文章编号: 1000-5641(2013)05-0130-06

算子的亚循环性与拓扑一致降标

刘 洋, 曹小红

(陕西师范大学 数学与信息科学学院, 西安 710062)

摘要: 利用算子的拓扑一致降标, 给出了算子 $A\in\overline{HC(H)}$ 的判定方法, 其中 $\overline{HC(H)}$ 表示无限维可分的复 Hilbert 空间 H 上所有亚循环算子集合的范数闭包.

关键词: 亚循环算子; 拓扑一致降标; 算子的单值延拓性质

中图分类号: O177.2 **文献标识码**: A **DOI**: 10.3969/j.issn.1000-5641.2013.05.016

Hypercyclicity and topological uniform descent of bounded linear operators

LIU Yang, CAO Xiao-hong

(*Department of Mathematics and Information Science*, *Shaanxi Normal University*, *Xi'an* 710062, *China*)

Abstract: By using the property of topological uniform descent, this paper gave the judgement for an operator $A\in\overline{HC(H)}$, where $\overline{HC(H)}$ denoting the norm-closure of the class of all the hypercyclic operators on an infinite dimensional separable complex Hilbert space H.

Key words: hypercyclic operator; topological uniform descent; single valued extension property

0 引 言

在本文中, H 表示一个无限维可分的复Hilbert空间, $B(H)$ 为 H 上的有界线性算子的全体, $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ 表示 $B(H)$ 中紧算子的全体. $A\in B(H)$ 称作亚循环算子, 若存在向量 $y\in H$ 使得 $\{y,Ay,A^2y,\cdots\}$ 在 H 中稠密. $\overline{HC(H)}$ 表示 H 上所有亚循环算子集合的范数闭包. 本文利用算子的拓扑一致降标, 给出了算子 $A\in\overline{HC(H)}$ 的判定方法.

1 预备知识及引理

对算子 $A\in B(H)$, 用 $n(A)$ 来表示零空间 $N(A)$ 的维数, $d(A)$ 表示值域 $R(A)$ 的余维数. 称 $A\in B(H)$ 为一个上半Fredholm算子, 若 $n(A)<\infty$ 且 $R(A)$ 闭; 特别是, 当 $n(A)=0$ 且 $R(A)$ 闭时, 称算子 A 为下有界算子. 若 $d(A)<\infty$ 且 $R(A)$ 闭, 则称 A 为一

收稿日期: 2012-11

作者简介: 刘洋, 女, 在读硕士, 研究方向为算子理论. E-mail: ohhelloo1@stu.snnu.edu.cn.

个下半 Fredholm 算子; 特别当 $d(A)=0$ 时, 称算子 A 为满算子. 算子 $A\in B(H)$ 称为是 Fredholm 算子, 若 $R(A)$ 闭且 $n(A)$ 和 $d(A)$ 都有限. 若 A 为半 Fredholm 算子(上半或者下半 Fredholm 算子), A 的指标 $\mathrm{ind}(A)$ 定义为 $\mathrm{ind}(A)=n(A)-d(A)$. 算子 A 的升标 $\mathrm{asc}(A)$ 为满足 $N(A^n)=N(A^{n+1})$ 的最小的非负整数, 若这样的整数不存在, 则记 $\mathrm{asc}(A)=+\infty$; 而算子 A 的降标 $\mathrm{des}(A)$ 为满足 $R(A^n)=R(A^{n+1})$ 的最小的非负整数, 同样当这样的整数不存在时, 记 $\mathrm{des}(A)=+\infty$. 算子 A 称为是 Weyl 的, 若 A 为指标为零的 Fredholm 算子; 当 A 为有有限升标和有限降标的 Fredholm 算子时, 称 A 为 Browder 算子. 用 $\sigma(A)$, $\sigma_{SF}(A)$, $\sigma_e(A)$, $\sigma_s(A)$, $\sigma_a(A)$, $\sigma_{ea}(A)$, $\sigma_w(T)$, $\sigma_b(A)$, $\sigma_p(A)$ 分别表示算子 A 的谱集, 半 Fredholm 谱, 本质谱, 满谱, 逼近点谱, 本质逼近点谱, Weyl 谱, Browder 谱以及点谱. 令 $\rho(A)=\mathbb{C}\backslash\sigma(A)$, $\rho_{SF}(A)=\mathbb{C}\backslash\sigma_{SF}(A)$, $\rho_e(A)=\mathbb{C}\backslash\sigma_e(A)$, $\rho_s(A)=\mathbb{C}\backslash\sigma_s(A)$, $\rho_{ea}(A)=\mathbb{C}\backslash\sigma_{ea}(A)$, $\sigma_0(A)=\sigma(A)\backslash\sigma_b(A)$.

设 $A\in B(H)$. 若存在 $d\in\mathbb{N}$ 使得当 $n\geqslant d$ 时, $N(A^n)+R(A)=N(A^d)+R(A)$ 并且 $R(A^n)$ 在 $R(A^d)$ 的算子值域拓扑 $(R(A^d),\|\cdot\|)$ 中闭, 称 A 当 $n\geqslant d$ 时有拓扑一致降标, 简记作 $A\in$(TUD). 令

$$\rho_\tau(A)=\{\lambda\in\mathbb{C}:\ \text{存在}\ d\in\mathbb{N}\ \text{使得当}\ n\geqslant d\ \text{时}\ A-\lambda I\ \text{有拓扑一致降标}\},$$

且令 $\sigma_\tau(A)=\mathbb{C}\backslash\rho_\tau(A)$. 根据文献[1]中定理 3.2 和定理 4.7, 我们知 $\rho_\tau(A)$ 为 $\mathbb{C}$ 中开集, 并且 $\rho_{SF}(A)\subseteq\rho_\tau(A)$, 从而 $\sigma_\tau(A)$ 为 $\mathbb{C}$ 中闭集.

算子 A 称作有单值延拓性质(简写为 SVEP, 记作 $A\in$(SVEP)), 若对任意一个开集 $U\subseteq\mathbb{C}$, 满足方程 $(A-\lambda I)f(\lambda)=0(\forall\lambda\in U)$ 的唯一的解析函数为零函数.

显然, 当 $\mathrm{int}\,\sigma_p(A)=\emptyset$ 时, $A\in$(SVEP). 许多类算子都有 SVEP, 比如亚正规算子和可分解算子等. 关于单值延拓性质的更多的信息, 可参考文献([2-4]等).

引理 1.1　算子 $A\in\overline{HC(H)}$ 当且仅当

(1) $\sigma_w(A)\cup\partial\mathbb{D}$ 是连通的;

(2) $\sigma_0(A)=\emptyset$;

(3) 存在 $K\in\mathcal{K}(\mathcal{H})$ 使得 $\rho_\tau(A^*+K^*)\subseteq\rho_{ea}(A^*)\cup\mathrm{iso}\,\sigma_{ea}(A^*)$.

证　明　设 $A\in\overline{HC(H)}$. 由文献 [5] 中定理 2.1 知 (1), (2) 成立且 $\forall\lambda\in\rho_{SF}(A)$ 有 $\mathrm{ind}(A-\lambda I)\geqslant 0$. 于是, $\forall\lambda\in\rho_{SF}(A^*)$, $\mathrm{ind}(A^*-\lambda I)\leqslant 0$, 即 $\rho^+_{SF}(A^*)=\{\lambda\in\mathbb{C}: A^*-\lambda I$ 为半 Fredholm 算子并且 $\mathrm{ind}(A^*-\lambda I)>0\}=\emptyset$. 由文献 [6] 推论 2.9, 存在 $K\in\mathcal{K}(\mathcal{H})$ 使得 $\sigma_p(A^*+K^*)=\rho^+_{SF}(A^*)=\emptyset$. 显然, $(A^*+K^*)\in$(SVEP). 于是, $\rho_\tau(A^*+K^*)\subseteq\rho_a(A^*+K^*)\cup\mathrm{iso}\,\sigma_a(A^*+K^*)$(文献 [7], 定理 3.2). 由于 $\sigma_p(A^*+K^*)=\emptyset$, 则 $\rho_a(A^*+K^*)=\rho_{ea}(A^*+K^*)$. 由半 Fredholm 算子的摄动定理有, $\rho_{ea}(A^*)=\rho_{ea}(A^*+K^*)$. 因此, $\rho_a(A^*+K^*)=\rho_{ea}(A^*+K^*)=\rho_{ea}(A^*)$. 于是, $\rho_\tau(A^*+K^*)\subseteq\rho_{ea}(A^*)\cup\mathrm{iso}\,\sigma_{ea}(A^*)$.

反之, 只需要证明: $\forall\lambda\in\rho_{SF}(A)$, $\mathrm{ind}(A-\lambda I)\geqslant 0$. 若不然, 设 $\lambda_1\in\rho_{SF}(A)$ 使得 $\mathrm{ind}(A-\lambda_1 I)<0$, 则 $\overline{\lambda_1}\in\rho_{SF}(A^*)$ 且 $\mathrm{ind}(A^*-\overline{\lambda_1}I)>0$. 由半 Fredholm 算子的摄动定理知, $\overline{\lambda_1}\in\rho_{SF}(A^*+K^*)$. 于是 $\overline{\lambda_1}\in\rho_\tau(A^*+K^*)\subseteq\rho_{ea}(A^*)\cup\mathrm{iso}\,\sigma_{ea}(A^*)$. 这样可得 $\mathrm{ind}(A^*-\overline{\lambda_1}I)\leqslant 0$, 矛盾. 由文献[5]定理 2.1, $A\in\overline{HC(H)}$. 证毕.

2　定理及推论

在引理 1.1 中, $\rho_a(A^*+K^*)=\rho_{ea}(A^*+K^*)=\rho_{ea}(A^*)\supseteq\rho_a(A^*)$. 如果设 $\rho_{ea}(A^*)=\rho_a(A^*)$, 则有

推论 2.1 $\rho_{ea}(A^*)=\rho_a(A^*)$ 且 $A\in\overline{HC(H)}$ 当且仅当

(1) $\sigma_w(A)\cup\partial\mathbb{D}$ 是连通的;

(2) 存在 $K\in\mathcal{K}(\mathcal{H})$ 使得 $\rho_\tau(A^*+K^*)\subseteq\rho_a(A^*)\cup\mathrm{iso}\,\sigma_{ea}(A^*)$.

证 明 由引理1.1, 必要性显然成立. 反之, 由 $\overline{\sigma_0(A)}\subseteq\rho_\tau(A^*+K^*)\subseteq\rho_a(A^*)\cup\mathrm{iso}\,\sigma_{ea}(A^*)$ 且 $\overline{\sigma_0(A)}\cap\rho_a(A^*)\cup\mathrm{iso}\,\sigma_{ea}(A^*)=\emptyset$ 知 $\sigma_0(A)=\emptyset$. 又由于 $\rho_\tau(A^*+K^*)\subseteq\rho_a(A^*)\cup\mathrm{iso}\,\sigma_{ea}(A^*)\subseteq\rho_{ea}(A^*)\cup\mathrm{iso}\,\sigma_{ea}(A^*)$, 于是 $A\in\overline{HC(H)}$. 因为 $\rho_{ea}(A^*)\subseteq\rho_\tau(A^*+K^*)\subseteq\rho_a(A^*)\cup\mathrm{iso}\,\sigma_{ea}(A^*)$ 和 $\rho_{ea}(A^*)\cap\mathrm{iso}\,\sigma_{ea}(A^*)=\emptyset$, 则 $\rho_{ea}(A^*)\subseteq\rho_a(A^*)$, 结合 $\rho_a(A^*)\subseteq\rho_{ea}(A^*)$ 可得 $\rho_{ea}(A^*)=\rho_a(A^*)$. 证毕.

设 $A\in\overline{HC(H)}$. 由引理 1.1 可知, 存在 $K\in\mathcal{K}(\mathcal{H})$ 使得 $\rho_\tau(A^*+K^*)\subseteq\rho_{ea}(A^*)\cup\mathrm{iso}\,\sigma_{ea}(A^*)$. 对 $\rho_{ea}(A^*)$ 进行分类如下.

$$\rho_{ea}(A^*)=[\rho_{ea}(A^*)\cap\rho(A^*)]\cup[\rho_{ea}(A^*)\cap\sigma(A^*)]=\rho^-(A^*)\cup[\rho^0(A^*)\cap\sigma(A^*)]\cup\rho(A^*).$$

因为 $\sigma_0(A^*)=\emptyset$, 则 $[\rho^0(A^*)\cap\sigma(A^*)]=[\rho^0(A^*)\cap\sigma_b(A^*)]$, 即 $\rho_\tau(A^*+K^*)\subseteq\rho^-(A^*)\cup[\rho^0(A^*)\cap\sigma_b(A^*)]\cup\mathrm{iso}\,\sigma_{ea}(A^*)\cup\rho(A^*)$.

反之, 若存在 $K\in\mathcal{K}(\mathcal{H})$ 使得 $\rho_\tau(A^*+K^*)\subseteq\rho^-(A^*)\cup[\rho^0(A^*)\cap\sigma_b(A^*)]\cup\mathrm{iso}\,\sigma_{ea}(A^*)\cup\rho(A^*)$, 其中 $\rho^-(A^*)=\{\lambda\in\mathbb{C}:A^*-\lambda I$ 是上半 Fredholm 算子且 $\mathrm{ind}(A^*-\lambda I)<0\}$, $\rho^0(A^*)=\{\lambda\in\mathbb{C}:A^*-\lambda I$ 是 Weyl 算子$\}$, 则由 $\overline{\sigma_0(A)}\subseteq\rho_\tau(A^*+K^*)$ 并且 $\overline{\sigma_0(A)}\cap\rho^-(A^*)\cup[\rho^0(A^*)\cap\sigma_b(A^*)]\cup\mathrm{iso}\,\sigma_{ea}(A^*)\cup\rho(A^*)=\emptyset$, 于是 $\overline{\sigma_0(A)}=\emptyset$, 因而 $\sigma_0(A)=\emptyset$. 又由于 $\rho^-(A^*)\cup[\rho^0(A^*)\cap\sigma_b(A^*)]\cup\rho(A^*)\subseteq\rho_{ea}(A^*)$, 于是 $\rho_\tau(A^*+K^*)\subseteq\rho_{ea}(A^*)\cup\mathrm{iso}\,\sigma_{ea}(A^*)$. 于是由引理 1.1 可知 $A\in\overline{HC(H)}$. 这样, 就证明了下列事实.

定理 2.1 $A\in\overline{HC(H)}$ 当且仅当下列事实成立:

(1) $\sigma_w(A)\cup\partial\mathbb{D}$ 是连通的;

(2) 存在 $K\in\mathcal{K}(\mathcal{H})$ 使得 $\rho_\tau(A^*+K^*)\subseteq\rho^-(A^*)\cup[\rho^0(A^*)\cap\sigma_b(A^*)]\cup\mathrm{iso}\,\sigma_{ea}(A^*)\cup\rho(A^*)$.

对算子 $A\in B(H)$, 当 $\sigma_\omega(A^*)=\sigma(A^*)$ 时, 容易证明下列事实.

推论 2.2 $A\in\overline{HC(H)}$ 且 $\sigma_\omega(A^*)=\sigma(A^*)$ 当且仅当下列成立:

(1) $\sigma_w(A)\cup\partial\mathbb{D}$ 是连通的;

(2) 存在 $K\in\mathcal{K}(\mathcal{H})$ 使得 $\rho_\tau(A^*+K^*)\subseteq\rho^-(A^*)\cup\mathrm{iso}\,\sigma_{ea}(A^*)\cup\rho(A^*)$.

前面给出的结论中, 都是用算子 A 的共轭算子 A^* 来描述 $\overline{HC(H)}$ 中元素的特征, 我们希望利用算子 A 自身的拓扑一致降标的特征来刻画 $\overline{HC(H)}$, 于是有

定理 2.2 $A\in\overline{HC(H)}$ 当且仅当

(1) $\sigma_w(A)\cup\partial\mathbb{D}$ 是连通的;

(2) 存在 $K\in\mathcal{K}(\mathcal{H})$ 使得 $\rho_\tau(A+K)\subseteq\rho^+(A)\cup[\rho^0(A)\cap\sigma_b(A)]\cup\mathrm{iso}\,\overline{\sigma_{ea}(A^*)}\cup\rho(A)$, 其中 $\rho^+(A)=\{\lambda\in\mathbb{C}:A-\lambda I$ 是下半 Fredholm 算子且 $\mathrm{ind}(A-\lambda I)>0\}$.

证 明 设 $A\in\overline{HC(H)}$. 由文献[5],定理 2.1 和文献 [6], 推论 2.9可得存在 $K\in\mathcal{K}(\mathcal{H})$ 使得 $\sigma_p(A^*+K^*)=\emptyset$.

设 $\lambda_0\in\rho_\tau(A+K)$, 由文献[1]推论 4.7 知, 存在 λ_0 的空心邻域 $U^0(\lambda_0)$ 使得当 $\lambda\in U^0(\lambda_0)$ 都有 $R(A+K-\lambda I)$ 是闭的. 于是, 当 $\lambda\in U^0(\lambda_0)$ 时, $A+K-\lambda I$ 是满的. 由半 Fredholm 算子的摄动定理知, $A-\lambda I$ 是下半 Fredholm 算子且 $\mathrm{ind}(A-\lambda I)$ $=\mathrm{ind}(A+K-\lambda I)\geqslant 0$, 即 $\overline{\lambda_0}\in\rho_{ea}(A^*)\cup\mathrm{iso}\,\sigma_{ea}(A^*)$.

若$\overline{\lambda_0} \in \rho_{ea}(A^*)$, 则$\overline{\lambda_0} \in \rho^-(A^*) \cup [\rho^0(A^*) \cap \sigma_b(A^*)] \cup \rho(A^*)$. 于是, $\lambda_0 \in \rho^+(A) \cup [\rho^0(A) \cap \sigma_b(A)] \cup \rho(A)$, 从而$\lambda_0 \in \rho^+(A) \cup [\rho^0(A) \cap \sigma_b(A)] \cup \mathrm{iso}\,\overline{\sigma_{ea}(A^*)} \cup \rho(A)$. 这样就证明了$\rho_\tau(A+K) \subseteq \rho^+(A) \cup [\rho^0(A) \cap \sigma_b(A)] \cup \mathrm{iso}\,\overline{\sigma_{ea}(A^*)} \cup \rho(A)$.

反之, 由$\sigma_0(A) \subseteq \rho_\tau(A+K) \subseteq \rho^+(A) \cup [\rho^0(A) \cap \sigma_b(A)] \cup \mathrm{iso}\,\overline{\sigma_{ea}(A^*)} \cup \rho(A)$并且$\sigma_0(A) \cap \rho^+(A) \cup [\rho^0(A) \cap \sigma_b(A)] \cup \mathrm{iso}\,\overline{\sigma_{ea}(A^*)} \cup \rho(A) = \emptyset$知$\sigma_0(A) = \emptyset$. 因为$\rho_{SF}(A) \subseteq \rho_\tau(A+K) \subseteq \rho^+(A) \cup [\rho^0(A) \cap \sigma_b(A)] \cup \mathrm{iso}\,\overline{\sigma_{ea}(A^*)} \cup \rho(A)$并且根据半 Fredholm 算子的摄动定理可知, $\rho_{SF}(A) \cap \mathrm{iso}\,\overline{\sigma_{ea}(A^*)} = \emptyset$. 于是, $\rho_{SF}(A) \subseteq \rho_\tau(A+K) \subseteq \rho^+(A) \cup [\rho^0(A) \cap \sigma_b(A)] \cup \rho(A)$, 即任给$\lambda \in \rho_{SF}(A)$, 都有$\mathrm{ind}(A-\lambda I) \geqslant 0$. 因此$A \in \overline{HC(H)}$(文献[5], 定理 2.1). 证毕.

我们知道, $\mathrm{iso}\,\overline{\sigma_{ea}(A^*)}$为$\mathbb{C}$中的孤立集, 因为$\rho^+(A) \cup [\rho^0(A) \cap \sigma_b(A)] \cup \rho(A) \subseteq \rho_\tau(A+K)$. 那么, 适当地缩小$\mathrm{iso}\,\overline{\sigma_{ea}(A^*)}$, 可得到下面的推论.

推论 2.3　$A \in \overline{HC(H)}$当且仅当

(1) $\sigma_w(A) \cup \partial\mathbb{D}$是连通的;

(2) 存在$K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$使得$\rho_\tau(A+K) = \rho^+(A) \cup [\rho^0(A) \cap \sigma_b(A)] \cup \rho(A) \cup E$, 其中$E \subseteq \mathrm{iso}\,\overline{\sigma_{ea}(A^*)}$是一个至多可数集.

以上给出的等价关系中存在的紧算子K是否为 0? 下面的两个例子对该问题进行了说明.

例子　设$A, B \in B(\ell_2)$定义为: $A(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (0, x_1, x_2, x_3, \cdots)$, $B(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (x_2, x_3, x_4, \cdots)$. 则

(1) 算子$B \in \overline{HC(H)}$(文献[5], 定理 2.1). 由定理 2.2 可得存在$K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$使得

$$\rho_\tau(B+K) \subseteq \rho^+(B) \cup [\rho^0(B) \cap \sigma_b(B)] \cup \mathrm{iso}\,\overline{\sigma_{ea}(B^*)} \cup \rho(B).$$

由于$\sigma_{ea}(B^*) = \mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$且$\rho^0(B) \cap \sigma_b(B) = \emptyset$, 所以$\mathrm{iso}\,\overline{\sigma_{ea}(B^*)} = \emptyset$, 则

$$\rho_\tau(B+K) \subseteq \rho^+(B) \cup \rho(B).$$

又因为$\rho_\tau(B) \cap \mathbb{T} = \emptyset$, 于是$\rho_\tau(B) = \rho^+(B) \cup \rho(B)$. 这样可以看出, 对于算子$B$来说, 可选取$K = 0$.

(2) 设$T = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, 则$T^* = \begin{pmatrix} A^* & 0 \\ 0 & B^* \end{pmatrix}$. 由算子$A$和算子$B$的定义, 则$A^* = B$且$B^* = A$, 则$T^* = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

由$\sigma(T)$的结构可知存在 $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$使得$\sigma_p(T^* + K^*) = \emptyset$. 从而, 参考定理 2.1 的证明可推出$\rho_\tau(T^* + K^*) \subseteq \rho^-(T^*) \cup [\rho^0(T^*) \cap \sigma_b(T^*)] \cup \mathrm{iso}\,\sigma_{ea}(T^*) \cup \rho(T^*)$. 但由于$\sigma_p(T^*) = \{\forall\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$. 所以对于算子$T$, 存在的紧算子$K$一定不是 0.

以上例子说明了等价条件中存在的紧算子K不一定为 0, 并且由算子A的点谱来决定.

把定理 2.2 中的等价条件(2)用$\rho_\tau(A+K)$和$\sigma_\tau(A+K)$描述, 有如下推论.

推论 2.4　$A \in \overline{HC(H)}$当且仅当

(1) $\sigma_w(A) \cup \partial\mathbb{D}$是连通的;

(2) 存在$K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$使得$\rho_\tau(A+K) \cap \partial\sigma(A) = \emptyset$且$\mathrm{int}[\rho_\tau(A+K) \cap \overline{\sigma_{ea}(A^*)}] = \emptyset$.

证　明　设$A \in \overline{HC(H)}$. 由定理 2.2 的证明可知, 存在$K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$使得$\sigma_p(A^* + K^*) = \emptyset$且$\rho_\tau(A+K) \subseteq \rho^+(A) \cup [\rho^0(A) \cap \sigma_b(A)] \cup \mathrm{iso}\,\overline{\sigma_{ea}(A^*)} \cup \rho(A)$. 由于$\partial\sigma(A) \cap \{\rho^+(A) \cup [\rho^0(A) \cap \sigma_b(A)] \cup \rho(A)\} = \emptyset$, 于是 $\rho_\tau(A+K) \cap \partial\sigma(A) \subseteq \mathrm{iso}\,\overline{\sigma_{ea}(A^*)} \cap \partial\sigma(A)$. 设$\lambda_0 \in \rho_\tau(A+K) \cap$

$\partial\sigma(A)\subseteq\text{iso}\,\overline{\sigma_{ea}(A^*)}\cap\partial\sigma(A)$, 由文献[1]定理 4.7 知, 存在 λ_0 的空心邻域 $U^0(\lambda_0)$ 使得 $\forall\lambda\in U^0(\lambda_0)$ 都有 $R(A+K-\lambda I)$ 是闭的. 于是, 当 $\lambda\in U^0(\lambda_0)$ 时, $A+K-\lambda I$ 是满算子. 因而 $A-\lambda I$ 是下半 Fredholm 算子且 $\text{ind}(A-\lambda I)\geqslant 0$. 又因为 $\lambda_0\in\partial\sigma(A)$, 则存在 $\lambda_1\in U^0(\lambda_0)$ 使得 $A-\lambda_1 I$ 是可逆的, 即 $A+K-\lambda_1 I$ 是 Weyl 的. 于是, $A+K-\lambda_1 I$ 是可逆的. 这样就证明了 $\lambda_0\in\rho(A+K)\cup\partial\sigma(A+K)$. 不妨设 $\lambda_0\in\partial\sigma(A+K)$, 由文献[1]推论 4.9 可知, λ_0 是 $A+K$ 的极点. 于是, $\overline{\lambda_0}$ 是 A^*+K^* 的极点, 结合 $\sigma_p(A^*+K^*)=\emptyset$, 则 $A^*+K^*-\overline{\lambda_0}I$ 是可逆的. 于是, $A+K-\lambda_0 I$ 是可逆的. 从而 $A^*-\overline{\lambda_0}I$ 为 Weyl 算子. 此时, 根据 Fredholm 算子的摄动定理知, $\overline{\lambda_0}\notin\text{iso}\,\sigma_{ea}(A^*)$, 即 $\lambda_0\notin\text{iso}\,\overline{\sigma_{ea}(A^*)}$. 与 $\lambda_0\in\rho_\tau(A+K)\cap\partial\sigma(A)\subseteq\text{iso}\,\overline{\sigma_{ea}(A^*)}\cap\partial\sigma(A)$ 相矛盾. 这就证明了 $\rho_\tau(A+K)\cap\partial\sigma(A)=\emptyset$.

由于 $\rho_\tau(A+K)\cap\overline{\sigma_{ea}(A^*)}\subseteq\{\rho^+(A)\cup[\rho^0(A)\cap\sigma_b(A)]\cup\text{iso}\,\overline{\sigma_{ea}(A^*)}\cup\rho(A)\cap\overline{\sigma_{ea}(A^*)}\}=\text{iso}\,\overline{\sigma_{ea}(A^*)}\cap\overline{\sigma_{ea}(A^*)}$, 则 $\text{int}[\rho_\tau(A+K)\cap\overline{\sigma_{ea}(A^*)}]\subseteq\text{int}[\text{iso}\,\overline{\sigma_{ea}(A^*)}\cap\overline{\sigma_{ea}(A^*)}]=\emptyset$, 即 $\text{int}[\rho_\tau(A+K)\cap\overline{\sigma_{ea}(A^*)}]=\emptyset$.

反之, 由 $\rho_\tau(A+K)\cap\partial\sigma(A)=\emptyset$ 知 $\rho_\tau(A+K)\subseteq\rho(A)\cup\text{int}\,\sigma(A)$. 又由 $\rho_\tau(A+K)$ 为开集并且 $\rho^-_{SF}(A)\subseteq\text{int}[\overline{\sigma_{ea}(A^*)}]$ 知, $\text{int}[\rho_\tau(A+K)\cap\overline{\sigma_{ea}(A^*)}]=\rho_\tau(A+K)\cap\text{int}[\overline{\sigma_{ea}(A^*)}]=\emptyset$ 且 $\rho_\tau(A+K)\cap\rho^-_{SF}(A)=\text{int}[\rho_\tau(A+K)\cap\rho^-_{SF}(A)]\subseteq\text{int}[\rho_\tau(A+K)\cap\overline{\sigma_{ea}(A^*)}]=\emptyset$. 于是, $\rho_\tau(A+K)\cap\overline{\sigma_{ea}(A^*)}=\rho_\tau(A+K)\cap\text{iso}\,\overline{\sigma_{ea}(A^*)}$. 因此

$$\begin{aligned}&\rho_\tau(A+K)\subseteq\rho(A)\cup int\sigma(A)\subseteq\rho(A)\cup[\rho_{SF}(A)\cap\sigma(A)]\cup\sigma_{SF}(A)\\ \subseteq&\rho(A)\cup\rho^+_{SF}(A)\cup[\rho_\tau(A+K)\cap\rho^-_{SF}(A)]\cup[\rho^0(A)\cap\sigma(A)]\cup[\sigma_{ea}(A^*)\cap\rho_\tau(A+K)]\\ \subseteq&\rho(A)\cup\rho^+_{SF}(A)\cup[\rho^0(A)\cap\sigma_b(A)]\cup[\rho^0(A)\cap\sigma_0(A)]\cup[\rho_\tau(A+K)\cap iso\overline{\sigma_{ea}(A^*)}]\\ \subseteq&\rho(A)\cup\rho^+_{SF}(A)\cup[\rho^0(A)\cap\sigma_b(A)]\cup iso\overline{\sigma_{ea}(A^*)}\end{aligned}$$

(因为 $\rho^0(A)\cap\sigma_0(A)\subseteq\rho_\tau(A+K)\cap\partial\sigma(A)=\emptyset$). 由定理 2.2 知, $A\in\overline{HC(H)}$. 证毕.

由 $\rho_\tau(A+K)\cap\partial\sigma(A)=\emptyset$ 可以看出, $\rho_\tau(A+K)\cap\sigma(A)$ 是开集. 则由推论 2.3 或推论 2.4 可得下面的推论.

推论 2.5 $A\in\overline{HC(H)}$ 当且仅当

(1) $\sigma_w(A)\cup\partial\mathbb{D}$ 是连通的;

(2) 存在 $K\in\mathcal{K}(\mathcal{H})$ 使得 $\rho_\tau(A+K)\cap\sigma(A)$ 是开集且 $\text{int}[\rho_\tau(A+K)\cap\overline{\sigma_{ea}(A^*)}]=\emptyset$.

令推论 2.4 和推论 2.5 的等价条件中的 $K=0$, 类似于推论 2.4 和推论 2.5 的证明, 可得:

推论 2.6 $A\in\overline{HC(H)}$ 当且仅当下列之一成立:

(1) $\sigma_w(A)\cup\partial\mathbb{D}$ 是连通的, $\rho_\tau(A)\cap\partial\sigma(A)\cap\{\lambda\in\mathbb{C}:0<n(A-\lambda I)<+\infty\}=\emptyset$ 并且 $\text{int}[\rho_\tau(A)\cap\overline{\sigma_{ea}(A^*)}]\cap\{\lambda\in\mathbb{C}:\forall\mu\in U^0(\lambda),n(A-\mu I)<+\infty\}=\emptyset$.

(2) $\sigma_w(A)\cup\partial\mathbb{D}$ 是连通的, $\rho_\tau(A)\cap\sigma(A)\cap\{\lambda\in\mathbb{C}:0<n(A-\lambda I)<+\infty\}$ 是开集并且 $\text{int}[\rho_\tau(A)\cap\overline{\sigma_{ea}(A^*)}]\cap\{\lambda\in\mathbb{C}:\forall\mu\in U^0(\lambda),n(A-\mu I)<+\infty\}=\emptyset$.

接下来探讨定理 2.2 中的紧算子 K 在什么情况下可以等于 0. 我们有下面的结论.

定理 2.3 如果存在有限秩算子 F 使得 $FA=AF$, 且 $\sigma_p(A^*+F^*)$ 有限. 则 $A\in\overline{HC(H)}$ 当且仅当

(1) $\sigma_w(A)\cup\partial\mathbb{D}$ 是连通的;

(2) $\rho_\tau(A)\subseteq\rho^+(A)\cup[\rho^0(A)\cap\sigma_b(A)]\cup\text{iso}\,\overline{\sigma_{ea}(A^*)}\cup\rho(A)$.

证 明 必要性. 设 $\lambda_0\in\rho_\tau(A)$, 则 $\overline{\lambda_0}\in\rho_{ea}(A^*)\cup\sigma_{ea}(A^*)$. 若 $\overline{\lambda_0}\in\rho_{ea}(A^*)$, 则参考定理 2.1 的证明可得 $\overline{\lambda_0}\in\rho^-(A^*)\cup[\rho^0(A^*)\cap\sigma_b(A^*)]\cup\rho(A^*)$.

若$\overline{\lambda_0}\in\sigma_{ea}(A^*)$, 由$\lambda_0\in\rho_\tau(A)$可知文献[1], 定理 4.7, 存在$\lambda_0$的空心邻域$U_1^0(\lambda_0)$, 使得对于$\forall\lambda\in U_1^0(\lambda_0)$有$R(A-\lambda I)$是闭的. 由$\sigma_p(A^*+F^*)$有限可知, 存在$\lambda_0$的空心邻域$U_2^0(\lambda_0)$使得$U_2^0(\lambda_0)\cap\sigma_p(A^*+F^*)=\emptyset$. 令$U^0(\lambda_0)=U_1^0(\lambda_0)\cap U_2^0(\lambda_0)$, 则任意的$\lambda\in U^0(\lambda_0)$都有$n(A^*+F^*-\overline{\lambda}I)=0$. 由$F$是有限秩的且$AF=FA$可知, F^*是有限秩的且$F^*A^*=A^*F^*$, 因此$\forall\lambda\in U^0(\lambda_0)$都有$n(A^*-\overline{\lambda}I)<+\infty$. 于是 $\forall\lambda\in U^0(\lambda_0)$, 有$A-\lambda I$是下半 Fredholm 算子且$\mathrm{ind}(A-\lambda I)\geqslant 0$, 因此$\lambda_0\in\mathrm{iso}\,\overline{\sigma_{ea}(A^*)}$.

综合以上两种情况, 得$\rho_\tau(A)\subseteq\rho^+(A)\cup[\rho^0(A)\cap\sigma_b(A)]\cup\mathrm{iso}\,\overline{\sigma_{ea}(A^*)}\cup\rho(A)$.

充分性证明类似定理 2.2 的证明. 证毕.

经证明知, 定理 2.3 中, $\sigma_p(A^*+F^*)$有限可以用$\mathrm{int}\,\sigma_p(A^*+F^*)=\emptyset$或$\mathrm{int}\,\sigma_p(A+F)=\emptyset$替换, 则得到下面两个推论.

推论 2.7　如果存在有限秩算子F使得$FA=AF$, 且下列两个条件之一成立, 都有$A\in\overline{HC(H)}$当且仅当$\sigma_w(A)\cup\partial\mathbb{D}$是连通的且$\rho_\tau(A)\subseteq\rho^+(A)\cup[\rho^0(A)\cap\sigma_b(A)]\cup\mathrm{iso}\,\overline{\sigma_{ea}(A^*)}\cup\rho(A)$.

(1) $\mathrm{int}\,\sigma_p(A^*+F^*)=\emptyset$;

(2) $\mathrm{int}\,\sigma_p(A+F)=\emptyset$.

对于存在的有限秩算子F, 由推论 2.7 中的$\mathrm{int}\,\sigma_p(A+F)=\emptyset$可推出$(A+F)\in$(SVEP). 而对$\forall F\in\mathcal{K}(\mathcal{H})$, $(A+F)\in$(SVEP)$\Leftrightarrow$ $\rho_{SF}(A)$是连通的且$\mathrm{int}\,\sigma_{SF}(A)=\emptyset$(文献[6], 定理 1.3). 事实上由文献[6], 推论 2.5 可知, $\rho_{SF}(A)$是连通的且从$\mathrm{int}\,\sigma_{SF}(A)=\emptyset$可以推出$\forall F\in\mathcal{K}(\mathcal{H})$, $\mathrm{int}\,\sigma_p(A+F)=\emptyset$. 所以有下面的推论.

推论 2.8　设$\mathrm{int}\,\sigma_{SF}(A)=\emptyset$, 则$A\in\overline{HC(H)}$当且仅当

(1) $\sigma_w(A)\cup\partial\mathbb{D}$是连通的;

(2) $\rho_\tau(A)\subseteq\rho^+(A)\cup[\rho^0(A)\cap\sigma_b(A)]\cup\mathrm{iso}\,\overline{\sigma_{ea}(A^*)}\cup\rho(A)$.

证　明　必要性. 设$\lambda_0\in\rho_\tau(A)$, 则$\overline{\lambda_0}\in\rho_{ea}(A^*)\cup\sigma_{ea}(A^*)$. $\overline{\lambda_0}\in\rho_{ea}(A^*)$的情况类似定理 2.3, 只需考虑$\overline{\lambda_0}\in\sigma_{ea}(A^*)$的情况. 因为$\mathrm{int}\,\sigma_{SF}(A)=\emptyset$, 则对于$\lambda_0$的任意邻域$B_\delta(\lambda_0)$, 都存在$\lambda_1\in B_\delta(\lambda_0)$使得$A-\lambda_1 I$是半 Fredholm 算子, 于是$\mathrm{ind}(A-\lambda_1 I)\geqslant 0$.

由文献[1]推论 4.8, 可以找到一个邻域$B_{\delta_1}(\lambda_0)\subseteq B_\delta(\lambda_0)$, 使得$\forall\lambda\in B_{\delta_1}(\lambda_0)$都有$A-\lambda I$是半 Fredholm 算子且$\mathrm{ind}(A-\lambda I)\geqslant 0$, 则$\lambda_0\in\mathrm{iso}\,\overline{\sigma_{ea}(A^*)}$.

充分性类似定理 2.3 的证明.

推论 2.9　$\mathrm{int}\,\sigma_{SF}(A)=\emptyset$且$A\in\overline{HC(H)}$当且仅当下列成立

(1) $\sigma_w(A)\cup\partial\mathbb{D}$是连通的;

(2) $\rho_\tau(A)\subseteq\rho^+(A)\cup[\rho^0(A)\cap\sigma_b(A)]\cup\mathrm{iso}\,\overline{\sigma_{ea}(A^*)}\cup\rho(A)$;

(3) $\mathrm{int}\,\sigma_\tau(A)=\emptyset$.

证　明　必要性. 只需证$\mathrm{int}\,\sigma_\tau(A)=\emptyset$, 此等式由$\sigma_{SF}(A)\supseteq\sigma_\tau(A)$可得.

充分性. 只需证$\mathrm{int}\,\sigma_{SF}(A)=\emptyset$. 若不然, 设$\lambda_0\in\mathrm{int}\,\sigma_{SF}(A)$, 则存在$\lambda_0$的邻域$B_\delta(\lambda_0)\subseteq\sigma_{SF}(A)$. 又因为$\mathrm{int}\,\sigma_\tau(A)=\emptyset$, 则存在$\lambda_1\in B_\delta(\lambda_0)$使得$A-\lambda_1 I$有拓扑一致降标. 于是由定理 2.3, 存在$B_{\delta'}(\lambda_1)\subseteq B_\delta(\lambda_0)$且存在$\lambda_2\in B_{\delta'}(\lambda_1)\cap\rho_{SF}(A)$, 这就与$B_\delta(\lambda_0)\subseteq\sigma_{SF}(A)$矛盾. 于是假设不成立, 即$\mathrm{int}\,\sigma_{SF}(A)=\emptyset$.

[参　考　文　献]

[1] GRABINER S. Uniform ascent and descent of bounded operators[J]. J Math Soc Japan, 1982, 34(2): 317-337.

(下转第 143 页)

Thus for each $i \in \{1, 2, \cdots, p\}$ and each odd number $q(\geqslant 5)$, we have that $\overline{S}(u_i, v_j) \neq \overline{S}(u_i, v_l)$, $1 \leqslant j < l \leqslant q$.

In conclusion, the above coloring is a pq-VDPEC coloring of $K_p[S_q]$.

Acknowledgements We would like to thank the referees for their valuable and thoughtful suggestions which greatly improve the present paper.

[References]

[1] BURRIS A C. Vertex-distinguishing edge-colorings[D]. Memphis: Memphis State University, 1993.

[2] BALISTER P N, RIORDAN O M, SCHELP R H. Vertex-distinguishing edge colorings of graphs[J]. J Graph Theory, 2003, 42(2): 95-109.

[3] BAZGAN C, HARKAT-BENHAMDINE A, LI H, et al. On the vertex-distinguishing proper edge colorings of graphs[J]. J Combin Theory, 1999, 75(2): 288-301.

[4] BURRIS A C, SCHELP R H. Vertex-distinguishing proper edge-colorings[J]. J Graph Theory, 1997, 26(2): 73-82.

[5] CHEN X N, GAO Y P. Vertex-distinguishing proper edge-coloring chromatic numbers of the composition of two graphs[J]. Journal of Jilin University: Science Edition, 2011, 49(2): 207-212.

[6] HORŇÁK M, SOTÁK R. Observability of complete multipartite graphs with equipotent parts[J]. Ars Combinatoria, 1995, 41: 289-301.

[7] ČERNÝ J, HORŇÁK M, SOTÁK R. Observability of a graph[J]. Math Slovaca, 1996, 46(1): 21-31.

(上接第 135 页)

[2] AIENA P. Fredholm and Local Spectral Theory, with Applications to Multipliers[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2004.

[3] LAURSEN K B, NEUMANN M M. An Introduction to Local Spectral Theorey[M]. London Math Soc Monogr New Ser 20. New York: Clarendon Press, 2000.

[4] FINCH J K. The single valued extension property on a Banach space[J]. Pacific J Math, 1975, 58(1): 61-69.

[5] HERRERO D A. Limits of hypercyclic and supercyclic operators[J]. Journal of Functional Analysis, 1991, 99: 179-190.

[6] ZHU S, LI CH G. SVEP and compact perturbation[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2011, 380: 69-75.

[7] JIANG Q F, ZHONG H J, ZENG Q P. Topological uniform descent and localized SVEP[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2012, 390: 355-361.