

求解结构动力反问题的逆特征值方法

中国航空计算技术研究所 宋增浩 高福安 刘瑞庆

摘 要

设计一个结构,使其具有事先给定的频率和(或)振型,这类结构动力反问题有重要的应用和理论价值。本文提出了求解它的逆特征值方法,并给出了数值例子。算例一说明:逆特征值方法的计算精度要比反摄动法高得多。经过实验验证的算例二表明:计算值、目标值和实验值十分吻合。

一、序 言

如果一个结构已给定,那么,由于现代计算技术的发展,一般总可以比较精确地计算出它的模态形状和固有频率。但若把问题反过来,即怎样确定一个结构,使其具有事先给定的振频和(或)振型,则至今仍是一件十分困难的工作。

目前解决这类反问题,大多数仍采用试凑的办法^[2],即根据经验先给出一个初始结构,然后对其反复进行修改,直到满足要求为止。这必然造成设计周期长、投资大、难于保证质量,容易漏掉一些满足要求的结构布局,有时甚至会得出错误的结论,以为没有满意的设计存在。

有人试图利用反摄动理论解决上述反问题^[1],但因计算误差大,限制了它在工程实际中的应用。

如果在结构中引入一组可变参数,那么,上述反问题就变为如何选择这些参数,使得结构的固有频率和振型满足事先给定的值。我们从飞机机翼吹风模型设计这个典型的结构动力反问题出发,提出了一个求解带约束广义逆特征值问题的算法,并用标准FORTRAN语言编制了通用程序。通过大量算例的考验,我们已成功地将该方法应用于理论物理和航空工程。

为了可靠并验证计算精度,我们专门组织了二项验证性试验。该试验采用全息干涉计量术进行振动测量,结果表明:我们的计算结果与目标值和实验值相当吻合^[4,5]。

本文提出的算法既可用于振型和振频同时给定的情况,也适用于只要求振频给定的情况。而且,所给定的振型和(或)振频的阶数可以任意提出。算法也考虑到结构设计中最可能的约束条件,因此使用比较方便。另外,算法采用随机数产生初值,适宜于结构的动力修改或振动设计。本算法计算精度高,收敛性有保证,程序简洁,易于实现结构动力设计的自动化。

1985年10月12日收到。

二、问题的提出及数学描述

采用有限元方法可以把计算结构的固有特性归结为求解一个广义特征值问题, 即

$$Kq = \lambda Mq \quad (1)$$

若结构中含有可变参数, 则刚度矩阵 K 和质量矩阵 M 的元素都是这些参数的函数, 于是 (1) 式可写成

$$K(p_1, \dots, p_r)q = \lambda M(p_1, \dots, p_r)q \quad (2)$$

我们的目的就是求出参数值 p_1^*, \dots, p_r^* , 使得

$$K(p_1^*, \dots, p_r^*)q = \lambda M(p_1^*, \dots, p_r^*)q \quad (3)$$

有事先给定的特征值 $\lambda_1^*, \dots, \lambda_r^*$ 和对应的特征向量 q_1^*, \dots, q_r^* , 即

$$K(p_1^*, \dots, p_r^*)q_i^* = \lambda_i^* M(p_1^*, \dots, p_r^*)q_i^* \quad (4)$$

$$i = 1, 2, \dots, r$$

如前所述, 刚度矩阵 K 和质量矩阵 M 是可变参数的函数, 因而特征值和特征向量也是可变参数的函数。结构动力反问题的实质就是确定参数值 p_1, \dots, p_r , 使得

$$\left. \begin{aligned} \lambda_i(p_1, \dots, p_r) &= \lambda_i^* \\ q_i(p_1, \dots, p_r) &= q_i^* \quad i = 1, 2, \dots, r \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

显然, 上式实际上是 $r(n+1)$ 个方程, 其中 n 是 K 和 M 的阶数。

如对参数值不加任何限制, 且给定结构的全部特征值和对应的特征向量, 则结构动力反问题就变成求解 (5) 式这样一个非线性方程组。但实际问题中, 一般不可能, 也没有必要给定一个结构的所有特征值及对应的特征向量; 而且, 往往要对参数的取值范围加以限制。最常见的是对参数增加上下界约束和对参数的某个函数进行约束。这样, 问题就归结为求参数值 p_1, \dots, p_r , 使 (5) 式成立并满足约束条件

$$g_i \leq p_i \leq h_i \quad i = 1, 2, \dots, s \quad (6)$$

$$L_j \leq C_j(p_1, \dots, p_r) \leq S_j \quad j = 1, 2, \dots, t \quad (7)$$

我们把这种给定特征值和特征向量, 在某些约束条件下求矩阵中参数值的问题, 称为带约束的广义逆特征值问题。

三、算法概述

一般地, 如果矩阵中含有参数, 那么, 特征值和特征向量就是这些参数的相当复杂的非线性函数。若矩阵 A 是对称的, 其元素又是参数的线性函数, 那么就有^[3]

$$A = A_0 + \sum_{i=1}^s p_i A_i, \quad A_i^T = A_i \quad (8)$$

假定 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 是矩阵 A_0 的特征值, x_1, \dots, x_n 是与之相应的特征向量, 就可以把 A 的特征值 μ_k 和特征向量 y_k 表示成参数 p_1, \dots, p_s 的幂级数, 令

$$\mu_k = \lambda_k + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\Sigma_i = m} \lambda_{i_1 \dots i_s} p_1^{i_1} \dots p_s^{i_s} \quad (9)$$

$$y_k = x_k + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\Sigma_i=m} x_{i_1-i_r} p_1^{i_1} \cdots p_s^{i_s} \tag{10}$$

其中 $\Sigma_i = i_1 + i_2 + \cdots + i_s$ 。我们可以证明在“立方体” $|p_i| \leq R$ 内，级数 (9) 式、(10) 式收敛，并给出 R 的界。

把式 (9) 和式 (10) 代入 $Ay_k = \mu_k y_k$ 中，可得到

$$\begin{aligned} & \left(A_0 + \sum_{i=1}^s p_i A_i \right) \left(x_k + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\Sigma_i=m} x_{i_1-i_r} p_1^{i_1} \cdots p_s^{i_s} \right) \\ &= \left(\lambda_k + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\Sigma_i=m} \lambda_{i_1-i_r} p_1^{i_1} \cdots p_s^{i_s} \right) \\ & \times \left(x_k + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\Sigma_i=m} x_{i_1-i_r} p_1^{i_1} \cdots p_s^{i_s} \right) \end{aligned} \tag{11}$$

在 (11) 式的两边，常数项必定是相等的，因为 λ_k 和 x_k 是 A_0 的特征值和对应的特征向量，令 $p_1^{i_1} \cdots p_s^{i_s}$ ($\Sigma_i = r$) 的项相等，则有

$$\begin{aligned} A_0 x_{i_1-i_r} + \sum_{j=1}^s A_j x_{i_1^{(j)}-i_r} &= \sum_{t=0}^r \sum_{\Sigma_k=t} \lambda_{k_1-k_r} x_{(i_1-k_1)-(i_r-k_r)} \\ &= \lambda_k x_{i_1-i_r} + \lambda_{i_1-i_r} x_k + \sum_{t=1}^{r-1} \sum_{\Sigma_k=t} \lambda_{k_1-k_r} x_{(i_1-k_1)-(i_r-k_r)} \end{aligned} \tag{12}$$

这里， $x_{i_1^{(j)} \cdots i_r} = x_{i_1 - (i_j - 1) i_j + 1 - i_r}$ ，且 $\lambda_{0 \cdots 0} = \lambda_k$ ， x 如具有负脚标，则其系数都以零代之。可以证明

$$R = 1 / (4Msd), \tag{13}$$

其中，

$$\begin{aligned} M &= \text{Max}_{1 \leq i \leq s} \|A_i\| \\ d &= (n-1) / \min_{j \neq K} |\lambda_k - \lambda_j| \end{aligned} \tag{14}$$

当参数是非线性时，也有类似的结果。

显然，直接求解式 (5)~式 (7) 是困难的。为了寻求可行的算法，我们由一个 s 维向量 $p = (p_1, \dots, p_r)^T$ 和 r 个 n 维向量 q_1, \dots, q_r 构造一个泛函

$$F(p, q_1, \dots, q_r) = \sum_{j=1}^r \omega_j q_j^T H_j(p) q_j \tag{15}$$

其中 $H_j(p)$ 是一个包含已知特征值和刚度矩阵、质量矩阵的二阶非负算子， ω_j 是大于或等于零的权因子。当且仅当

$$K(p^*) q_j^* = \lambda_j^* M(p^*) q_j^*, \quad j = 1, 2, \dots, r \tag{16}$$

时，泛函 $F = 0$ 。于是，我们就把原来的广义逆特征值问题 (5) 式~(7) 式化为一个带约束的二次泛函的极小化问题。由于我们构造出的算子 $H_{j(p)}$ 包含特征值，因而当振频和振型同时给定时，利用 (15) 式是方便的。在求解只要求振频给定的动力反问题时，可用当前的振型值代入 (15) 式进行迭代计算。

求解 (15) 式这类极值问题的算法, 大都是先给出一个初始近似, 然后按一定的搜索方向求得新的近似, 在得到满足精度要求的近似点后, 即可结束计算。为避免求导数和数值求导数误差对结果的影响, 则可采用直接搜索的方法, 初值可借助随机数自动生成。

四、算 例

1. 弹簧质量系统

我们取文献〔1〕中的弹簧质量系统作为算例。如图 1 所示, 令 $m_1 = m_2 = m_3 = m$, 每

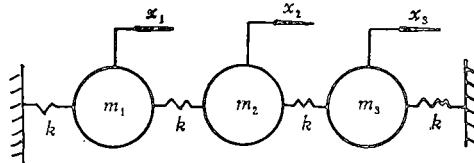


图 1 弹簧质量系统

个弹簧的刚度为 k , 则系统的特征行列式就是

$$D = \begin{vmatrix} 2k - m_1\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k - m_2\omega^2 & -k \\ 0 & -k & 2k - m_3\omega^2 \end{vmatrix} \quad (17)$$

从而求得该系统的固有频率

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= (2k/m)^{1/2} (1 - 1/\sqrt{2})^{1/2} \\ \omega_2 &= (2k/m)^{1/2} \\ \omega_3 &= (2k/m)^{1/2} (1 + 1/\sqrt{2})^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

及模态

$$\Phi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \Phi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \Phi_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (19)$$

假定我们要使第一模态有给定的值

$$\Phi_1' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0.6 \\ 1.0 \\ 0.8 \end{bmatrix} \quad (20)$$

文献〔1〕用反摄动法进行求解, 其结果是

$$\Delta m_1/m = -0.39, \quad \Delta m_2/m = 0.05, \quad \Delta m_3/m = 0.29 \quad (21)$$

这里 Δm_1 , Δm_2 , Δm_3 分别表示为使系统达到 (20) 式所给定的目标而在第一、二、三个质量块上所增加 (或减少) 的质量数。为了达到同一目标, 用逆特征值方法计算所得的结果为

$$\Delta m_1/m = -0.43, \quad \Delta m_2/m = 0.024, \quad \Delta m_3/m = 0.28 \quad (22)$$

为了比较这两种方法的计算结果, 我们将它们分别代入式 (17)。精确解应使 D 等于零。式 (21) 代入后

$$D = -0.00702 \tag{23}$$

而 (22) 式代入后则有

$$D = 0.00003 \tag{24}$$

精确的振频、振型值应满足

$$(K - \omega^2 M)\Phi = 0 \tag{25}$$

(21)式代入后

$$(K - \omega_1^2 M)\Phi'_1 = \begin{bmatrix} 0.00720 \\ 0.00755 \\ 0.00227 \end{bmatrix} \tag{26}$$

而 (22) 式代入后的结果则为

$$(K - \omega_1^2 M)\Phi'_1 = \begin{bmatrix} -0.00001 \\ -0.00002 \\ -0.00001 \end{bmatrix} \tag{27}$$

十分清楚，逆特征值方法的计算精度要比反摄动法高得多。

2. 飞机机翼吹风模型

我们曾利用自己的逆特征值方法对二种型号的飞机机翼吹风模型进行了计算，并做了验证性试验。表 1 是仅给定振频时的结果，表 2 是振频和振型同时给定时的结果，图 2、图 3 是振频和振型同时给定时，某机吹风模型第三、第四阶计算结果、实验结果、目标振型节线的典型结果。我们可以看到：理论值、目标值和实验值之间十分吻合，采用本文的方法是令人满意的。

表 1 振频给定时结果之比较

阶数	频率 (Hz)	项目	要求达到的目标振频	计算值	实验值
1	82.3		82.3	86.5	86
2	272.3		272.3	271.8	271
3	408.1		408.1	401.6	446
4	630.8		630.8	628.5	630
5	902.3		902.3	920.8	839

表 2 振频和振型同时给定时结果之比较

阶数	频率 (Hz)	项目	要求达到的目标振频	计算值	实验值
1	93.2		93.2	98.8	99.5
2	313.3		313.3	311.9	315.9
3	457.0		457.0	456.7	412.0
4	695.7		695.7	684.7	661.5
5	1001.1		1001.1	999.9	1003.1

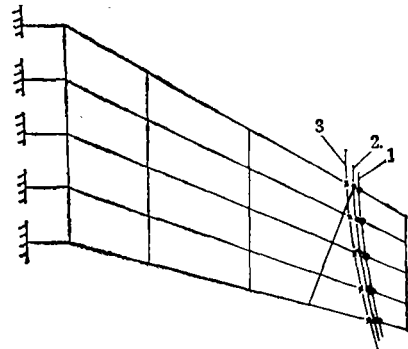


图 2 某机吹风模型三阶振型之比较 (比例1:16)

1 目标; 2 计算结果; 3 实验结果。

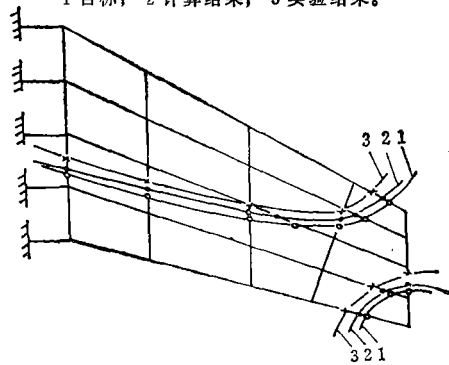


图 3 某机吹风模型四阶振型之比较 (比例1:16)

1 目标; 2 计算结果; 3 实验结果。

五、结 束 语

我们的算法计算效率是较高的,在对某由45根梁元组成的梁架式结构进行振动设计时,西门子 7760 计算机CPU时间仅108 s。目前,我们正在研制新的算法并形成自己的程序系统,以适应船舶、桥梁、建筑、飞行器、无线电、核工程、地球物理、自动控制、参数识别等方面的不同要求。

最后,我们衷心感谢钱令希教授、冯康教授、赵令诚教授对我们课题研究的支持和鼓励。

参 考 文 献

- [1] Stetson, K. A., Palma, G. E., Inversion of First-Order Perturbation Theory and its Application to Structural Design, AIAA Journal, Vol. 14 (1976), pp. 454~460.
- [2] 山川栄一,ヘリコプターの振動解析技術と振動設計,日本航空宇宙学会誌,(1975) 3, pp. 61~65.
- [3] 宋增浩,高福安,刘瑞庆,逆特征值问题研究与应用 技术总结,中国航空计算技术研究所技术报告,(1982年10月)。
- [4] 高福安,宋增浩,刘瑞庆,逆特征值问题研究与应用 计算和实验结果分析,中国航空计算技术研究所技术报告,(1982年) 10月。
- [5] 沈佩卿,龚鑫茂,陈蕃,李洲圣等,逆特征值算法验证性试验报告 激光测振法,西安飞机公司研究所技术报告。(1982年10月)。

THE INVERSE EIGENVALUE ALGORITHM FOR RESOLVING THE INVERSE PROBLEMS OF STRUCTURAL DYNAMICS

Song Zenghao, Gao Fuan and Liu Ruiqing

(The Chinese Aeronautical Computing Technique Institute)

Abstract

Designing a structure with prescribed vibration frequencies and/or modes of vibration is called inverse problem of structural dynamics. It has important value both in practice and theory. In this paper, an inverse eigenvalue method for resolving this problem is presented. The main idea of the method is to consider the inverse problem of structural dynamics as a generalized inverse eigenvalue problem (2.5)~(2.7) and build a functional (3.8). Then this problem is reduced to finding minimum of a quadratic functional subject to constraints. The algorithm uses random numbers to generate the initial value automatically. It is suitable to structural dynamic modifications or of high accuracy and vibration design with reliable convergence. It can be used when frequencies and modes of vibration are given or only the frequencies are given. The orders of desirable frequencies and/or modes of vibration are optional. Possible limitations in design have also been considered. The numerical examples and experiments have shown that the algorithm is effective. It has been applied to theoretical physics and aeronautical engineering successfully and effectively.