

# 用有限元素法分析转子-轴承系统动力学

南华动力机械研究所 欧园霞 李平

## 摘 要

本文采用有限元素法分析转子-轴承系统的动力学问题。给出了模拟转子-轴承系统的动力分析程序 (FEPRS程序), 该系统由刚性盘、弹性分布参量有限转子元素及离散轴承组成。用该程序能计算任何复杂转子系统在各种进动状态下的进动频率, 并由计算机自动绘制相应的振型曲线。

## 一、前 言

本文采用有限元素法建立数学模型。在 Nelson<sup>[1]</sup>论著的基础上利用正交旋转矩阵实现坐标变换, 在固定的和旋转的两种坐标系内建立各元素以及整个系统的运动方程。然而, 文献[1]中未考虑剪切变形的影响, 这对航空工程中常见的转子来说将会导致较大误差。本文将 Nelson 的元素推广到考虑剪切变形的影响, 这对复杂的发动机来说是很重要的。

程序用 FORTRAN-IV 语言编制而成, 在 M150 机及 FELIXC-512 计算机上调试完成。源程序语句约 2000 条。为了考证该程序的计算精度, 我们进行了大量实例分析与试验作了比较, 结果是令人满意的。

## 二、坐标系与运动方程

### 1. 坐标系

本文建立了如下三种坐标

- (1) 固定坐标—— $XYZ$  (简称  $F$  坐标) (见图 1);
- (2) 旋转坐标—— $xyz$  (简称  $R$  坐标) (见图 1);
- (3) 横截面坐标—— $abc$  (简称  $C$  坐标) (见图 2)。

图 1 中  $X$  和  $x$  是共线的, 与变形前的转子中心线重合。 $\omega$  为转子进动角速度。以  $Y$  向位移  $V(s, t)$  和  $Z$  向位移  $W(s, t)$  确定弹性中心线相对于  $F$  的位置, 以绕  $Y$  轴的转角  $B(s, t)$  和绕  $Z$  轴的转角  $\Gamma(s, t)$  确定横截面相对于  $F$  的方位。图 2 中  $C$  坐标由  $\Gamma$ 、 $B$ 、 $\Phi$  三个逐次旋转角来确定。其中  $\Phi = \Omega t$ ,  $\Omega$  为自转角速度。

对坐标实行正交旋转变换, 横截面相对于  $F$  坐标的位移  $\{q\}$  以及相对于  $R$  坐标的位

1983年10月6日收到。

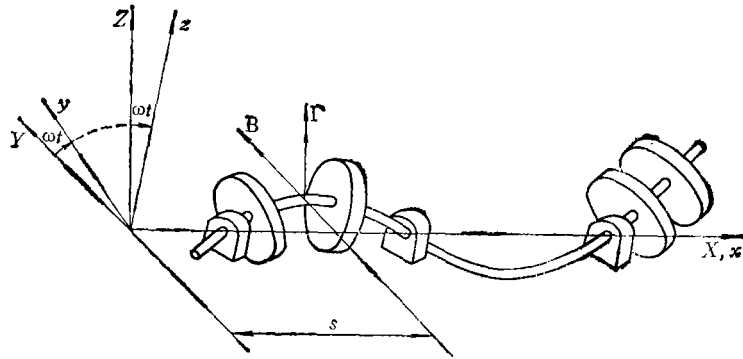


图 1 F-R 坐标系

Fig.1 F-R Coordinate systems

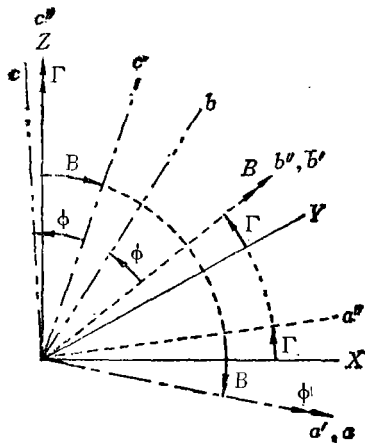


图 2 横截面的转角

Fig.2 Cross section rotation angles

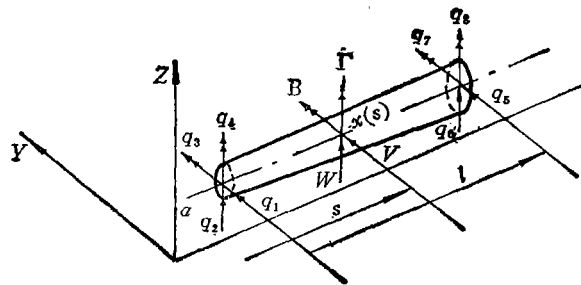


图 3 轴元素和坐标

Fig.3 Shaft element and Coordinate

移  $\{p\}$  满足以下关系式

$$\{q\} = [R]\{p\} \tag{1}$$

式中  $\{q\} = [V \ W \ B \ \Gamma]^T$ ,  $\{p\} = [v \ w \ \beta \ \gamma]^T$

$[R]$  为正交旋转矩阵。

2. 元素运动方程

轴元素 (见图 3) 随时间而变化的位移  $\{q^e\}$  也是轴线位置 ( $s$ ) 的函数, 轴元素端点位移为

$$\{q^e\} = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6 \ q_7 \ q_8]^T \tag{2}$$

元素内任意一点  $x(s)$  的位移为

$$[V \ W]^T = [\Psi(s)]\{q^e(t)\} \tag{3}$$

$$[B \ \Gamma]^T = [\Phi(s)]\{q^e(t)\} \tag{4}$$

其中  $[\Psi(s)]$ 、 $[\Phi(s)]$  分别为平动、转动形函数阵

$$[\Psi(s)] = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & 0 & \psi_2 & \psi_3 & 0 & 0 & \psi_4 \\ 0 & \psi_1 & -\psi_2 & 0 & 0 & \psi_3 & -\psi_4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\Phi(s)] = \begin{bmatrix} [\Phi_B] \\ [\Phi_r] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\phi_1 & \phi_2 & 0 & 0 & -\phi_3 & \phi_4 & 0 \\ \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & \phi_3 & 0 & 0 & \phi_4 \end{bmatrix}$$

式中

$$\begin{cases} \psi_1 = \frac{1}{1 + \phi_r} (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 + (1 - \xi)\phi_r) \\ \psi_2 = \frac{1}{1 + \phi_r} \left( \xi - 2\xi^2 + \xi^3 + \frac{1}{2} (\xi - \xi^2)\phi_r \right) l \\ \psi_3 = \frac{1}{1 + \phi_r} (3\xi^2 - 2\xi^3 + \xi\phi_r) \\ \psi_4 = \frac{1}{1 + \phi_r} \left( -\xi^2 + \xi^3 - \frac{1}{2} (\xi - \xi^2)\phi_r \right) l \\ \phi_1 = \frac{1}{1 + \phi_r} \left( \frac{1}{l} (6\xi^2 - 6\xi) \right) \\ \phi_2 = \frac{1}{1 + \phi_r} (1 - 4\xi + 3\xi^2 + (1 - \xi)\phi_r) \\ \phi_3 = \frac{1}{1 + \phi_r} \left( \frac{1}{l} (-6\xi^2 + 6\xi) \right) \\ \phi_4 = \frac{1}{1 + \phi_r} (3\xi^2 - 2\xi + \xi\phi_r) \end{cases}$$

其中  $\xi = \frac{s}{l}$ ,  $\phi_r = \frac{12EI^e}{GA_r l^2}$

$\phi_r$  为剪切变形系数。有效抗剪面积  $A_r$  根据经验公式插值得到。

列出位于  $(s)$  处的微小圆盘能量并沿元素全长积分得到元素能量，再利用拉格朗日公式可得轴元素相对于  $F$  坐标的运动方程

$$([\hat{M}_T^e] + [M_R^e]) \{\ddot{q}^e\} - \Omega [G^e] \{\dot{q}^e\} + ([K_B^e] - [K_A^e]) \{q^e\} = \{Q^e\} \quad (5)$$

相对于  $R$  坐标的方程可用  $[R]^T$  左乘式 (5) 两边获得：

$$([\hat{M}_T^e] + [M_R^e]) \{\ddot{p}^e\} + \omega (2[\hat{M}_T^e] + (1 - \nu)[G^e]) \{\dot{p}^e\} + ([K_B^e] - [K_A^e]) - \omega^2 ([M_T^e] + (1 - 2\nu)[M_R^e]) \{p^e\} = \{Z^e\} \quad (6)$$

刚性盘及轴承相对于  $F$  的运动方程分别为

$$([\hat{M}_T^d] + [M_R^d]) \{\ddot{q}^d\} - \Omega [G^d] \{\dot{q}^d\} = \{Q^d\} \quad (7)$$

$$[C^b] \{\dot{q}^b\} + [K^b] \{q^b\} = \{Q^b\} \quad (8)$$

它们相对于  $R$  的运动方程分别为

$$([\hat{M}_T^d] + [M_R^d]) \{\ddot{p}^d\} + \omega (2([\hat{M}_T^d] + [\hat{M}_R^d]) - \nu [G^d]) \{\dot{p}^d\} - \omega^2 ([M_T^d] + [M_R^d]) + \nu [\hat{G}^d] \{p^d\} = \{Z^d\} \quad (9)$$

$$[R]^T [C^b] [R] \{\dot{p}^b\} + [R]^T [K^b] [R] \{p^b\} = \{Z^b\} \quad (10)$$

以上各式中  $[K]$ 、 $[M]$ 、 $[C]$ 、 $[G]$  分别为刚度、质量、阻尼、陀螺效应矩阵； $Q$ 、 $Z$  为外力矢量； $\nu$  为进动状态系数  $\left( \nu = -\frac{\Omega}{\omega} \right)$ ； $[\hat{M}]$ 、 $[\hat{G}]$  为变换矩阵； $[\hat{M}] = [R]^T [M] [S]$ ，

$$\{\dot{G}\} = \{R\}^T \{G\} \{S\}, \{S\} = \frac{1}{\omega} \{\dot{R}\}.$$

### 3. 系统运动方程

系统运动方程由元素运动方程组装得到, 系统相对于  $F$  坐标及  $R$  坐标的方程分别为

$$\{M^s\} \{\ddot{q}^s\} - \Omega \{G^s\} \{\dot{q}^s\} + \{K^s\} \{q^s\} = \{Q^s\} \quad (11)$$

$$\{M^s\} \{\ddot{p}^s\} + \omega (2 \{\hat{M}^s\} - \nu \{G^s\}) \{\dot{p}^s\} + (\{K^s\} - \omega^2 (\{M^s\} + \nu \{\hat{G}^s\})) \{p^s\} = \{Z^s\} \quad (12)$$

## 三、广义特征值与特征向量的求解

系统的特征对由方程 (11)、(12) 的齐次形式均可求出。本文取方程 (12) 的齐次形式, 并设解的形式为  $\{p^s\} = \{p_0^s\} = \text{常数}$ , 代入方程 (12) 得系统特征方程

$$\{K^s\} \{p_0^s\} = \omega^2 (\{M^s\} + \nu \{\hat{G}^s\}) \{p_0^s\} \quad (13)$$

系统的进动频率及振幅可通过对方程 (13) 的广义特征值及特征向量的求解获得。


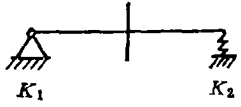
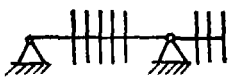
值得指出的是: 对于转子来说, 系统的陀螺效应矩阵是非对称的, 对由它们构成的特征方程在数学上进行求解是较困难的, 为此本文建立了多种坐标系, 利用正交旋转矩阵进行坐标变换, 使得特征方程中只含有  $\{\hat{G}^s\}$  (对称非正定), 而避开了非对称的陀螺效应矩阵。

## 四、算 例

我们利用 FEPRS 程序对常见发动机进行了大量计算, 并与有关资料及试验值进行了比较, 误差均在工程允许范围内, 以下仅举几例 (见表 1)。

表 1 算例及结果

Table 1 Examples and results

转子名称	计 算 模 型	原始 数据	进动 系数 $\nu$	本程序结果 $n$ (转/分)	比 较 结 果		误 差	备 注
					$n$ (转/分)	来 源		
双支点等 截面轴			1	26432	26379	精确解	0.2%	
				106572	105516			
				244282	237341			
截面轴			0	26265				
				103906				
				230630				
单盘转子		文献 [4]	1	2051	2170	试验值	5.4%	两端刚支 $K_2 = 1137$ (公斤/厘米) $K_1 = 307$ (公斤/厘米)
				32732	2120	试验值	6.3%	
				1985	1870	试验值	2%	
多盘转子		文献 [2]	1	1832	2228	文献	5.7%	
				12819	4445	[2]	6.1%	
				2357				

## 五、结 论

计算误差大小主要取决于如下两方面：(1) 计算模型简化的合理性，尤其是各种支承条件的简化；(2) 计算方法本身对系统模拟的逼真程度。

有限元素法仅视盘和轴承是离散的，而把轴看成是由无限多微小盘组成的整体，因此对转子-支承系统模拟逼真。尤其是本文考虑了剪切变形影响，这对航空发动机转子来说是极重要的因素。计算表明：无论是简单模型或复杂模型，结果都是令人满意的。

我们在完成此项工作过程中曾得到北京航空学院晏砺堂教授、国防科技大学刘瑞岩老师及中国科学院计算中心蔡中熊同志的热情指导和帮助，在此表示衷心感谢！

### 参 考 文 献

- [1] Nelson, H. D. and Mcvaugh, J. M., The Dynamics of Rotor-Bearing Systems Using Finite Elements, *Journal of Engineering for Industry, Transaction of the ASME, Vol. 98, (1976), pp. 593~600.*
- [2] Ekong, L. E., Eshleman, R. L., Bonthron, R. J., "Dynamics of Continuous Multimass Rotor Systems", *Proceedings of the Vibrations Conference Vol. 2, (1969).*
- [3] 王德荣等译校, 矩阵结构分析理论, 国防工业出版社, (1974)。
- [4] 黄太平, 弹性支承轴系临界转速的分析与试验, 中国航空学会发动机结构强度振动学学术会议论文集, (1981)。

## DYNAMIC ANALYSIS OF ROTOR-BEARING SYSTEMS BY FINITE ELEMENT METHOD

*Ou Yuanxia and Li Ping*

*(Nanhua Powerplant Research Institute)*

### Abstract

The finite element method is used to analyze dynamic problems of rotor-bearing systems. The system motion equations are presented in a fixed and a rotating coordinate systems. Nelson's element is extended to considering transverse shear effects, which are of great importance for complicated aircraft engines.

A program (FEPRS) is presented for dynamic modelling of the rotor-bearing system which consists of rigid disks, distributed parameter finite rotor elements and discrete bearings. The whirl frequencies can be calculated for complicated rotor-bearing systems in various whirl states, and mode shapes can be automatically drawn by implementing this program on a computer. A lot of practical examples have been analyzed. The results are satisfactory in comparison with experimental data.