

绕非对称头锥的分离系数矩阵差分法

中国气动力研究与发展中心 张鲁民 单小楠

一、亚跨区SCM方法

(一) 基本方程和边界条件

建立在球坐标下无因次化的拟非定常欧拉方程组为

$$\vec{d}_t + A\vec{d}_x + B\vec{d}_y + C\vec{d}_z + \vec{D} = 0 \quad (1)$$

$$p = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \rho \left(H_i - \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right)$$

其中, $\vec{d}_t = (p, u, v, w)^T$; ρ 是密度; u, v, w 分别为径向、切向、横向速度分量; p 是静压; H_i 为总焓值; γ 是比热比。

方程组(1)的系数矩阵为

$$A = \frac{1}{R \sin \theta} \begin{bmatrix} w & 0 & 0 & \gamma \\ 0 & w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w & 0 \\ F & 0 & 0 & w \end{bmatrix} \quad B = -\frac{1}{R} \begin{bmatrix} v & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ F & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \bar{U} & \gamma \xi_R & \gamma \xi_\theta & \gamma \xi_\varphi \\ F \xi_R & \bar{U} & 0 & 0 \\ F \xi_\theta & 0 & \bar{U} & 0 \\ F \xi_\varphi & 0 & 0 & \bar{U} \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} \gamma(2u - v \cot \theta) \\ -(v^2 + w^2) \\ uv - w^2 \cot \theta \\ w(u + v \cot \theta) \end{bmatrix}$$

其中, $\xi_R = \frac{1}{R_r - R_b}$; $\xi_\theta = \frac{1}{R} \xi_R [(z-1)R_{b0} - zR_{r0}]$;

$$\xi_\varphi = \frac{1}{R \sin \theta} \xi_R [(z-1)R_{b0} - zR_{r\varphi}]; \quad \bar{U} = z_r + u \xi_R + v \xi_\theta + w \xi_\varphi;$$

$$z_r = -z \xi_R R_{r\varphi}, \quad F = \frac{p}{\rho}$$

A、B、C矩阵的特征值为

$$\Lambda_A = \frac{1}{R \sin \theta} \text{Diag}(w - a, w + a, w, w)$$

$$\Lambda_B = \frac{1}{R} \text{Diag}(-v - a, -v + a, -v, -v)$$

$$\Lambda_C = \text{Diag}(\bar{U} - a\mu, \bar{U} + a\mu, \bar{U}, \bar{U})$$

1985年2月4日收到。

$$\mu = (\xi_R^2 + \xi_\theta^2 + \xi_\varphi^2)^{1/2}, \quad a \text{ 为音速,}$$

角注 s 、 b 分别代表激波和物面参数。

按照特征值的正负, 并通过矩阵相似变换将 A 、 B 、 C 矩阵分离为^[1]

$$A = R\Lambda_A^+R^{-1} + R\Lambda_A^-R^{-1} = A_+ + A_-$$

$$B = S\Lambda_B^+S^{-1} + S\Lambda_B^-S^{-1} = B_+ + B_-$$

$$C = T\Lambda_C^+T^{-1} + T\Lambda_C^-T^{-1} = C_+ + C_-$$

R^{-1} 、 S^{-1} 、 T^{-1} 分别由 A 、 B 、 C 矩阵的左特征向量构造而成。对 R^{-1} 、 S^{-1} 、 T^{-1} 求逆即可得到 R 、 S 、 T 矩阵。 Λ_A^+ 、 Λ_A^- 、 Λ_B^+ 、 Λ_B^- 、 Λ_C^+ 、 Λ_C^- 分别为 A 、 B 、 C 矩阵的正、负特征值。于是方程 (1) 的分离系数矩阵形式为

$$\vec{d}_r + A_+\vec{d}_{x_b} + A_-\vec{d}_{x_f} + B_+\vec{d}_{y_b} + B_-\vec{d}_{y_f} + C_+\vec{d}_{z_b} + C_-\vec{d}_{z_f} + \vec{D} = 0 \quad (2)$$

角注 b 和 f 分别表示单向后差和前差运算, 方程 (2) 和能量方程联立可作为流场内点计算公式。

(二) 边界点处理

1. 物面边界

建立物面的分离系数矩阵方程, 在 $z-t$ 平面内 $z=0$, 其特征值 $\lambda_1^s = \bar{u} - a\mu$, $\lambda_2^s = \bar{u} + a\mu$, $\lambda_3^s > 0$, 流特征 $\lambda_3^s = \bar{u}$, 在建立物面特征相容关系方程时, 去掉 λ_2^s , 补充物面不渗透条件

$$T^{-1}\vec{d}_r + \Lambda_C T^{-1}\vec{d}_z + T^{-1}\vec{g} = 0 \quad (3)$$

其中,

$$\vec{g} = A_+\vec{d}_{x_b} + A_-\vec{d}_{x_f} + B_+\vec{d}_{y_b} + B_-\vec{d}_{y_f} + \vec{D}$$

物面不渗透条件为

$$u + v \xi_\theta / \xi_R + w \xi_\varphi / \xi_R = 0$$

2. 激波边界

在激波面上采用 $R-H$ 关系, 而波后压力可由内点公式提供或采用特征相容关系式。

3. 轴上边界

在球坐标下的欧拉方程, 其轴上点出现 $\frac{0}{0}$ 项, 无法求解, 对于俯仰平面对称的外形, 可用 L'Hospital 法则处理, 如果在轴上物形变化较大, 又无对称面, 则采用插值求均值的办法处理为宜。

4. 出口边界

当计算 θ_{\max} 边界点的流场时, 采用差分计算或插值外推均可。

二、超音速锥身区推进方法

由头部计算给出初值, 然后利用文献[2]提供的方法, 计算超音速锥身区的流场和压力分布。值得说明的是, 当非球头与后身相贯处出现物面斜率不连续时, 流场通过物面斜率不连续的点, 可利用二维 Prandtl-Meyer 关系或二维激波关系处理, 详见文献[3]。

三、数值计算中的几点说明

1. 初值问题

对于不同的头部外形和来流条件, 需要给出较合理的初值, 否则无法计算, 文献

〔4〕已作了讨论, 本文数值试验认为初始激波按以下公式选取

$$R_s = R_{s_0} + R_b(\theta, \varphi) + A_1 \theta (\pi - \theta)^2$$

$$R_{s_0} = \frac{1}{4\gamma^2} \left[1 + \frac{(\gamma + 1)^2}{M_{\infty}^2} + \frac{(\gamma + 1)^2 (\gamma - 1)}{M_{\infty}^2} \right]$$

$R_b(\theta, \varphi)$ 为物形坐标; A_1 视物形而定。另外, 对物形斜率变化较大的头部外形, 亦可采用物形逐渐逼近的办法进行计算。

2. 初值精度要求

为提供锥身初值, 往往对头部初值提出较高的要求, 这样计算初值费用昂贵, 为节省头部计算费用, 通过数值试验证明, 头部诸点上的激波速度为 $R_{s_0} = 1 \times 10^{-2}$ 即可满足工程要求。

四、数值计算结果与分析

本文计算了典型的非球头-削锥($47.5^\circ/9^\circ$)外形, 非球头区的物面压力分布见图1。后身区的压力分布详见表1, 小不对称气动力 C_{N_0} , C_{m_0} 分别为 $\alpha = 0^\circ$ 的法向力系数和力

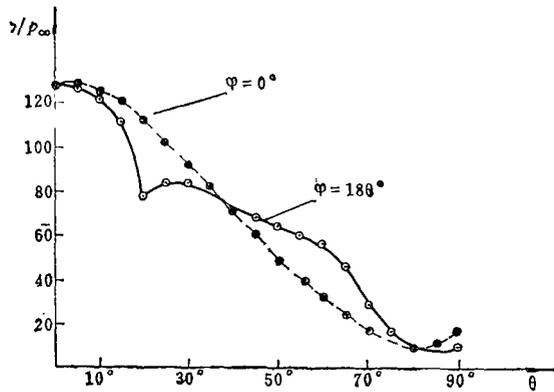
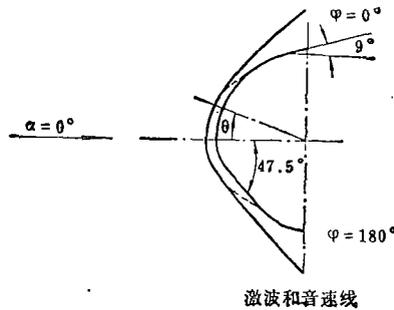


图1 非对称头部物面压力系数 C_p

矩系数, 见表2。

表1数据表明, 头部不对称量对后体的影响, 约在20倍头部半径范围内, 远离非对称头部沿周向的压力分布逐渐恢复到球头锥的压力分布。表2为不同头部初值条件下计算的 C_{m_0} , C_{N_0} 值, 通过比较可知, $N = 200$ 步亦可满足工程要求。

根据数值计算分析, 假若沿周向的压力分布仅在千分位上有差别, 则 $\Delta C_{N_0} = 1.69 \times$

10^{-6} , $\Delta C_{m_0} = 1.64 \times 10^{-6}$, 表 2 中的小不对称量, 是由于沿周向压力在十分位和百分位的差别形成的, 这对数值解来说是有效数值。

表 1 物面压力系数 C_p , $M_{\infty} = 10$, $\alpha = 0^\circ$, $\theta_c = 9^\circ$

| Z/R_N | C_p | 非 对 称 头 部 | | | | |
|---------|-------|-----------------------|-------------|--------|--------|--------|
| | | 球 头 双向差分 (27 × 13) | SCM (9 × 7) | | | |
| | | 0°~180° | 0° | 60° | 120° | 180° |
| 1 | | 0.1011 | 0.1450 | 0.2577 | 0.2435 | 0.2464 |
| 10 | | 0.0355 | 0.0382 | 0.0384 | 0.0385 | 0.0385 |
| 20 | | 0.0390 | 0.0398 | 0.0407 | 0.0408 | 0.0408 |
| 30 | | 0.0465 | 0.0466 | 0.0474 | 0.0475 | 0.0475 |
| 40 | | 0.0523 | 0.0515 | 0.0520 | 0.0521 | 0.0521 |
| 50 | | 0.0545 | 0.0541 | 0.0543 | 0.0543 | 0.0543 |
| 60 | | 0.0553 | 0.0550 | 0.0550 | 0.0550 | 0.0550 |
| 70 | | 0.0553 | 0.0551 | 0.0551 | 0.0551 | 0.0551 |
| 80 | | 0.0552 | 0.0550 | 0.0550 | 0.0550 | 0.0550 |

表 2 小不对称气动力 C_{N_0} , C_{m_0} 计算结果 (SCM) $M_{\infty} = 10$, $\alpha = 0^\circ$, $\theta_c = 9^\circ$

| 钝 度 比 R_N/R_B | 力矩系数 C_{m_0} | | 法向力系数 C_{N_0} | |
|--------------------|----------------|-----------|-----------------|-----------|
| | $N = 600$ | $N = 200$ | $N = 600$ | $N = 200$ |
| 0.24 | 0.0005 | 0.0004 | 0.0007 | 0.00064 |
| 0.17 | 0.0005 | 0.0005 | 0.0007 | 0.00070 |
| 0.14 | 0.0004 | 0.0004 | 0.0007 | 0.00070 |
| 0.11 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0005 | 0.00050 |
| 0.10 | 0.0002 | | 0.0004 | |
| 0.08 | 0.0001 | | 0.0003 | |

参 考 文 献

- [1] Daywitt, J., Improvements in Techniques for Computing Supersonic Blunt Body Flows, AIAA Paper 81-115, (1981).
- [2] 张鲁民、单小楠, 超音速三维分离系数矩阵差分法, 空气动力学学报, 1984年第四期, 第41页~46页。
- [3] 张鲁民、鄂智权, 有侧滑角的非对称体超音速无粘流的数值计算和近似计算, 空气动力学学报, 1983年第四期, 第40~49页。
- [4] 周荣春、侯天相, 混合初边值问题解的渐近性质及其差分分解, 航空学报, 1984年第一期, 第1页~10页。

SPLIT-COEFFICIENT MATRIX FINIT DIFFERENCE
METHOD FOR THE ASYMMETRIC NOSE-CONE

Zhang Lumin and Shan Xiaonan

(China Aerodynamic Research and Development Center)

Abstract

The split-coefficient matrix (SCM) for solving inviscid flow over the asymmetric nose-cone is presented. According to SCM technique, governing equations are solved by MacCormack's second-order scheme in a predictor-corrector sequence. The present paper presents the numerical results of the flow field and aerodynamic characteristics over an asymmetric nose-cone. The accuracy analyses of the results are also given in this paper.