac{R}{2}\partial_t\partial_Y B-\Delta q+\partial_t B\\&\geqslant 2|\nabla\nabla f+\frac{1+\partial_Y B}{2}Rc|^2-\frac{(1+\partial_Y B)^2}{2}|Rc|^2-2k(1+\partial_Y B)|\nabla f|^2\\&\quad+(1+\partial_Y B)|Rc|^2-k_1(1+\partial_Y B)-k_1(1+\partial_Y B)|\nabla f|^2+\frac{R}{2}\partial_t\partial_Y B-\theta+\partial_t B.\end{aligned}$$

因为 $|Rc|\leqslant k$, 则 $|Rc|^2\geq\frac{R^2}{n}$, 所以有 $|R|\leqslant nk$.
又因为 $|\nabla\nabla f+\frac{1+\partial_Y B}{2}Rc|^2\geqslant\frac{1}{n}(\Delta f+\frac{1+\partial_Y B}{2}R)^2,(1+\partial_Y B)^2|Rc|^2\leqslant(1+\partial_Y B)^2k^2$, 所以

$$\begin{aligned}LF&\geqslant\frac{2}{n}\Big(\Delta f+\frac{1+\partial_Y B}{2}R\Big)^2-\frac{k^2(1+\partial_Y B)^2}{2}-(2k+k_1)(1+\partial_Y B)|\nabla f|^2\\&\quad+\partial_t B-(1+\partial_Y B)k_1+\frac{R}{2}\partial_t\partial_Y B-\theta\\&=\frac{2}{n}\Big(|\nabla f|^2-f_t-q-\frac{1+\partial_Y B}{2}R\Big)^2-\frac{k^2(1+\partial_Y B)^2}{2}+\partial_t B\\&\quad-(2k+k_1)(1+\partial_Y B)|\nabla f|^2-(1+\partial_Y B)k_1+\frac{R}{2}\partial_t\partial_Y B-\theta\\&=\frac{2}{n}(F+B)^2-(2k+k_1)(1+\partial_Y B)|\nabla f|^2+\partial_t B-\frac{k^2(1+\partial_Y B)^2}{2}\\&\quad-(1+\partial_Y B)k_1-\theta+\frac{R}{2}\partial_t\partial_Y B.\end{aligned}$$

引理 1.2　设 $(M^n,g(t))$ 是 n 维闭流形, 且 $|Rc|\leqslant k,|\nabla R|\leqslant k_1$, Rc,R 分别指 Rc 曲率和数量曲率. 设 u 是方程 (0.2) 正解,其中 $q(x)\in C^2(M),q(x)\leqslant\gamma,\Delta q(x)\leqslant\theta,\gamma,\theta,k,k_1$均是非负常数. 令 $G=tF$, F 是如上引理所定义的. 则

$$\Delta G+2\nabla f\nabla G-\partial_t G\geqslant\frac{G}{t}.$$

证　明　令 $C(t,Y)$ 是方程

$$\begin{cases} \partial_t C+\frac{2}{n}C^2-2k_2(Y+C+k_3)=0, \\ C(0)=\infty, \end{cases} \tag{1.6}$$

的解, 其中 k_2,k_3 是待定的非负常数. 易知, 当 $Y>-\frac{n}{4}k_2-k_3$ 时, 此方程的解为

$$C(t,Y)=\frac{nk_2}{2}+\frac{nb(t,Y)}{4t}\coth\frac{b(t,Y)}{2},$$

其中 $b(t,Y)=\frac{4t}{n}\sqrt{nk_2}\sqrt{Y+\frac{nk_2}{4}+k_3}$. 经计算可得

$$\lim_{Y\to-\frac{nk_2}{4}-k_3}C(t,Y)=\frac{n}{2}k_2+\frac{n}{2t},\ \lim_{Y\to-\frac{nk_2}{4}-k_3}\partial_Y C(t,Y)=\frac{2}{3}k_2 t,\ \lim_{Y\to\infty}\partial_Y C(t,Y)=0.$$

且 $C(t,Y)$ 关于 Y 在 $(-\frac{nk_2}{4}-k_3,+\infty)$ 是凹函数. 对于固定的 $Y>-\frac{n}{4}k_2-k_3$,

$$\partial_t\partial_Y C(t,Y)=\frac{4K_2[(b-2)e^b+(b+2)]}{(e^b-1)^3}>0(b>0),$$

$$\lim_{t\to 0}\partial_t\partial_Y C(t,Y)=\lim_{b\to 0}\partial_t\partial_Y C(t,Y)=\frac{2}{3}k_2,\ \lim_{t\to\infty}\partial_t\partial_Y C(t,Y)=\lim_{t\to\infty}\partial_t\partial_Y C(t,Y)=0.$$

且 $\partial_t\partial_Y C(t,Y)$ 关于 t 是递减的, 故当 $Y>-\frac{n}{4}k_2-k_3$, 有$0\leqslant\partial_t\partial_Y C(t,Y)\leqslant\lim\limits_{t\to 0}\partial_t\partial_Y C(t,Y)=\frac{2}{3}k_2$. 对固定的 $Y_0>-\frac{n}{4}k_2-k_3$, 令 $B(t,Y)=\partial_Y C(t,Y_0)(Y-Y_0)+C(t,Y_0)$. 则 $B(t,Y)$ 为线性函数. 且

$$0\leqslant\partial_Y B(t,Y)=\partial_Y C(t,Y_0)\leqslant\frac{2}{3}k_2 t\leqslant\frac{2}{3}k_2 T.\ \ 0\leqslant\partial_t\partial_Y B(t,Y)=\partial_t\partial_Y C(t,Y_0)\leqslant\frac{2}{3}k_2.$$

由于 $|R|\leqslant nk, 0\leqslant\partial_t\partial_Y B(t,Y)\leqslant\frac{2}{3}k_2$, 所以 $\frac{R}{2}\partial_t\partial_Y B(t,Y)\geqslant-\frac{nk}{2}\times\frac{2}{3}k_2=-\frac{n}{3}kk_2\geqslant-nkk_2$. 因此

$$\begin{aligned}
LF\geqslant&\frac{2}{n}(F+B)^2-(2k+k_1)\Big(1+\frac{2}{3}k_2T\Big)|\nabla f|^2+\partial_t B-nkk_2\\
&-\frac{(1+\frac{2}{3}k_2T)^2}{2}k^2-\Big(1+\frac{2}{3}k_2T\Big)k_1-\theta\\
=&\frac{2}{n}(F+B)^2-(2k+k_1)\Big(1+\frac{2}{3}k_2T\Big)\Big(F+f_t+q+B(t,f_t)+\frac{1+\partial_Y B}{2}R\Big)\\
&+\partial_t B-nkk_2-\frac{(1+\frac{2}{3}k_2T)^2}{2}k^2-\Big(1+\frac{2}{3}k_2T\Big)k_1-\theta\\
\geqslant&\frac{2}{n}(F+B)^2-(2k+k_1)\Big(1+\frac{2}{3}k_2T\Big)\Big(F+f_t+\gamma+B+\frac{1+\frac{2}{3}k_2T}{2}nk\Big)\\
&+\partial_t B-nkk_2-\frac{(1+\frac{2}{3}k_2T)^2}{2}k^2-\Big(1+\frac{2}{3}k_2T\Big)k_1-\theta.
\end{aligned}$$

令 $2k_2\geqslant(2k+k_1)(1+\frac{2}{3}k_2T)$, 要保证 $k_2>0$, 必须 $T<\frac{3}{2k+k_1}$, 则有

$$\begin{aligned}
LF\geqslant&\frac{2}{n}(F+B)^2-2k_2\Big(F+f_t+B+\gamma+\frac{1+\frac{2}{3}k_2T}{2}nk\Big)\\
&+\partial_t B-nkk_2-\frac{(1+\frac{2}{3}k_2T)^2}{2}k^2-\Big(1+\frac{2}{3}k_2T\Big)k_1-\theta.
\end{aligned}$$

令 $k_3=\gamma+\frac{1+\frac{2}{3}k_2T}{2}nk+\frac{nk}{2}+\frac{(1+\frac{2}{3}k_2T)^2}{4k_2}k^2+\frac{(1+\frac{2}{3}k_2T)}{2k_2}k_1+\frac{\theta}{2k_2}>0$, 则有

$$\begin{aligned}LF&\geqslant\frac{2}{n}(F+B)^2-2k_2(F+f_t+B+k_3)+\partial_tB\\&=\frac{2}{n}F^2+\Big(\frac{4}{n}B-2k_2\Big)F+\partial_tB+\frac{2}{n}B^2-2k_2(f_t+B+k_3).\end{aligned}$$

将 $B(t,Y)=\partial_YC(t,Y_0)(Y-Y_0)+C(t,Y_0)$ 代入. 由于

$$\begin{aligned}\partial_tB&=\partial_t\partial_YC(t,Y_0)(Y-Y_0)+\partial_tC(t,Y_0).\\\frac{2}{n}B^2&=\frac{2}{n}\big(\partial_YC(t,Y_0)(Y-Y_0)+C(t,Y_0)\big)^2\\&=\frac{2}{n}\big(\partial_YC(t,Y_0)(Y-Y_0)\big)^2+\frac{4}{n}C(t,Y_0)\partial_YC(t,Y_0)(Y-Y_0)+\frac{2}{n}(C(t,Y_0))^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2k_2\big(Y+k_3+B(t,Y)\big)&=2k_2\big(Y-Y_0+Y_0+k_3+B(t,Y)\big)\\&=2k_2\big(Y_0+k_3+C(t,Y)\big)+2k_2(Y-Y_0)(1+\partial_YC(t,Y_0)).\end{aligned}$$

将方程 (1.6) 对 Y 求导可得 $\partial_t\partial_YC+\frac{4}{n}C\partial_YC-2k_2(1+\partial_YC)=0$.

结合式 (1.6) 有 $\partial_tB+\frac{2}{n}B^2-2k_1(f_t+B+k_3)=\frac{2}{n}\big(\partial_YC(t,Y_0)(f_t-Y_0)\big)^2$, 所以

$$LF\geqslant\frac{2}{n}[F+\partial_YC(t,Y_0)(f_t-Y_0)]^2+\Big[\frac{4}{n}C(t,Y_0)-2k_2\Big]F.$$

令 $G=tF$, 则

$$\begin{aligned}LG=-F+tLF&=\frac{2t}{n}[F+\partial_YC(t,Y_0)(f_t-Y_0)]^2+\Big[\frac{4}{n}C(t,Y_0)-2k_2-\frac{1}{t}\Big]G\\&\geqslant\Big(\frac{4}{n}C(t,Y_0)-2k_2-\frac{1}{t}\Big)G.\end{aligned}$$

利用不等式 $b+\frac{2b}{e^b-1}\geqslant 2,(b>0)$ 可得, $LG\geqslant\frac{G}{t}$. 即

$$\Delta G+2\nabla f\nabla G-\partial_tG\geqslant\frac{G}{t}.\tag{1.7}$$

基于以上两个引理, 证明定理 0.1.

证　明　证明定理 0.1, 只需证明 $G\leqslant 0$ 即可. 利用闭流形上极大值原理, 假设 $(x_0,t_0)\in M^n\times[0,T]$ 是 G 的最大值点且 $G(x_0,t_0)>0$, 由极大值原理可知, 在 (x_0,t_0) 处有 $\Delta G\leqslant 0,\nabla G=0$, 代入(1.7), 则在 (x_0,t_0) 处有

$$0\geqslant\Delta G+2\nabla f\nabla G\geqslant\frac{G(x_0,t_0)}{t}+\partial_tG(x_0,t_0)\geqslant\partial_tG(x_0,t_0).$$

因为 $t=0$ 时, $G=0$, 所以在 (x_0,t_0) 处, $\partial_tG>0$, 这与 $\partial_tG\leqslant 0$矛盾! 所以 $G(x_0,t_0)\leqslant 0$. 即 $G(x,t)\leqslant 0,\forall\,(x,t)\in M^n\times[0,\widetilde{T}],\widetilde{T}=\min\{T,\frac{3}{2k+k_1}\}$. 因此 $F(x,t)\leqslant 0$, $\forall\,(x,t)\in M^n\times[0,\widetilde{T}]$. 由 F 的定义可得 $|\nabla f|^2-f_t-q-B(t,f_t)-\frac{1+\partial_YB}{2}R\leqslant 0$.

$$\begin{aligned}|\nabla f|^2-f_t&\leqslant q+\frac{1+\partial_YB}{2}R+B(t,f_t)\\&\leqslant\gamma+\frac{1+\frac{2}{3}k_2t}{2}nk+\inf_{Y_0>-\frac{nk_2}{4}-k_3}\big(\partial_YC(t,Y_0)(f_t-Y_0)+C(t,Y_0)\big).\end{aligned}$$

令 $Y_0 \to -\frac{nk_2}{4} - k_3$, 则

$$|\nabla f|^2 - \Big(1 + \frac{2}{3}k_2 T\Big) f_t \leqslant \frac{n}{2t} + \frac{n}{2}k_2 + \frac{2}{3}k_2 T\Big(\frac{nk_2}{4} + k_3\Big) + \frac{nk}{2} + \frac{nk_2 k}{3}t + \gamma.$$

令 $C = 1 + \frac{2}{3}k_2 T > 1$, $C_2 = \max\{\frac{nkk_2}{3}, \frac{2}{3}k_2 T(\frac{nk_2}{4} + k_3) + \frac{nk}{2} + \frac{n}{2}k_2 + \gamma\}$, 则 $|\nabla f|^2 - Cf_t \leqslant \frac{n}{2t} + C_2(1+t)$, $t \in (0, \widetilde{T}]$, $\widetilde{T} = \min\{T, \frac{3}{2k+k_1}\}$. 因为 $C > 1$, 所以 $\frac{1}{C}|\nabla f|^2 - f_t \leqslant \frac{n}{2t} + C_2(1+t)$. 令 $\frac{1}{C} = C_1$, 则 $C_1|\nabla f|^2 - f_t \leqslant \frac{n}{2t} + C_2(1+t)$.

推论 1.3 设 $(M^n, g(t)), t \in [0,T]$ 是闭流形上 Ricci 流的解, $|Rc| \leqslant k$, $|\nabla R| \leqslant k_1$, k, k_1 均是非负常数. $u(x,t)$ 是 $(\Delta - \partial_t)u(x,t) = 0$, $\forall\,(x,t) \in M^n \times [0,T]$ 的正解, 令 $f = \log u$, 则

$$\frac{1}{1+nk_1}|\nabla f|^2 - f_t \leqslant \frac{n}{2t} + C_1(n,k,k_1) + \frac{nkk_1}{3}t,\ \ \forall\, t \in (0, \widetilde{T}].\ \widetilde{T} = \min\Big\{T, \frac{3}{2k+k_1}\Big\}.$$

证　明 由于此时 $q(x) = 0$, 重复前面的过程即可得此推论.

下面证明定理 0.2.

证　明 令 $\gamma(t): [t_1, t_2] \longrightarrow M^n$ 是连接 $\gamma(t_1) = x$, $\gamma(t_2) = y$ 的测地线, 则

$$\begin{aligned} f(y,t_2) - f(x,t_1) &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\gamma_{(t)})\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} (\langle \nabla f, \dot{\gamma_{(t)}}\rangle + f_t)\mathrm{d}t \\ &\geqslant \int_{t_1}^{t_2} \{-|\nabla f||\dot{\gamma_{(t)}}|_{g(t)} + C_1|\nabla f|^2 - \frac{n}{2t} - C_2(1+t)\}\mathrm{d}t \\ &\geqslant \int_{t_1}^{t_2} -\frac{|\dot{\gamma_{(t)}}|^2_{g(t)}}{4C_1}\mathrm{d}t - \frac{n}{2}\ln\frac{t_2}{t_1} - C_2(t_2 - t_1) - \frac{C_2}{2}(t_2^2 - t_1^2). \end{aligned}$$

所以 $\log\frac{u(y,t_2)}{u(x,t_1)} \geqslant \int_{t_1}^{t_2} -\frac{|\dot{\gamma_{(t)}}|^2_{g(t)}}{4C_1}\mathrm{d}t - \frac{n}{2}\ln\frac{t_2}{t_1} - C_2(t_2 - t_1) - \frac{C_2}{2}(t_2^2 - t_1^2)$. 即

$$u(x,t_1) \leqslant u(y,t_2)\Big(\frac{t_2}{t_1}\Big)^{\frac{n}{2}} \exp\Big\{\int_{t_1}^{t_2} \frac{|\dot{\gamma_{(t)}}|^2_{g(t)}}{4C_1}\mathrm{d}t + C_2(t_2 - t_1) + \frac{C_2}{2}(t_2^2 - t_1^2)\Big\}.$$

[参　考　文　献]

[1] CHENG S Y, YAU S T. Differential equations on Riemannian manifold and their applications[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1975, 28(3): 333-354.

[2] HAMILTION R S. A matrix Harnack estimate for the heat equation[J]. Comm Anal Geom, 1993, 1(1): 113-126.

[3] LI P, YAU S T. On the parabolic kernel of the Schrodinger operator[J]. Acta Math, 1986, 156(3-4): 153-201.

[4] HAMILTION R S. The Harnack estimate for the Ricci flow[J]. J Differential Geometry, 1993, 37(1): 225-243.

[5] HAMILTION R S. The Ricci flow on surfaces[J]. Mathematics and General Relativity, 1988, 71(1): 237-262.

[6] CHOW B. The Ricci flow on the 2-sphere[J]. J Differential Geometry, 1991, 33(2): 325-334.

[7] HAMILTION R S. Harnack estimate for the mean curvature flow[J]. J Differential Geometry, 1995, 41(1): 215-226.

[8] CHOW B. On Harnack's inequality and entropy for the Gaussian curvature flow[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1991, 44(4): 469-483.

[9] CHOW B. The Yamabe flow on locally conformally flat manifolds with positive Ricci curvature[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1992, 45(8): 1003-1014.

[10] CAO H D. On Harnack inequalities for the Kahler-Ricci flow[J]. Inventiones Mathematics, 1992, 109(2): 247-263.

[11] HAMILTION R S. Three-manifolds with positive Ricci curvature[J]. J Differential Geometry, 1982, 17(2): 255-306.

[12] CAO X D, HAMILTION R S. Differential Harnack estimates for time-dependent heat equation with potentials[J/OL]. arXiv.org/math.DG/0807.0568v1, 2008.

[13] GUENTHE C M. The fundamental solution on manifolds with time-dependent metrics[J]. Journal of Geometric Analysis, 2002, 12(3): 425-436.