第7卷 第5期 航 空 学 报 Vol. 7 No. 5
1986年10月 ACTA AERONAUTICA ET ASTRONAUTICA SINICA Oct. 1986

线性振动系统的特征值亏损问题

南京航空学院 陈振藩

摘 要

本文导出了线性振动系统的特征值亏损充分必要条件，给出几个有特征值亏损的例子，并得到一些有用的结论。

一、前 言

线性振动系统的一个特征值λ，其重数为p_λ，所属的特征状态子空间S_λ的维数为d_λ，有关系

$$p_\lambda \geqslant d_\lambda \tag{1}$$

当且仅当等式成立时，特征值λ无亏损，换句话说，当且仅当

$$p_\lambda > d_\lambda \tag{2}$$

时，特征值λ有亏损。

过去，振动系统的模态分析、参数识别和振动控制等有关理论[2~4]和技术，大多不考虑系统的特征值亏损问题，即使考虑，也不是主题，而且多属猜想或有待论证的看法，例如，有人曾猜想比例阻尼系统和非比例欠阻尼系统不会出现特征值亏损的情况，但是事实上并非如此。

本文是作者在张阿舟教授倡导下所作的有关振动系统特征值亏损问题的一些工作结果。

二、阻抗矩阵的秩数

线性振动系统$S([M],[C],[K])$的p_λ重特征值λ相应的阻抗矩阵$[Z(\lambda)]$为

$$[Z(\lambda)]=[\lambda^2 M+\lambda C+K]_{n\times n} \tag{3}$$

二次特征值问题

$$[Z(\lambda)]\{\varphi\}=\{0\} \tag{4}$$

的线性无关解组$\{\varphi\}_1$，$\{\varphi\}_2$，$\cdots\{\varphi\}_r$张成的子空间称为λ的振型子空间，记为V_λ，而以$\{\varphi\}_i$（$i=1,\cdots,r$）为列构成的矩阵$[\Phi]_\lambda$

$$[\Phi]_\lambda=[\{\varphi\}_1 \vdots \{\varphi\}_2 \vdots \cdots \{\varphi\}_r] \tag{5}$$

称为λ的振型矩阵，显然V_λ的维数r与阻抗矩阵$[Z(\lambda)]$的秩数$rank[Z(\lambda)]$有下列关系

$$r=dimV_\lambda=rank[\Phi]_\lambda=n-Rank[Z(\lambda)] \tag{6}$$

1985年4月28日收到。

特征值λ的特征状态向量为

$$\{\psi\}_i=\left\{\begin{matrix}\varphi_i\\ \hdashline \lambda\varphi_i\end{matrix}\right\} \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ r) \tag{7}$$

它们构成特征状态子空间S_λ的基底，相应的基底矩阵$[\Psi]_\lambda$为

$$[\Psi]_\lambda=[\{\psi\}_1,\{\psi\}_2\cdots\{\psi\}_r]=\left[\begin{matrix}I_n\\ \hdashline \lambda I_n\end{matrix}\right][\Phi]_\lambda \tag{8}$$

且有关系

$$dimS_\lambda=rank[\Psi]_\lambda=rank[\Phi]_\lambda=r \tag{9}$$

即特征值λ的振型子空间V_λ与特征状态子空间S_λ有相同的维数。根据式（2）可知特征值λ有亏损的充要条件是，当且仅当

$$rank[Z(\lambda)]>n-p_\lambda \tag{10}$$

注意到

$$1\leqslant p_\lambda\leqslant 2n,\quad 0\leqslant rank[Z(\lambda)]\leqslant n \tag{11}$$

就可以从简单的充要条件（10）式导出一些有用的结论来。

不失普遍性，设阻抗矩阵$[Z(\lambda)]$有如下形式

$$[Z(\lambda)]=[\!(\lambda^2+\omega_i^2)\!]+\lambda[c_{ij}] \tag{12}$$

1．比例阻尼系统　此时$[c_{ij}]$是对角阵，特征值λ一定是其阻抗矩阵$[\!(\lambda^2+\lambda c_{ii}+\omega_i^2)\!]$的某些对角元素的零点，λ亏损的充要条件为：当且仅当λ是某些对角元素的重零点。即存在某个下标k使得

$$\left.\begin{aligned}&\lambda^2+\lambda c_{kk}+\omega_k^2=0\\ &2\lambda+c_{kk}=0,\ c_{kk}=2\omega_k=-2\lambda\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

写成定理如下：

〔定理 1〕　比例阻尼系统有亏损特征值的充要条件是，当且仅当它的某个模态阻尼是临界阻尼。

〔推论 1〕　无阻尼系统有亏损特征值的充要条件是，当且仅当它有零特征值。即刚度矩阵奇异。

2．非比例阻尼系统　此时阻尼矩阵$[C]$不是对角阵，即式（12）中非对角元素c_{ij} $(i\neq j)$不全为零。

（1）当$p_\lambda\geqslant n+1$，显然，λ必亏损。

（2）当$p_\lambda=n$，要λ无亏损的充要条件是：当且仅当阻抗矩阵$[Z(\lambda)]$等于零阵，但是，对于非比例阻尼线性振动系统，这是不可能的。事实上，如果特征值$\lambda\neq 0$，$[Z(\lambda)]$的非对角元素λc_{ij} $(i\neq j)$至少有一个不为零，$[Z(\lambda)]\neq 0$；如果$\lambda=0$，则$[Z(0)]=[\!\omega_i^2\!]$，振动系统的固有频率不会全为零，同样有$[Z(\lambda)]\neq 0$。因此，n重特征值必亏损。

〔定理 2〕　n个自由度的非比例阻尼振动系统的n重特征值必亏损。

〔推论 2〕　两自由度非比例阻尼振动系统的重特征值必亏损。

例 1　下列系统必有一对共轭的亏损特征值

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} q\omega_1 & \sqrt{1-\left(\frac{q}{2}\right)^2}(\omega_1-\omega_2) \\ \sqrt{1-\left(\frac{q}{2}\right)^2}(\omega_1-\omega_2) & q\omega_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix}$$

其中　　$\omega_1 \neq \omega_2,\quad 0 < q < \frac{4\sqrt{\omega_1\omega_2}}{\omega_1+\omega_2}$

该系统的特征值为

$$\lambda_1=\lambda_2=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}q(\omega_1+\omega_2)+j\sqrt{4\omega_1\omega_2-\frac{q^2}{4}(\omega_1+\omega_2)^2}\right)$$

$$\lambda_3=\lambda_4=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}(q)(\omega_1+\omega_2)-j\sqrt{4\omega_1\omega_2-\frac{q^2}{4}(\omega_1+\omega_2)^2}\right)$$

由此可见振动系统出现特征值亏损情况并非罕见的。

剩下的问题是非比例阻尼系统的低于n重的特征值亏损问题，我们已得到一些结果，不拟在此赘述。

三、有亏损的特征值的特征子空间[1]

具有对称系数矩阵的振动系统$S([M],[C],[K])$的特征值问题可化为复对称矩阵的标准特征值问题。设质量矩阵$[M]$可逆，则取状态向量为

$$\{z\}=[Q]\left\{\frac{x}{\dot{x}}\right\}=[Q]\{y\} \tag{14}$$

其中$[Q]$是一个复对称非奇异方阵，且有关系

$$[Q]^2=\left[\begin{array}{c:c} C & M \\ \hdashline M & O \end{array}\right]=[A] \tag{15}$$

经过简单运算，就可得状态方程

$$\{\dot{z}(t)\}=[D]\{z(t)\} \tag{16}$$

$$[D]=-[Q]^{-1}[B][Q]^{-1},\quad [B]=\left[\begin{array}{c:c} K & O \\ \hdashline O & -M \end{array}\right] \tag{17}$$

由于$[Q]^{-1}$和$[B]$的对称性，$[D]$一定也是对称矩阵，但一般是复数矩阵。

矩阵$[D]$的标准特征值问题与振动系统的二次特征值问题是等价的，这两个特征问题的特征值的数值、重数和亏损情况完全一样。

文献〔1〕指出：对称的复数矩阵的特征值λ有亏损，当且仅当λ的特征子空间有拟零核。所谓子空间L有拟零核$\{\xi\}$系指

$$(1)\qquad \{0\}\neq\{\xi\}\in L \tag{18}$$

$$(2)\qquad \{z\}^T\{\xi\}=0,\quad \forall\{z\}\in L \tag{19}$$

设对称的复数矩阵$[D]$的特征值的特征子空间L_λ的基底矩阵为

$$[\hat{Z}]_\lambda=[\{z\}_1 \vdots \{z\}_2 \vdots \cdots\{z\}_r]$$

则子空间L_λ有拟零核的充要条件是

$$[\hat{z}]_\lambda^T[\hat{z}]_\lambda \quad 奇异$$

由于

$$[\hat{z}]=[Q]\begin{bmatrix}\Phi_\lambda \\ \hdashline \lambda\Phi_\lambda\end{bmatrix}$$

$$[\hat{z}]_\lambda^T[\hat{z}]_\lambda=[\Phi]_\lambda^T[2\lambda M+C][\Phi]_\lambda \tag{20}$$

因此有

〔定理3〕 对称线性振动系统的特征值λ有亏损的充要条件是，当且仅当

$$[\Phi]_\lambda^T[2\lambda M+C][\Phi]_\lambda \quad 奇异 \tag{21}$$

〔推论3〕 对称线性振动系统的非零特征值λ有亏损的充要条件是

$$[\Phi]_\lambda^T[\lambda^2 M-K][\Phi]_\lambda \quad 奇异 \tag{22}$$

事实上，当 $\lambda \neq 0$ 时

$$[\Phi]_\lambda^T[2\lambda M+C][\Phi]_\lambda=\frac{[\Phi]_\lambda^T}{\lambda}[\lambda^2 M-K][\Phi]_\lambda$$

由定理3容易证明本推论。

〔推论4〕 对称线性振动系统的零特征值有亏损的充要条件是，当且仅当

$$[\Phi]_\lambda^T[C][\Phi]_\lambda \quad 奇异 \tag{23}$$

由此可见：无阻尼系统的零特征值必亏损；具有正定阻尼矩阵的对称线性振动系统的零特征值一定无亏损。

〔推论5〕 对称线性振动系统的特征值λ的特征状态子空间S_λ如果是一维的，则λ有亏损的充要条件是，当且仅当

$$2\lambda\{\varphi\}_\lambda^T[M]\{\varphi\}_\lambda+\{\varphi\}_\lambda^T[C]\{\varphi\}_\lambda=0 \tag{24}$$

〔推论6〕 对称线性振动系统的非零实特征值λ有亏损的充要条件是，当且仅当λ是其振型子空间V_λ上的缩聚系统（$[M]_\lambda$，$[K]_\lambda$）的固有频率，其中

$$[M]_\lambda=[\Phi]_\lambda^T[M][\Phi]_\lambda,\quad [K]_\lambda=[\Phi]_\lambda^T[K][\Phi]_\lambda \tag{25}$$

下面举例说明上述结果的应用。

例2 已知两自由度系统的自由振动方程为

$$\{\ddot{x}\}+\begin{bmatrix}1 & \sqrt{15}/2 \\ \sqrt{15}/2 & 4\end{bmatrix}\{\dot{x}\}+\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 9\end{bmatrix}\{x\}=\{0\}$$

该系统有一个特征值 $\lambda=-2$，试讨论这个特征值的亏损情况。

解：$S_{\lambda=-2}$是一维的，$\{\varphi\}_\lambda=\begin{Bmatrix}\sqrt{15} \\ 3\end{Bmatrix}$，而且有关系

$$\frac{\{\varphi\}_\lambda^T[C]\{\varphi\}_\lambda}{\{\varphi\}_\lambda^T[M]\{\varphi\}_\lambda}=4=-2\lambda$$

根据〔推论5〕，特征值 $\lambda=-2$ 有亏损。

例3 已知某振动系统的系数矩阵为

$$[M]=\begin{bmatrix}1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 12\end{bmatrix},\quad [C]=\begin{bmatrix}2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -7 \\ -2 & -7 & x\end{bmatrix},\quad [K]=\begin{bmatrix}4 & & 0 \\ & 9 & \\ 0 & & y\end{bmatrix}$$

且存在亏损特征值 $\lambda=-1$，求 x 和 y 的值。

解　由于阻抗矩阵 $[Z(-1)]$ 的秩数为2，对应的振型向量 $\{\varphi\}_\lambda=\{1,\ 1,\ -1\}^T$，由此推出 $y-x=-3$ 另一方面由亏损条件 $\{\varphi\}_\lambda^T[\lambda^2M-K]\{\varphi\}=0$ 得 $y=1$，从而 $x=4$。

例 4　证明下列的四自由度系统

$$[M]=\begin{bmatrix}1 & & & 0\\ & 1 & & \\ & & 17 & \\ 0 & & & 17\end{bmatrix},\quad [C]=\begin{bmatrix}2 & 1 & -2 & -4\\ 1 & 2 & -7 & 9\\ -2 & -7 & 9 & 5\\ -4 & 9 & 5 & 5\end{bmatrix}$$

$$[K]=\begin{bmatrix}4 & & & 0\\ & 9 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1\end{bmatrix}$$

的特征值 $\lambda=-1$ 是亏损的。

〔证明〕　这个特征值的振型矩阵为

$$[\Phi]_\lambda=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\\ -1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},\ 而\ [M]_\lambda=\begin{bmatrix}19 & 0\\ 0 & 19\end{bmatrix},\ [K]_\lambda=\begin{bmatrix}14 & -5\\ -5 & 14\end{bmatrix}$$

$[\lambda^2M_\lambda-K_\lambda]=\begin{bmatrix}5 & 5\\ 5 & 5\end{bmatrix}$ 奇异，根据〔推论 6〕，$\lambda=-1$ 是亏损特征值，它的重数至少为3。

参考文献

〔1〕 陈振蕃，拟内积概念与线性振动系统的特征亏损，南京航空学院学报，(1985)，第四期，第13～23页。
〔2〕 倪金福，张阿舟，关于复模态理论的若干问题，振动与冲击，(1984) 第一期。
〔3〕 陈振蕃，一般线性振动系统及其脉冲响应矩阵，南京航空学院学报，(1984)，第二期，第 1～13页。
〔4〕 陈振蕃，一般线性振动系统的轭联模态，南京航空学院学报，(1984)，第二期，第14～26页。

THE CHARACTERISTIC DEFICIT OF LINEAR VIBRATING SYSTEMS

Chen Zhenfan

(*Nanjing Aeronautical Institute*)

Abstract

This paper derives sufficient and necessary conditions for the characteristic deficit of a linear vibrating system and gives several examples with characteristic deficit and arrives at some useful conclusions.