

飞行控制系统的输出 反馈最优设计

南京航空学院 胡寿松 胡明华

摘 要

本文在频域范畴内,利用输出反馈方法论述了在二次型性能指标下多变量线性最优调节器的控制问题,通过把多变量系统的前馈解耦控制与最优控制结合起来,得到了最优控制解的频域形式。这种最优控制规律既可使系统的能耗和输出偏差综合最优,具有较好的抗干扰性,又可满足给定的时域性能指标。方法简单,求解方便,便于工程应用。作为例子,文中对某纵向飞行控制系统进行了最优设计。

一、引 言

本文把多变量系统的前馈解耦控制与最优控制结合起来,利用输出反馈方法,得到了多变量解耦系统的频域最优解。由于在最优解条件下各通道参数可以独立调节,因此能够获得满意的经典时域指标。

设线性定常系统

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned} \quad (1)$$

式中, $x \in R^n$, $u \in R^m$, $y \in R^m$, 常数矩阵 F 、 G 、 H 有相应的维数。设二次型性能指标为

$$J[u] = \int_0^{\infty} [y^T(t)Qy(t) + u^T(t)u(t)] dt \quad (2)$$

其中 $Q = \text{diag}\{q_1, q_2, \dots, q_m\} > 0$ 。显然

$$y(s) = \bar{G}(s)u(s) + \bar{T}(s)e_0 \quad (3)$$

式中 $\bar{G}(s)$ 为系统传递函数矩阵, $\bar{T}(s)$ 是与初始条件或脉冲干扰有关的多项式矩阵, e_0 为等效脉冲干扰输入常向量, 其维数为 m 。由 Parseval 等式

$$J[u] = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} [y^T(-s)Qy(s) + u^T(-s)u(s)] ds \quad (4)$$

最优控制问题是求使 $J[u] = \min$ 的最优控制律。假设:

1. 系统(3)是可解耦的, 记

1985年11月6日收到。

$$\bar{G}(s) = \text{diag} \left\{ \frac{m_1(s)}{\psi_1(s)}, \dots, \frac{m_m(s)}{\psi_m(s)} \right\}$$

$$\bar{T}(s) = \text{diag} \left\{ \frac{t_1(s)}{\psi_1(s)}, \dots, \frac{t_m(s)}{\psi_m(s)} \right\}$$

令 $\Psi(s)$ 、 $M(s)$ 和 $T(s)$ 为对角阵, 则 (3) 式可写为

$$\Psi(s)y(s) = M(s)u(s) + T(s)e_0 \quad (5)$$

2. 系统 (5) 式中的矩阵 $\Psi(s)$ 和 $M(s)$ 互质, 且

$$\partial(\psi_i(s)) > \partial(m_i(s)) \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$\partial(t_i(s)) = \partial(\psi_i(s)) - 1$$

式中 ∂ 表示多项式的次数。

3. 控制向量 $u(s)$ 各分量是在 s 右半闭平面内解析的真有理分式, 由 $u(s)$ 决定的轨线 $y(s)$ 的各分量也在 s 右半闭平面内解析。

二、最优控制的频域解

引理 1 若 $\Psi(s)$ 、 $M(s)$ 互质, Q 正定, 则存在稳定多项式阵 $P(s) = \text{diag} \{p_1(s), \dots, p_m(s)\}$, 使得

$$P(-s)P(s) = \Psi(-s)\Psi(s) + M(-s)QM(s) \quad (6)$$

引理 2 若 $\Psi(s)$ 、 $M(s)$ 互质, 且 $\partial(\psi_i(s)) > \partial(m_i(s))$, 则如下矩阵方程

$$QT(s)M(-s) = P(-s)A(s) + B(s)\Psi(s) \quad (7)$$

$$T(s)\Psi(-s) = P(-s)C(s) - B(s)M(s) \quad (8)$$

有满足

$$\partial(a_i(s)) < \partial(\psi_i(s)) \quad (9)$$

$$\partial(b_i(s)) < \partial(p_i(s)) \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (10)$$

的解 $A(s)$ 、 $B(s)$ 、 $C(s)$ 的充要条件是 $A(s)$ 、 $C(s)$ 为方程

$$T(s)P(s) = C(s)\Psi(s) + A(s)M(s) \quad (11)$$

的解。其中, $A(s)$ 、 $B(s)$ 、 $C(s)$ 均为对角阵, $a_i(s)$ 和 $b_i(s)$ 为 $A(s)$ 和 $B(s)$ 的元。

定理 1 已知系统 (3) 及性能指标 (4), 则容许控制 $u(s)$ 为最优控制的充要条件是

$$u^*(s) = -C^{-1}(s)A(s)y^*(s) \quad (12)$$

其中 $C(s)$ 和 $A(s)$ 是方程 (11) 的解。

证 由 (5) 式

$$y(s) = \Psi^{-1}(s)M(s)u(s) + \Psi^{-1}(s)T(s)e_0 \quad (13)$$

将上式代入 (4) 式并注意引理 1, 可得

$$J[u] = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} [u^T(-s)P(-s) + e_0^T H(-s)T(-s)] \Psi^{-1}(-s) \\ \times \Psi^{-1}(s) [P(s)u(s) + H(s)T(s)e_0] ds \\ + \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} e_0^T \Psi^{-1}(-s)T(-s) [Q - H(-s)H(s)] \\ \cdot T(s)\Psi^{-1}(s)e_0 ds \quad (14)$$

其中

$$H(s) = P^{-1}(-s)M(-s)Q, \quad H(-s) = P^{-1}(s)M(s)Q \quad (15)$$

显然, $H(s)$ 和 $H(-s)$ 都是严格正则有理函数对角阵。由 (7) 式及 (15) 式知

$$\Psi^{-1}(s)H(s) = T^{-1}(s)\Psi^{-1}(s)A(s) + T^{-1}(s)P^{-1}(-s)B(s) \quad (16)$$

于是

$$\begin{aligned} J(u) = & \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} [u^T(-s)P(-s)\Psi^{-1}(-s) + e_0^T\Psi^{-1}(-s)A(-s) \\ & + e_0^T P^{-1}(s)B(-s)] \cdot [\Psi^{-1}(s)P(s)u(s) + \Psi^{-1}(s)A(s)e_0 \\ & + P^{-1}(-s)B(s)e_0] ds + \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} e_0^T \Psi^{-1}(-s) \cdot T(-s) \{Q \\ & - H(-s)H(s)\} T(s) \Psi^{-1}(s) e_0 ds \end{aligned} \quad (17)$$

令

$$\begin{aligned} W(s) = & [u^T(-s)\Psi^{-1}(-s)P(-s) + e_0^T\Psi^{-1}(-s) \\ & \cdot A(-s)] P^{-1}(-s)B(s)e_0 \\ W(-s) = & [u^T(s)\Psi^{-1}(s)P(s) + e_0^T\Psi^{-1}(s)A(s)] \\ & \cdot P^{-1}(s)B(-s)e_0 \end{aligned}$$

因 $W(s)$ 和 $W(-s)$ 是分别在 s 左半闭平面和右半闭平面内解析的严格正则有理分式, 必有

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} W(s) ds = 0, \quad \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} W(-s) ds = 0$$

故 (17) 式可写为

$$\begin{aligned} J(u) = & \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} [P(-s)u(-s) + A(-s)e_0]^T \Psi^{-1} \\ & \cdot (-s) \Psi^{-1}(s) [P(s)u(s) + A(s)e_0] ds + \frac{1}{2\pi j} \\ & \cdot \int_{-j\infty}^{j\infty} e_0^T \{ \Psi^{-1} \cdot (-s) T(-s) \{ Q - H(-s)H(s) \} T(s) \\ & \cdot \Psi^{-1}(s) + P^{-1}(s)P^{-1}(-s)B(s)B(-s) \} e_0 ds \end{aligned} \quad (18)$$

上式中的第二项与 $u(s)$ 无关, 因此 $J(u) = \min$ 的充要条件是

$$u^*(s) = -P^{-1}(s)A(s)e_0 \quad (19)$$

将上式代入 (13) 式并注意 (11) 式, 证得结论 (12) 式。最优性能指标

$$\begin{aligned} J(u^*) = & \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} e_0^T P^{-1}(-s) [T(-s)QT(s) \\ & + B(-s)B(s)] P^{-1}(s) e_0 ds \end{aligned} \quad (20)$$

最优输出反馈调节器方块图见图 1。

定理 2 已知系统 (3) 及最优控制 (12), 则系统最优输出函数为

$$y^*(s) = C(s)P^{-1}(s)e_0 \quad (21)$$

其中 $C(s)P^{-1}(s)$ 为严格正则有理函数对角阵, 满足 $\partial(c_i(s)) = \partial(p_i(s)) - 1$, $i = 1, 2, \dots, m$; $C(s)$ 是方程 (11) 的解。

证 将 (12) 式代入 (13) 式得

$$[I + \Psi^{-1}(s)M(s)C^{-1}(s)A(s)]y^*(s) = \Psi^{-1}(s)T(s)e_0 \quad (22)$$

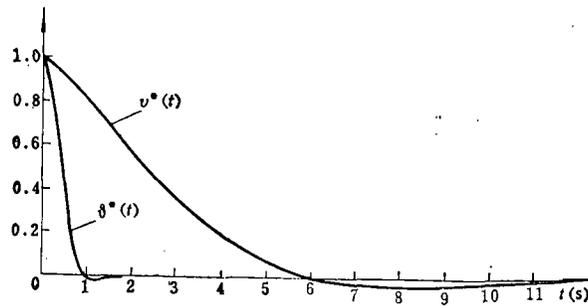


图 1 频域最优输出反馈调节器方块图

由方程 (11) 知

$$P(s) = T^{-1}(s)C(s)\Psi(s) + T^{-1}(s)A(s)M(s)$$

上式右乘 $\Psi^{-1}(s)T(s)C^{-1}(s)$, 得

$$[I + \Psi^{-1}(s)M(s)C^{-1}(s)A(s)] = P(s)\Psi^{-1}(s)T(s)C^{-1}(s)$$

将上式代入 (22) 式, 证得结论 (21) 式。由 (6) 式知, $\partial(p_i(s)) = \partial(\psi_i(s))$, 故 $\partial(c_i(s)) = \partial(\psi_i(s)) - 1 = \partial(p_i(s)) - 1$, $i = 1, 2, \dots, m$, 因此 $C(s)P^{-1}(s)$ 必为严格正则有理函数对角阵。

三、前馈解耦控制

若系统 (1) 的传递矩阵 $G(s) = H(sI - F)^{-1}G$ 可逆, 则系统可进行前馈解耦^[9]。设

$$G(s) = \frac{1}{\Delta(s)}G_0(s) \quad (23)$$

式中 $\Delta(s)$ 为 $G(s)$ 中各元素的首一最小公分母多项式, $G_0(s)$ 为 $m \times m$ 多项式阵。采用如下矩阵作为 $G(s)$ 的前馈解耦环节

$$N(s) = \text{adj}G_0(s) \text{diag} \left\{ \frac{k_1 n_1(s)}{d_1(s)}, \dots, \frac{k_m n_m(s)}{d_m(s)} \right\} \quad (24)$$

则解耦后开环传递矩阵为

$$\bar{G}(s) = G(s)N(s) = \text{diag} \left\{ \frac{k_1 n_1(s) \det G_0(s)}{d_1(s) \Delta(s)}, \dots, \frac{k_m n_m(s) \det G_0(s)}{d_m(s) \Delta(s)} \right\} \quad (25)$$

其中 k_i 为待定常数, $n_i(s)$ 和 $d_i(s)$ 为待定多项式。

多变量调节器经前馈解耦后, 其最优控制为 (12) 式, 而

$$\Psi(s) = \text{diag} \{ \Delta(s)d_1(s), \dots, \Delta(s)d_m(s) \}$$

$$M(s) = \text{diag} \{ k_1 n_1(s) \det G_0(s), \dots, k_m n_m(s) \det G_0(s) \}$$

因此, 改变 k_i 、 $n_i(s)$ 和 $d_i(s)$, 可以改变 $\Psi(s)$ 和 $M(s)$, 从而改变 $C(s)$ 、 $A(s)$ 和 $P(s)$ 。于是 $y^*(s)$ 也相应变化, 必可满足各控制通道的时域性能要求。此外, 在改变 k_i 、 $n_i(s)$ 和 $d_i(s)$ 过程中, 最优性条件保持不变。

四、飞行控制系统的最优设计

某飞机在等速平飞状态下,纵向回路运动方程经线性化处理后可用(1)式表示,其中

$$F = \begin{bmatrix} -0.0097 & 0.0016 & 0 & -0.0488 \\ -0.0950 & -1.4300 & 1.0000 & 0 \\ 0.0819 & -14.2831 & -2.7780 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 0.0100 \\ 0.1059 & 0 \\ -26.0091 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} v \\ \alpha \\ \dot{\vartheta} \\ \vartheta \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{飞行速度增量} \\ \text{攻角增量} \\ \text{俯仰角速度增量} \\ \text{俯仰角增量} \end{array}$$

$$u = \begin{bmatrix} \delta_z \\ \delta_p \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{升降舵偏角增量} \\ \text{油门杆偏转增量} \end{array}$$

若选 $k_1=0.1$, $n_1(s)=1$, $d_1(s)=(s+0.01)(s+0.005)$ 及 $k_2=10$, $n_2(s)=1$, $d_2(s)=s(s+1)(s+2)$, 则前馈解耦环节

$$N(s) = \begin{bmatrix} \frac{8 \times 10^{-5}(s+18.0855)}{(s+0.01)(s+0.005)} & -\frac{0.1(s^2+4.2080s+18.2556)}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{2.6009(s^2+1.4979s+0.0146)}{(s+0.01)(s+0.005)} & \frac{0.0017(s^2+7224.1s+17946.5)}{s(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

考虑脉冲干扰时,不妨设如下 $\bar{T}(s)$ 阵及 Q 阵

$$\bar{T}(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+0.1}{(s+0.01)(s+0.005)} & 0 \\ 0 & \frac{(s+1.5)(s+3)}{s(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 50 \end{bmatrix}$$

算得系统最优控制函数

$$u^*(s) = \begin{bmatrix} \delta_z^*(s) \\ \delta_p^*(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8.3184(s+0.0849)}{s+0.6310} \\ \frac{10.7280(s^2+3.6210s+2.9661)}{s^2+9.5236s+11.8221} \end{bmatrix} y^*(s)$$

以及最优输出函数

$$y^*(s) = \begin{bmatrix} v^*(s) \\ \vartheta^*(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s+0.6310}{s^2+0.7623s+0.2736} & 0 \\ 0 & \frac{s^2+9.5236s+11.8221}{s^3+8.0236s^2+29.6891s+27.3697} \end{bmatrix} e_0$$

若 e_0 为单位脉冲干扰, 则最优脉冲响应曲线 $v^*(s)$ 和 $\vartheta^*(s)$ 如图 2 所示。

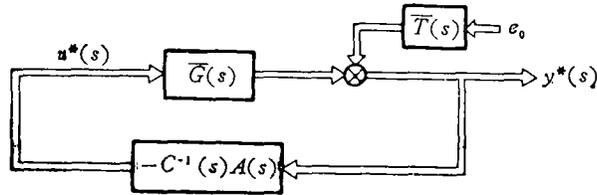


图 2 系统输出量的最优脉冲响应

参 考 文 献

- [1] Anderson, B. D. O., Moore, J. B., Linear Optimal Control, Prentice-Hall, 1971, pp. 31-43.
- [2] Willis, B. H., Brockett, R. W., The Frequency Domain Solution of Regulator Problems, IEEE Trans., Auto. Contr., Vol. AC-10, No. 2 (1965), pp. 262-267.
- [3] Olivier, P. D., A Constrained Optimal Control Problem, IEEE Trans. Auto., Vol. AC-29, No. 1 (1984), pp. 53-54.
- [4] 王恩平、王朝珠, 线性最优控制系统的频域综合方法 (单输入-单输出), 自动化学报, 9卷2期(1983), pp. 152-156.
- [5] 王朝珠、王恩平, 线性最优控制系统的频域综合方法 (多输入-多输出), 自动化学报, 第11卷2期(1985), 190~194页.
- [6] Leang-San Shieh, A Modified Direct-Decoupling Method for Multivariable Control System Design, IEEE Trans. Ind. Electronic and Control Instrumentation, Vol. IECI-28, No. 1 (1981), pp. 1~9.

AN OPTIMAL DESIGN OF FLIGHT CONTROL SYSTEM BY OUTPUT FEEDBACK

Hu Shousong and Hu Minghua

(Nanjing Aeronautical Institute)

Abstract

In this paper, the problem of multivariable linear optimal regulator with quadratic performance index is discussed in frequency domain by using the output feedback method.

The frequency domain result of optimal control is obtained by combining feedforward decoupling control of multivariable system with the optimal control. Not only can this optimal control law make the loss of energy and the error of output jointly optimal, with a relatively strong disturbance resistance, but also satisfy the specified performance index in time domain. The method is simple for use and convenient to engineering application. As a example, an optimal design is made in this paper for a vertical flight control system.