# 应用卡尔曼滤波的机载 雷达跟踪系统

北京航空学院 毛士艺

### 植 草

本文论述将滤波理论应用于机载雷达中对单个目标进行距离、速度、方位角和高低角跟踪的多环反馈系统。首先根据目标和天线的相对运动建立控制四坐标跟踪环所需的状态矢量微分方程,然后推导相应的非线性滤波算法。最后给出计算机的模拟结果。计算机模拟的结果清晰地说明采用最佳滤波的系统性能比通常的有很大改善,并且这种瞄准轴坐标系的最佳系统对目标的随机机动是不灵敏的。

本文所讨论的方法和得出的结论可以延用到地面雷达、舰载雷达以及其他有源和无源的跟踪系统。

# 一、前言

六十年代初期建立的卡尔曼-布西理论相当成功地应用到卫星、弹道 导 弹轨道估计和 领航系统。用于战术雷达的研究工作还是近十年才开展起来的。

将卡尔曼滤波用于跟踪雷达可使跟踪性能获得很大的改善。通常的跟踪雷达是由多个独立的常系数的闭环反馈系统构成的。如两个独立的方位角、高低角跟踪系统,一个距离跟踪系统和一个速度跟踪系统。设计这种跟踪系统归根结底是选择一个合适的低通滤波器。它对目标的机动有足够快地响应,同时又能抑制干扰。选择得优劣与否主要取决于设计者的经验。

先进的跟踪系统应根据目标运动的数学模型去估计 ε<sub>cm</sub>、ε<sub>dm</sub>、ε; /<sub>m</sub>、ε, /<sub>m</sub>(分别为高低角、方位角、速度和距离的误差信号)中的全部有用信息,然后利用所获得的信息去控制 随动系统使误差信号趋于零。

采用卡尔曼滤波去估计误差信号中的有用信息可以最大限度地去掉误差信号中由测量 噪声、目标闪烁噪声、天线罩折射等造成的误差,从而分离出更精确的指示 跟 踪 偏差的信号。

采用卡尔曼滤波可以从测量的误差信号中估计出更多的有用信息,如目标的视线角速度,沿目标视线坐标系的加速度分量。利用这些状态可以形成近似的最佳控制规律。例如在角跟踪通道中误差信号与视线角速度的估计量线性权加后形成的天线角速度指令就是近似最佳控制指令<sup>(1)</sup>。它至少还起到通常用坐标变换才能实现的"指挥仪反馈"的作用。

<sup>1981</sup>年10月收到。

采用卡尔曼滤波建立的滤波结构自然地形成了各跟踪环路互相交链的系统。交链后每 个环路还从其他环路中提取有用信息,显然这样可以进一步提高跟踪的性能。

依据目标相对运动建立的**滤波**结构中的参数是时变的,因此可以在相当宽广的范围内保持最佳的跟踪性能,从而形成具有自适应能力的跟踪系统。

下面研究用于机载的对单个目标的四坐标跟踪系统的数学模型并建立滤波算法。然后用数字计算机模拟滤波和跟踪过程。计算机模拟的结果充分说明跟踪过程是良好的,上述的优越性是存在的。

应该指出,这方面的研究工作首先是从J.B.Pearson<sup>(1)</sup>开始的,后来柴田实、穗 板三四郎<sup>(5)</sup>也做了相应的工作。不过 Pearson 和柴田实的工作都是基于将两个角度通道和距离、速度通道的数据分开观测,然后应用线性滤波理论进行的。我们的工作是:基于联合观测四个通道的数据,应用非线性滤波理论和算法对 Pearson 和柴田实的结果作了补充与修正;对在瞄准轴坐标系建立的滤波算法进行灵敏度分析,指出采用这种坐标系的优点是对目标的机动不灵敏;对距离和速度通道的交链进行分析,指出交链只对个别通道的性能有显著的改善。

还应指出,这种用于运载物体上的先进系统的概念完全可以延用到舰载和地面雷达以 及诸如激光、红外等其他有源、无源的跟踪系统。

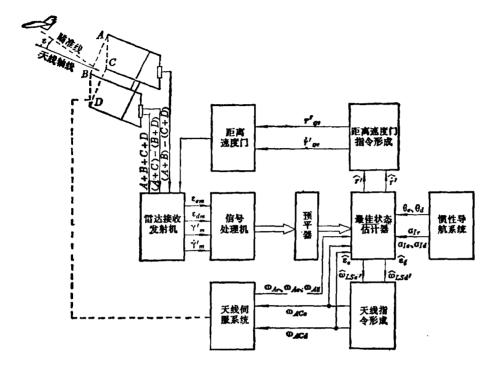
# 二、数学模型

具有卡尔曼滤波的跟踪系统如图 1 所示。  $\varepsilon_{em}$ 、  $\varepsilon_{dm}$  分别为高低角和方位角 误 差信号;  $\varepsilon_{r'm}$ 、  $\varepsilon_{r'm}$  入别为距离和速度误差信号。信号处理器对这四个误差信号进行数模变换。此外,由于雷达的采样周期比卡尔曼滤波的迭代周期要小得多,故信号处理器还要对这四个误差信号加以预平均。角度跟踪系统实际上是使天线坐标系 r 、 e 、 d 跟随目标视线坐标系 r' 、 e' 、 d' 旋转。 r' 坐标沿目标视线方向, e' 、 d' 是其余两个与 r' 垂直的正交坐 标, r 坐标沿天线光学轴方向, e 、 d 是其余两个与 r 垂直的正交坐标,见图 2。天线沿高低角和方位角运动的角速度控制指令分别为

$$\begin{aligned} & \omega_{AC_e} = \hat{\omega}_{LS_e}' + \lambda \hat{\epsilon}_e \\ & \omega_{AC_d} = \hat{\omega}_{LS_d}' + \lambda \hat{\epsilon}_d \end{aligned} \tag{1}$$

式中 $\hat{\omega}_{LS_e}$ '、 $\hat{\omega}_{LS_e}$ '分别表示目标视线坐标系相对惯性坐标系在e'、d' 方向 的角速度分量的估计量; $\hat{\epsilon}_e$ 、 $\hat{\epsilon}_d$  分别表示高低角和方位角误差的估计量; $\lambda$  为比例因子。Pearson 用 计算曲线指出式(1)是近似的最佳控制指令。天线伺服系统是一个具有角速度陀螺反馈的驱动系统。

首先从两个角坐标跟踪系统建立数学模型。根据式(1),我们要建立 天 线坐标系和目标视线坐标系相对惯性坐标系运动时  $\varepsilon_e$ 、 $\varepsilon_a$  以及  $\omega_{\iota s_e'}$ 、 $\omega_{\iota s_e'}$ 、随时间变化的 微 分 方程。为了描述目标机动,还需建立机动加速度的微分方程。依据刚体力学中的速度分布公式和Coriolis 方程,可建立角误差、角速度和距离变化率的微分方程(1.6)。而目标机 动 加速度可用一阶马尔柯夫过程来描述(5)。经过一系列代数运算以后,可得 到 跟 踪 系 统 的 状态



### 图 1 具有卡尔曼滤波的跟踪系统

Fig. 1 Tracking System with Kalman filter

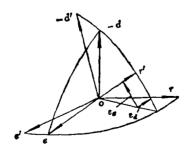


图 2 天线坐标系与视线坐标系

Fig. 2 Antenna coordinate system and sight coordinate system

方程.

式中 $\omega_{Ls}^2 = \omega_{Ls_e'}^2 + \omega_{Ls_e'}^2$ 。若式(2)前二项用f(x(t), t),三个独立的策动噪声 $w_{e'}, w_{e'}$ 和 $w_{t}$ /用随机矢量w(t)表示,则式(2)可写为

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) + Gw(t) \tag{3}$$

白高斯策动噪声w(t)的协方差用Q表示。

观测方程为

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix}
\varepsilon_{em} \\
\varepsilon_{dm} \\
\varepsilon_{r'm} \\
\varepsilon_{\dot{r}'m}
\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
k_{e} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & k_{d} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{r'} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{\dot{r}'} & 0
\end{bmatrix} \mathbf{x} - \mathbf{y} + \begin{bmatrix}
v_{e} \\
v_{d} \\
v_{r'} \\
v_{\dot{r}'}
\end{bmatrix}$$

$$= H\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{v} \tag{4}$$

式中 $y=[0\ 0\ 0\ 0\ 0\ k,r'r'_{k}\ k;r'_{k}\ 0]^{T}$ :  $r'_{k}$ 表示距离门的延迟时间;  $r'_{k}$ 表示速度门的偏移频率;  $k_{e}$ 、 $k_{d}$ 分别表示高低角、方位角误差检测增益;  $k_{e}$ /、k;r'分别表示距离、速度 误差检测增益; v 为观测噪声矢量,其协方差为 $R(t)\delta(t-\tau)$ 。

我们把式(2)、(4)称作瞄准轴坐标系的数学模型。我们看出:

- (1) 观测模型是线性的,但消息模型是非线性的。由于系统矩阵中的 某 些元素是由 状态变量构成的,因此是一个具有一定自适应能力的状态估计与参数识别同时进行的非线 性滤波。
- (2)原则上四个通道的观测是同时进行的。如果将两个角通道的观测和距离、速度的观测分开进行,则退化为线性滤波问题。Pearson 和柴田实都是这样处理的。本文 用非线性滤波理论处理,并用数字计算机模拟的结果指出。在进入稳态后,即跟踪误差较小时作线性处理是适宜的,但在过渡过程中会出现较大的偏差。
- (3)和通常的角跟踪系统相比,采用最佳滤波的跟踪系统是从四个跟踪误差的观测量中以最小误差提取  $\hat{\epsilon}_{s}$ 、 $\hat{\epsilon}_{d}$ 。利用扩大状态变量和根据天线指向角引入  $\hat{\epsilon}_{s}$ 、 $\hat{\epsilon}_{d}$  的修正量就可消除  $\hat{\epsilon}_{sm}$ 、 $\hat{\epsilon}_{dm}$ 中由角闪烁和天线罩折射引起的误差。
- (4) 在天线角速度指令中还加入一项不是角误差信号线性变换的角速度估计量。因此 它还具有通常需用坐标变换才能获得的指挥仪反馈系统的优越性。

# 三、非线性滤波算法

许多应用数学家在非线性滤波方面做了大量的研究,但至今还没有获得能进行实际运算的精确解法,各种近似算法的性能边界及其优劣程度只有通过数值计算才能评定。本节采用计算量较少的四坐标滤波的非线性算法。

非线性滤波是要以被噪声污染了的由非线性随机微分方程描述的状态子集构成的过程中获得全部状态的估计量。由于雷达的观测数据是离散的,在 f<sub>k-1</sub>, f<sub>k</sub> 之间基 于观 测的最小均方误差估计量和估计误差的方差分别为

$$\hat{\boldsymbol{x}}(t) = E\left\{\boldsymbol{x}(t)|\boldsymbol{Z}(t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{x} p(\boldsymbol{x}(t), t|\boldsymbol{Z}(t)) d\boldsymbol{x} \qquad t_{k-1} \leqslant t < t_k \qquad (5)$$

$$P(t) = E\left\{(\boldsymbol{x}(t) - \hat{\boldsymbol{x}}(t))(\boldsymbol{x}(t) - \hat{\boldsymbol{x}}(t))^T | \boldsymbol{Z}(t)\right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}(t))(\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}(t))^T p(\boldsymbol{x}(t), t|\boldsymbol{Z}(t)) d\boldsymbol{x} \qquad (6)$$

$$t_{k-1} \leqslant t < t_k$$

式中  $Z(t) = \{z(\tau), i_{k-1} \le \tau < t_k\}, p(x(t), t | Z(t))$  为条件密度函数。非线性滤波的困难的根本原因是我们很难获得用 Kushner<sup>[2,8]</sup>偏微分方程 描述的 条件 密 度 函数的解。在离散观测的特定条件下,由于  $t_{k-1}$ ,  $t_k$  之间没有观测数据, Kushner 方 程 演 变 为 Kolmogorov 向前方程。

$$\frac{\partial p(\mathbf{x}(t), t | \mathbf{Z}(t))}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \{f_{i}p(\mathbf{x}(t), t | \mathbf{Z}(t))\}}{\partial x_{i}} + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^{2} \{p(\mathbf{x}(t), t | \mathbf{Z}(t))(GQG)_{ij}\}}{\partial x_{i}\partial x_{j}} \qquad t_{k-1} \leqslant t \leqslant t_{k}$$
(7)

其起始条件为 $p(x(t), t|Z(t_{k-1}))$ 。若对式(5)、(6) 求导,将式(7)代入,实行分部积分,并考虑到x趋于正负无限大时的边界条件,经冗长的推导得:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = E\left\{f(\mathbf{x}(t), t)\right\} = \hat{f}(\mathbf{x}(t), t) \quad t_{k-1} \leqslant t < t_k \tag{8}$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = E \{f(x(t), t)(x(t) - \hat{x}(t))^{T}\} + E\{(x(t) - \hat{x}(t))f^{T}\}$$

$$\times (\mathbf{x}(t), t) + E \langle \mathbf{GQG} \rangle \quad t_{k-1} \leqslant t < t_k \tag{9}$$

式 (8)、(9) 不是常微分方程,而是积分微分方程。将式 (8)、(9) 右边的 f(x(t))、t )在估计量处按台劳级数展开并只取前二项,就得出近似的最佳估计量及其误差方差在  $t_{b-1}$ 、 $t_b$  区间的传播方程:

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}(t)}{dt} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(t), t) \qquad t_{k-1} \leqslant t < t_k$$
 (10)

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{\partial f(\hat{x}(t), t)}{\partial \hat{x}(t)} P(t) + P(t) \frac{\partial f^{T}(\hat{x}(t), t)}{\partial \hat{x}(t)} + GQG^{T} \quad t_{k-1} \leq t < t_{k} \tag{11}$$

在  $t_{k-1}$ 和  $t_k$  之间进行数值积分就可得出未经 z(k) 修正的估计量 和 误 差 方 差,分别用  $\hat{x}(k|k-1)$  和 P(k|k-1) 表示。当 f 是线性函数时,式(10)、(11)退化为卡尔曼 一步预测公式。

为了完成全部滤波算法,还必须求出经过z(k) 修 正 的 $\hat{x}(k|k)$  和 P(k|k)。可将 $\hat{x}(k|k)$  表示成z(k) 的幂级数。为了近似起见,只取前二项:

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \mathbf{a}(k) + \mathbf{K}(k)\mathbf{z}(k) \tag{12}$$

根据 $\hat{x}(k|k)$  的无偏和最小方差性要求求a(k) 和K(k),代入式(12)后 就 得出 经过测量数据修正的近似的非线性滤波公式

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{K}(k)(\mathbf{z}(k) - \mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}}(k|k-1), k))$$
(13)

$$K(k) = P(k|k-1)H^{T}(\hat{x}(k|k-1), k) (H(\hat{x}(k|k-1), k))$$

$$\times P(k|k-1)H^{T}(\hat{x}(k|k-1), k) + R(k))^{-1}$$
(14)

$$P(k|k) = (I - K(k)H(\hat{x}(k|k-1), k))P(k|k-1)$$
(15)

式中

$$H(\hat{x}(k|k-1), k) = \{Hx-y\}_{z=\hat{x}(k|k-1), t=t_k=k}$$
 (16)

式 (10)、(11)、(13)、(14) 和 (15) 构成连续-离散的近似非线性滤波算法。非线性滤波中的 K(k) 和 P(k) 都是状态估计量 $\hat{x}(k|k-1)$  的函数。因此它们都 是 需 要实时计算的随机量。显然,非线性滤波要求计算机具有较大的内存 容 量 和较快的 计算速度。

# 四、计算机模拟结果与讨论

本节给出用数字计算机模拟的结果。计算机模拟是为了清晰地说明下列问题:

- 1. 采用最佳滤波的跟踪系统性能改善了多少;
- 2. 我们的结果与 Pearson 和柴田实之间的差异;
- 3. 耦联的跟踪系统性能改善了多少:
- 4. 灵敏度和自适应跟踪问题。

采取适当的模拟方案并规定适当的起始条件之后<sup>(6)</sup>,图 3 给出具有非线性滤波的跟踪 系统和传递函数为

$$G(s) = \frac{125\left(\frac{s}{2.09} + 1\right)}{s\left(\frac{s}{0.104} + 1\right)\left(\frac{s}{20} + 1\right)}$$
(17)

的典型角跟踪系统对同一样本航迹跟踪时得出的角误差曲线。该经典系统<sup>(4)</sup>对远距离目标跟踪的稳态误差还是较小的,但对近距目标跟踪的性能明显恶化。然而先进的跟踪系统都可以较快地进入稳态跟踪,具有较高的跟踪精度。采用最佳滤波的时变系统能在较宽的范围内保持优良的跟踪性能。

图 4 表示用非线性滤波和 Pearson、柴田实采用的线性滤波跟踪同一样本航迹时速度和角速度的误差曲线。我们看出,在稳态时两者是十分相近的,但在截获时或出现较大的误差时,非线性滤波具有较快的收敛性能。

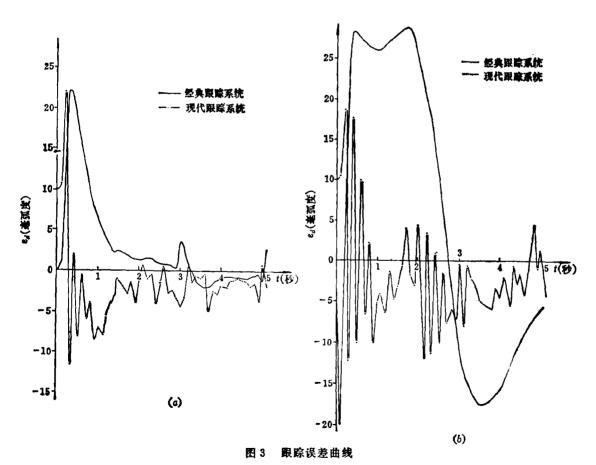


Fig. 3 Tracking error curves

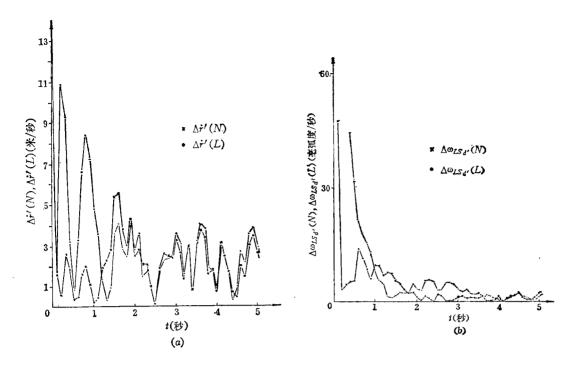


图 4 采用线性和非线性滤波时的跟踪误差曲线

Fig. 4 Tracking error curves using linear filtering and nonlinear filtering

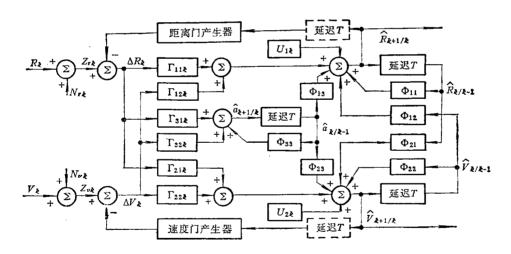


图 5 采用卡尔曼滤波的互耦的距离-速度跟踪系统

Fig. 5 Cross-coupling tracking system between range tracking loop and velocity tracking loop, using Kalman filtering

可以从式 (2) 引出三维的距离-速度状态方程。将其离散化,然后根据三个标量的一步预测的差分方程画出图 5 所示的交链的距离-速度跟踪系统。每个通道不 仅 从自身而且还从别的通道获得新息和估计量来修正新的估计量。图 6 示出交链后对距离通道的性能有很大改善,但对速度通道的改善是甚微的。

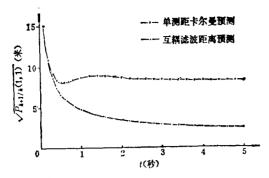


图 6 互耦跟踪系统和单距离跟踪系统的距离误差曲线

Fig. 6 Range error curves with cross coupling tracking system and single range tracking system

最后我们给出策动噪声协方差Q和观测噪声协方差R 的元与实际的分别失配 100 倍和 25倍时的误差曲线,如图 7 所示。从曲线中得出一个十分重要的结果,以瞄准轴坐标系建立的最佳滤波对目标的机动是不灵敏的,而通常在直角坐标系建立的最佳滤波在应用中最麻烦的问题就是处理目标的机动问题。Moose<sup>[41,10]</sup>等人曾提出把机动分为有限个 机动指令和相关扰动之和。在这种称之为组合机动模型的假定下,可以建立一个由卡尔曼滤波和控制指令估计器联合构成的自适应最佳滤波器。我们曾用阶跃、高斯和指数等三种机动指令

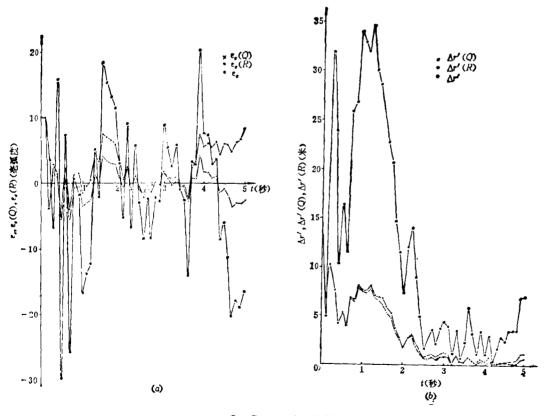


图 7 Q、R 失配时的效果

Fig. 7 Effect of mismatch for Q, R

建立自适应滤波算法并在计算机上模拟<sup>(6)</sup>。我们发现,对于建立在瞄准轴坐标系上的滤波的数学模型和采用复杂的自适应滤波的模型的效果十分接近。图 8 表示这两种滤波器对同一样本航迹跟踪的误差曲线。这进一步说明以瞄准轴坐标系建立的滤波的数学模型对目标的机动具有较宽的适应能力。但从图 8 看出,对测量噪声是灵敏的。由于雷达的信噪比可能在极大的范围内变化,采取对测量噪声的自适应处理措施是必须的。

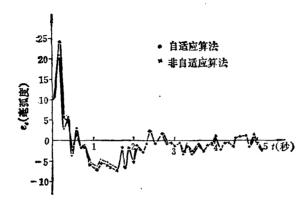


图 8 自适应最佳滤波和最佳滤波的误差曲线

Fig. 8 Error curves for odaptive optimal filter and optimal filter

## 五、后 记

本论文归纳了我们的部分研究成果。张有为、李少洪、靳淑良、张肇武、朱谷川、王 国英和张兴华等同志从不同的方面对这个课题进行了研究,并提供了有意义的 研究成果。 朱谷川同志绘制了全部计算曲线,在此一并致谢。

#### 参考文献

- [1] J. B. Pearson, "Kalman Filter Application in Airborne Radar Tracking", IEEE Trans. Vol. AES-10, May 1974, pp. 319-329.
- [2] A.H. Jazwinski, Stochastic Processes and Filter Theory, Academic Press, New York, 1970.
- [3] D. Snyder, The State-Variable Approach to Continuous Estimation with Application to Analog Communication Theory, M. I. T Press, 1969.
- [4] D. J. Povejsil, Airborne Radar, D. Van Nostrand Company, Inc. 1961.
- [5] 柴田实, 穗坂三四郎, "采用卡尔曼滤波器提高机载雷达跟踪精度", 现代雷达, 1981, No. 1。
- [6] 毛士艺,王国英,"雷达中的非线性滤波问题",北京航空学院科学研究报告,BH-B684,1981。
- [7] 李少洪,张兴华,"机载雷达距离跟踪系统应用 $\alpha-\beta-\gamma$  滤波与卡尔曼滤波的性能比较",北京航空学院科学研究报告,BH-B805,1982。
- [8] 朱谷川,张有为,"应用卡尔曼滤波器的空载雷达跟踪系中目标机动识别与自适应的新考虑",北京航空学院科学研究报告,BH-B806,1982。
- [9] R.L. Moose, "An Adaptive State Estimation to the Maneuvering Target Problem", IEEE Trans. Vol AC-20, June 1975, pp. 359-362.
- [10] R. L. Moose, H. F. Vanlandingham, and D. H. McCabe, "Modeling and Estimation for Tracking Maneuvering Target", IEEE Trans. Vol. AES-15, May 1979, pp. 448-456.

# AIRBORNE RADAR TRACKING SYSTEM BASED ON OPTIMAL FILTERING THEORY

#### Mao Shiyi

(Beijing Institute of Aeronautics and Astronautics)

#### Abstract

In this paper, a filtering theory is applied to the multiple closed-loop feed-back system for tracking a single target in range, velocity, azimuth and elevation in an airborne radar. First of all, according to relative motion between arget and antenna, the vector differential equation of the states used to control the four tracking loop is established. Then, the corresponding nonlinear filtering algorithm is derived. Finally, the results of computer simulation are given.

The results of computer simulation show that in a wide range the time varying system using Kalman filter can keep better performance than the ordinary one without optimal filter. The system involving nonlinear filtering has a performance closed to the linear filtering one in steady-state response, but the former achieves performance improvement in transient response and in large error. Using Kalman filter, the tracking loops are coupled each other, and its performance is better than that of seperate loops. Finally, we show that a particular merit of this mathematical model, established in aim coordinate system, is less sensitive to target's manoeuvre. Therefore, the system performance is almost as good as an adoptive estimator, but which is sensitive to measurement noise. As the signal to noise ratio of radar varies in a wide range, we should take adaptive method in measuring noise.

The technique used and results obtained are also available for ground radar, shipborne radar and other tracking systems, either active or passive.