第7卷 第6期　　航　空　学　报　　Vol. 7 No. 6
1 9 8 6 年12月　　ACTA AERONAUTICA ET ASTRONAUTICA SINICA　　Dec. 1986

振动系统参数识别的三个新方法

哈尔滨工业大学

邵成勋　黄文虎　刘华　赵美德　王德明

一、引　　言

近年来，振动系统参数识别技术受到了越来越多的重视[1,2]。振动系统参数识别的谱分析方法（频域方法）发展得比较成熟。但它也有一些缺点，其中之一是需要了解激振力。通常在实验室条件下，激振力尚可测量，但在机器运行的现场条件下，对激振力的测量往往是很困难的，有时甚至是不可能的。因此本文侧重于时域中的或时域与频域结合的识别方法的研究。

现有的振动参数识别方法，多数使用确定型数学模型，即不考虑噪声的影响。这些方法不能得到高度准确的识别结果。

本文提出了三个新的识别方法，目的在于提高从被噪声污染的信号中识别模态参数和物理参数的准确性，并且不需激振力，只由响应信号识别振动参数。这些方法是极大似然法、Prony 算法和有限元反问题方法。数字模拟结果及悬臂梁试验结果，表明了这些方法是可行的。

二、极大似然法

极大似然法是一个发展得比较成熟的随机系统识别方法[4]。我们将它用于振动系统参数识别。设有一个 n 自由度振动系统

$$M\ddot{q}+C\dot{q}+Kq=Lf \tag{1}$$

其中 M，C，K 分别是质量、阻尼和刚度矩阵，f 是激振力。（1）式可以表达成状态方程

$$\dot{x}=Fx+\Gamma f+W \tag{2}$$

和测量方程

$$y=HxfV \tag{3}$$

待识别参数 θ 是 M，C，K，（因而也就是 F）中的元素。我们拟从测量 y 识别参数 θ。（2）式和（3）式中 W 和 V 是噪音。我们记顺序观测的测得值序列为 $\{y(k), k=1, 2, \cdots, N\}$，它可以看做是一个随机过程。极大似然法的基本思想是用这个随机过程和待定参数构造一个似然函数，再通过极大化这个似然函数来估计未知参数 θ。似然

1986年3月12日收到，中国科学院科学基金资助课题。

函数 $L(\theta, y_N)$ 取为诸观测值的联合条件概率密度，即

$$L(\theta, y_N)=p(y(1))p(y(2)|y_1)p(y(3)|y_2)\cdots p(y(N)|y_{N-1}) \tag{4}$$

其中 y_k 表示截止 k 时刻的全部观测值，$p(y(k)|y_{k-1})$ 是 $y(k)$ 在 k 时刻的条件概率密度。如果它们是正态分布的，可以证明极大化似然函数等价于极小化以下目标函数[3,5]

$$J(\theta)=\log\det\hat{B}(\theta) \tag{5}$$

其中 $\hat{B}(\theta)$ 是条件协方差矩阵 B 的估计值

$$\hat{B}(\theta)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}e_ie_i^T \tag{6}$$

而

$$e_i=y(i)-\hat{y}(i) \tag{7}$$

称为预估误差，是具有零均值并设为正态分布的随机变量。$\hat{y}(i)$ 是 $y(i)$ 的估计值。由极小化 $J(\theta)$ 而得出的估值 $\hat{\theta}$ 将是参数 θ 的一致估值。预估误差 e_i 由 Kalman 滤波器获得，而识别问题最后被化为一个多变量的非线性优化问题。它可由 Newton-Raphson 方法迭代求解，即

$$\theta_{i+1}=\theta_i-\left(\frac{\partial^2 J}{\partial\theta^2}\right)^{-1}\left(\frac{\partial J}{\partial\theta}\right) \tag{8}$$

其中 $\frac{\partial J}{\partial\theta}$ 和 $\frac{\partial^2 J}{\partial\theta^2}$ 分别是目标函数 $J(\theta)$ 的梯度矩阵和 Hess 矩阵。计算流程如图 1。

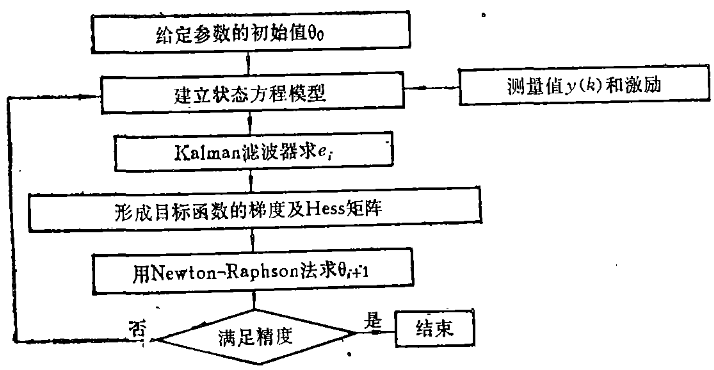

图 1　极大似然法计算流程示意图

用极大似然法计算了两个数字模拟例子：

例 1 是一个两自由度系统，给定数据为

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0.187 & -0.111\\ -0.022 & 0.150\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}3.75 & -3.75\\ -0.75 & 2.5\end{bmatrix}$$

识别结果见表 1。

例 2 为四自由度系统，识别结果见表 2。本例只在两个自由度取了测点。

表 1 双自由度系统识别结果

参 数	给定值	识别值	
		$SNR_1=10dB$, $SNR_2=5dB$	$SNR_1=20dB$, $SNR_2=15dB$
K_{11}	3.75	3.7464	3.750
K_{12}	-3.75	-3.7873	-3.763
K_{21}	-0.75	-0.7497	-0.7488
K_{22}	2.50	2.5156	2.503
C_{11}	0.187	0.1880	0.1816
C_{12}	-0.117	-0.115	-0.0707
C_{21}	-0.022	-0.0493	-0.0298
C_{22}	0.150	0.156	0.1511

表 2 四自由度系统识别结果

参 数	给定值	识别值	
		$SNR_1=15dB$, $SNR_2=14dB$	$SNR_1=25dB$, $SNR_1=24dB$
K_1	3000	3103.08	3107.52
K_2	3000	2985.6	2978.14
K_3	3000	2985.5	3016.98
K_4	7000	6946.92	6997.19
C_1	89	26.21	71.81
C_2	89	89.87	82.23
C_3	89	67.40	89.04
C_4	207	207.5	204.5

三、Prony 识别算法

Prony 复指数模型是一种数据拟合模型，它用指数函数的线性组合代表一个等距的采样数据。这个模型对于振动系统的自由响应，是个很好的模型。响应的采样值 x_K 可表达为

$$x_K=\sum_{i=1}^{p}A_i\mu_i^K,\quad K=1,\ 2,\ \cdots,\ N-1 \tag{9}$$

其中 $\mu_i=\exp(\lambda_i\Delta)$； Δ 是采样周期； A_i 在这里称为留数； λ_i 称为极点。若测量的采样信号为

$$y_K=x_K+e_K \tag{10}$$

其中 e_K 是白噪声随机序列，则可以得出一个 ARMA 模型[3,6]，

$$y_K=-\sum_{i=1}^{p}a_iy_{K-i}+\sum_{j=1}^{p}a_je_{K-j},\quad K=p,\ p+1,\ \cdots,\ N-1 \tag{11}$$

它的 AR 系数与 MA 系数相同。建议的 Prony 算法，用反向滤波技术和辅助变量法估计 AR 系数 a_i，再由谱分析方法确定系统的模态参数。为了确定模型阶数 p 并剔除由噪音引入的虚假模态，建议了如下的准则：在复平面内，对应于真实模态的极点位于单位圆外。

用 Prony 识别算法计算了两个例子。第一个是信噪比为零分贝的单自由度模型。结果见表 3。

另一个是信噪比为 30dB 的四自由度模型，结果列于表 4。文献〔3〕中还给出了重

频率情况和六自由度系统的识别结果，精度都很高。

表 3　单自由度系统识别结果

	频率 f	阻尼因子 ξ_1	幅值系数	
			A	B
给定值	10.0	1.0	1.0	1.0
估计值	9.957	0.992	1.048	1.035
误　差	0.43%	0.77%	4.8%	3.5%

表 4　四自由度系统识别结果

	频率				阻尼因子			
	f_1	f_2	f_3	f_4	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4
给定值	5.1	10.1	15.1	20.1	0.21	0.81	0.11	0.055
估计值	5.1008	10.1002	15.1017	20.099	0.2039	0.8089	0.1153	0.0586
误差	0.02%	0.01%	0.01%	0.01%	2.9%	0.14%	4.8%	6.5%

四、有限元反问题技术

有限元反问题技术是将固体力学中的有限元法与数学中的微分方程反问题中的脉冲谱技术结合起来，从测量的响应信号识别结构的分布刚度的一种方法[3,7]。

考虑一个梁，已知边界条件、初始条件及辅助条件。用傅氏变换或拉氏变换将系统由时域变换到频域。结构的质量 $m(x)$ 和原始刚度 $k_0(x)$ 是已知的，但由于结构中的故障又引起刚度的微小变化 $K_1(x)$。因此，在与原始刚度 $K_0(x)$ 对应的原始位移 $V_0(x,\ \omega)$ 之外，将产生一位移摄动 $V_1(x,\omega)$，利用摄动法可建立附加的微分方程[7]

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(K_0(x)\frac{d^2V_1}{dx^2}\right)-\omega^2m(x)V_1=-\frac{d^2}{dx^2}\left(K_1(x)\frac{d^2V_0}{dx^2}\right)\tag{12}$$

及相应的边界条件和辅助条件。与（12）式等价的变分问题是极小化泛函

$$J(V_1)=\int_a^b\left\{K_0(x)\left(\frac{dV_1}{dx}\right)^2-\omega^2m(x)V_1^2\right\}dx-2\int_a^bK_1(x)\left\{-\frac{d^2V_0}{dx^2}\frac{d^2V_1}{dx^2}\right\}dx\tag{13}$$

将结构离散为有限单元，可得

$$[\boldsymbol{A}]\{\delta\}=[\boldsymbol{B}]\{K_1\}$$

δ 是节点位移；K_1 是离散化的刚度参数。对不同的 $\omega=\omega_j$，$j=1,\ 2,\ \cdots,\ M$，使用辅助条件，可以得到M个方程，并最后确定出 $\{K_1\}$。数字模拟结果见图 2。

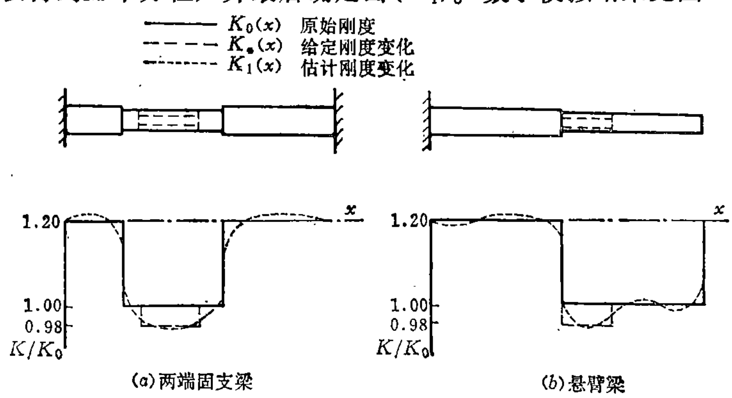

图 2　识别梁刚度变化的数字模拟结果

五、结 束 语

本文叙述了识别系统振动参数的三个新的方法。极大似然法是在时域内建立的，可识别结构的物理参数并进而求得模态参数。Prony 识别算法是一个混合的方法，应属于现代谱分析的一种方法。这两个方法在较低信噪比情况下，都可以相当准确的识别振动参数。有限元反问题方法是一种频域的方法，它可以直接识别物理参数。采用有限元方法，使这种方法可以处理各种复杂形状的结构。

参 考 文 献

〔1〕 Natke, H. G. Ed., Identification of Vibrating Structures, Springer-Verlag, (1982).

〔2〕 黄文虎等，近代振动系统参数识别技术的发展与展望，应用力学学报，2，3 (1985)。

〔3〕 黄文虎等，结构振动参数识别的几个理论、方法及应用问题，中国科学院科学基金资助的课题研究报告，哈工大科研报告 (1986年) 第1期。

〔4〕 Astrom, K. J., Maximum Likelihood and Prediction Error Method, Automatica, 16 (1980), 551-574.

〔5〕 Shao, C. X., etc., Identification of Vibrating System Parameters By Maximum Likelihood Method, ASME Paper 85-DET-109, (1985).

〔6〕 赵美德等，从自由响应中识别振动系统参数的 Prony 方法，哈工大科研报告 (1985年) 第3期，(将发表于振动与冲击)。

〔7〕 王德明等，结构故障诊断中的有限元反问题方法，应用力学学报，3，1，(1986)。

THREE NEW APPROACHES FOR THE PARAMETER IDENTIFICATION OF A UIBRATING SYSTEM

Shao Chengxun, Huang Wenhu, Liu Hua,

Zhao Meide and Wang Deming

(Harbin Institute of Technology)

Abstract

Described in this paper are three new approches for the parameter identification of a vibrating system, devoted to improve the accuracy of identifying modal and physical parameters from measurements with noisy signals and to identify the distributed structural parameters directly from response signals without resort to applied force information. The techniques presented here-in are the Maximum Likelihood Method, the Prony Identification Algorithm, and the Finite Element Inverse Method.