

数字式飞行控制系统的最优离散设计

飞行自动控制系统研究所 李利春

一、最优离散调节器设计原理

离散调节器问题从本质上说,是在采样周期(T)内使输入保持恒定的条件下,通过逐点求解而将一个连续型系统转换为离散型,并求出最优控制,致使系统在偏离参考状态时,按性能指标最小化条件恢复到参考状态。离散调节器设计由于没有采用近似的处理,因而是一种精确的方法。

一个连续的时不变系统及其二次型代价函数描述为下列形式:

$$\dot{x} = Fx + Gu \quad (1)$$

$$J = \int_0^t (x^T Ax + u^T Bu) dt \quad (2)$$

转换为离散型可表示为

$$x_{i+1} = \phi x_i + \Gamma u_i \quad (3)$$

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N \begin{bmatrix} x_i^T & u_i^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ u_i \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中: $N = t/T$; $\phi = e^{FT} = I + FT + \frac{(FT)^2}{2!} + \dots$; $\Gamma = \int_0^T \phi(\tau) G d\tau$, 按照公式(4),

离散系统及其代价函数可以改写为

$$x_{i+1} = (\phi - \Gamma A_{22}^{-1} A_{21}) x_i + \Gamma u'_i \quad (5)$$

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} (x_i^T A' x_i + u_i'^T B' u_i') + \frac{1}{2} x_N^T A' x_N \quad (6)$$

其中: $A' = A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}$; $B' = A_{22}$; $u'_i = u_i + A_{22}^{-1} A_{21} x_i$ (7)

当采用线性反馈时:

$$u'_i = K x_i \quad (8)$$

$$u_i = (K - A_{22}^{-1} A_{21}) x_i \quad (9)$$

但是对性能指标的离散化计算,存在着较大的困难。当性能指标中含有交叉项,特别是状态与控制之间的交叉项时,目前尚无理想的方法可用于这种计算。在性能指标不含交叉项(即 A_{11} , A_{22} 均为对角阵,且 $A_{12} = A_{21} = 0$)的条件下,系统即可简单地描述为下列形式:

$$\left. \begin{aligned} x_{i+1} &= \phi x_i + \Gamma u_i \\ J &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} (x_i^T A x_i + u_i^T B u_i) + \frac{1}{2} x_N^T A x_N \\ u_i &= K(i) x_i \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

显然, 此时离散型加权阵 A 、 B 是与其连续形式相同的, 从而使计算大为简化。

对方程组 (10) 所定义的 n 维系统, 在对代价函数 J 引入拉格朗日倍数因子后, 通过变分计算求解增广的代价函数, 并构成 $2n \times 2n$ 维增广系统, 最终归结为解两点边值问题。由此导出的黎卡提方程如下:

$$\left. \begin{aligned} P_j &= \phi^T (P_{j+1}^{-1} + \Gamma B^{-1} \Gamma^T)^{-1} \phi + A \quad j = N-1, \dots, 0 \\ P_N &= A \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

如果随着 N 的增大, P_j 达到稳态值 P_{ss} 的话, 最优控制 u_i 即可简化为具有常数增益阵的下列形式:

$$u_i = -B^{-1} \Gamma^T \phi^{-T} (P_{ss} - A) x_i = K x_i \quad (12)$$

对方程 (11) 目前有两种解法, 第一种是逆递推法, 第二种是特征向量分解法, 本文采用第一种方法。

二、飞行控制律设计

对数字式飞行控制系统的最优设计, 希望能以准确的性能指标, 直接确定加权阵而无需对它反复调试。为此本文采用 C^* 和 D^* 规范作为性能指标。研究表明, 这些指标不仅适用于增稳型系统 (包括电传飞行控制系统), 而且适用于自动驾驶仪。

纵向增稳系统性能指标 纵向增稳连续系统的基本形式可描述为

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -n_{22} & 1 \\ -n_{32} & -n_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \omega_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -n_{2\delta} \\ -n_{3\delta} \end{bmatrix} \delta_e \quad (13)$$

C^* 规范的实质是要求系统受扰后, 总的法向过载与单独由俯仰角加速度在过渡空速 (V_{∞}) 下造成的过载之和为最小, 它的表达式为

$$C^* = n_{y_p} + \frac{V_{\infty}}{g} \omega_z \quad (14)$$

系统代价函数给定为

$$J = \int_0^{\infty} [(C^*)^2 + \rho \delta_e^2] dt \quad (15)$$

将公式 (14) 代入 (15) 并舍去交叉项 (二阶微量) 后可得

$$J = \int_0^{\infty} (A_a \alpha^2 + A_{\omega} \omega_z^2 + B \delta_e^2) dt \quad (16)$$

其中: 驾驶员位置的过载 (n_{y_p}) 可由重心位置的过载取代, 并且

$$n_{y_p} = \frac{V_{\infty}}{g} (n_{22} \alpha + n_{2\delta} \delta_e) \quad (17)$$

于是权阵 A 和 B (B 为标量) 成为

$$A = \begin{bmatrix} A_a & 0 \\ 0 & A_{\omega} \end{bmatrix}, \quad B = \rho + \left(\frac{n_{2\delta} V_{\infty}}{g} \right)^2 \quad (18)$$

其中: $\rho = 1/n_{33}$; $A_a = (n_{22}V_0/g)^2$; $A_o = (V_{c0}/g)^2$; V_0 ——飞行速度; V_{c0} ——过渡空速(优选值在 400ft/s 左右)。当系统的维数大于 2 时, 对附加状态的加权可按附加性能指标确定。

横侧向系统性能指标 横侧向连续系统的基本形式可描述为

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega}_y \\ \dot{\beta} \\ \dot{\omega}_x \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -n_{33} & -n_{31} & -n_{32} & 0 \\ -n_{13} & -n_{11} & -n_{12} & -n_{14} \\ -n_{23} & -n_{21} & -n_{22} & 0 \\ -\text{tg}\alpha_0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_y \\ \beta \\ \omega_x \\ \varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -n_{3r} & -n_{3a} \\ -n_{1r} & 0 \\ -n_{2r} & -n_{2a} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \delta_r \\ \delta_a \end{bmatrix} \quad (19)$$

相应的 D^* 规范可表示为

$$D^* = n_{z_p} - K_3 q_{c0} \beta \quad (20)$$

其中: n_{z_p} ——驾驶员位置的侧向过载; q_{c0} ——过渡动压(一般选择为 350lb/ft²); $K_3 q_{c0} = \left(\frac{n_{11}V_0}{g}\right)_{q=q_{c0}}$ 。 D^* 规范的实质是要求总的侧向过载与单独由侧滑角在适宜的动压下造成的侧向过载之代数和为最小。为简化计算可用重心上的 n_z 取代 n_{z_p} , 并且:

$$n_z = -\frac{V_0}{g}(n_{11}\beta + n_{1r}\delta_r) \quad (21)$$

舍去交叉项后可得

$$(D^*)^2 = A_\beta \beta^2 + B_r \delta_r^2 \quad (22)$$

引入 D^* 规范后, 系统代价函数可写为

$$J = \int_0^\infty (A_R \omega_y^2 + A_\beta \beta^2 + A_p \omega_x^2 + A_\varphi \varphi^2 + B_r \delta_r^2 + B_a \delta_a^2) dt \quad (23)$$

其中: $A_\beta = (n_{11}V_0/g)^2 + (K_3 q_{c0})^2$; $A_R = 1$; $B_r = n_{3r}$; $B_a = n_{3a}$ 。对 ω_x 的加权 A_p 大约按原飞机横侧滚摆比 κ 之值来确定, 即:

$$\frac{A_R}{A_p} = \kappa \quad (24)$$

最末一个加权 A_φ 的确定与系统类型有关, 对于增稳型系统, A_φ 应充分小, 以免损失机动性, 本文推荐按下式确定

$$A_\varphi = \frac{1}{100n_{22}} \quad (25)$$

而对自动驾驶仪来说, A_φ 应足够大, 以抑制滚转角的扰动偏离, 推荐值如下

$$A_\varphi = n_{22} \quad (26)$$

按照上述性能指标, 系统加权阵成为

$$A = \begin{pmatrix} A_R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_\varphi \end{pmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_r & 0 \\ 0 & B_a \end{bmatrix} \quad (27)$$

三、算 例

以某型超音速飞机的中高空最大动压飞行状态为例, 纵向增稳系统方程如下

$$x_{i+1} = \phi x_i + \Gamma u_i$$

$$x_i^T = [\alpha \quad \omega_z]_i$$

$$u_i = \delta_{e_i}$$

当取 $V_{co} = 400 \text{ft/s}$, 获得加权阵如下

$$A = \begin{bmatrix} .4043 & 0 \\ 0 & .047 \end{bmatrix}, B^{-1} = 14$$

当采样频率 $f_s = 40$ 时, 转移矩阵和控制矩阵分别为

$$\phi = \begin{bmatrix} .98633 & .02532 \\ -.4136 & .98241 \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} -.00573 \\ -.34507 \end{bmatrix}$$

获得的最优控制为

$$u_i = K x_i, K = [.8868 \quad .7578]$$

阶跃 ($\delta_e = 1^\circ$) 响应过程如图 1(a) 所示, α 是快速单调过程。改变 V_{co} 之值, 所获得的响应的对比如图 1(b) 所示, 证明最优的 V_{co} 之值确是在 400ft/s 附近。三组 V_{co} 值

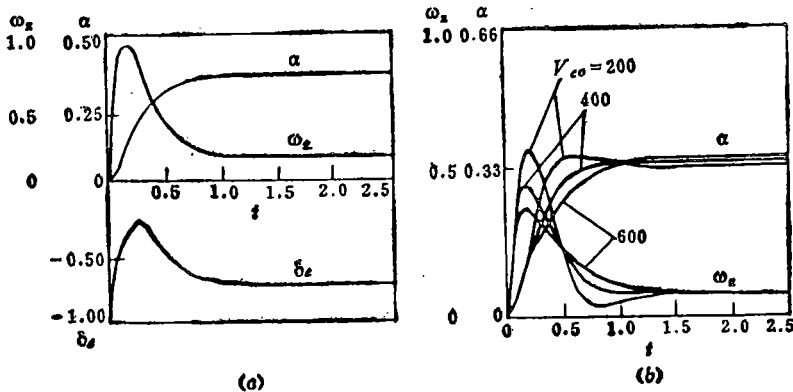


图 1 纵向增稳响应

(a) $V_{co} = 400$, (b) 三种 V_{co} 的对比。

表 1 V_{co} 对系统控制品质的影响 ($f_s = 40$)

V_{co}	$\sigma \pm j\omega$	ζ	ω_n	$\sigma_a(\%)$	$t_a(s)$
200	$-4.25 \pm j 4.70$	0.671	6.33	9	0.88
400	$-5.94 \pm j 1.96$	0.949	6.25	0 ⁺	0.63
600	-3.11, -12.2	1.243	6.16	0	1.22

所对应的闭环根值和品质参数列于表 1, 更清楚地示于图 2 的根迹图上。图中还示出了在相同的性能指标 ($V_{co} = 400$) 下, 当采样频率取不同值 (10, 20, 40 和 80) 时, 根迹的变化情况。随着采样频率的增加, 主根迹变平, 反馈增益变大。这主要是因为控制矩阵元素随采样周期的缩短而变小, 在相同的能量代价约束下, 反馈增益必然相应增大。从调节器本身 (不考虑量化误差等) 来看, 即使采样频率下降到 $10 \frac{1}{s}$, 仍能获得良好的品质。此外, 尚对阵风干扰响应作了检查, 结果同样是满意的。广泛验证表明, 所提出的方法对不同型号的飞机和不同的飞行状态也都满足要求。

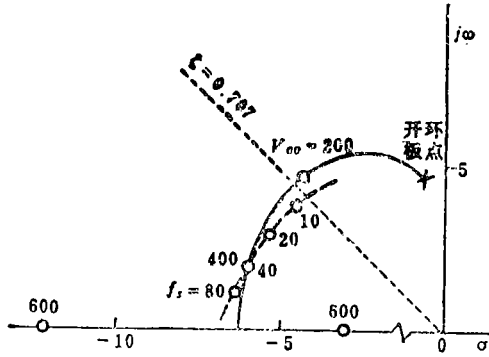


图 2 纵向增稳系统根迹

对于横侧向系统, 分别作了全状态调节器和输出调节器设计, 并考虑了增稳和自动驾驶仪两种系统类型。系统方程为

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= \phi x_i + \Gamma u_i \\ y_i &= C x_i \\ x_i^T &= [\omega_y \quad \beta \quad \omega_x \quad \varphi]_i \\ u_i^T &= [\delta_r \quad \delta_a]_i \end{aligned}$$

当采样频率 $f_s=40$ 时, 转移矩阵和控制矩阵分别为

$$\phi = \begin{pmatrix} .99233 & -.09945 & -.00096 & 0 \\ .02532 & .99588 & .00083 & .00038 \\ -.02014 & -.62842 & .95457 & 0 \\ -.00083 & 0 & .02532 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} -.04921 & .00019 \\ -.00085 & -.00017 \\ -.18485 & -.39084 \\ -.00237 & -.00504 \end{pmatrix}$$

取 $q_{\omega_0}=350\text{lb/ft}^2$, 获得加权阵如下:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .04 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .005 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & .0625 \end{pmatrix}$$

计算最优控制, 获得增益矩阵如下:

$$K = \begin{pmatrix} 1.5401 & -.1418 \\ .5582 & -.2332 \\ .0643 & .0443 \\ .0104 & .0064 \end{pmatrix}$$

图 3(a) 和 (b) 分别示出了对阶跃副翼和阶跃方向舵 (均为 1°) 指令的响应过程; 图 3(c) 是常值阵风 ($\alpha_0=1^\circ$) 干扰响应。值得指出的是, 按所述方法设计的横航协调品质是十分满意的, 在阶跃滚转指令的整个响应过程中, 侧滑角几乎恒等于零。另外, 由于原飞机 x 值较大, 最优控制的副翼通道 ω_x 反馈增益为负值 ($-.2332$), 这将使上反效应降低, 从而 x 值下降到适宜的水平 (约为 2.14), 但并不出现蹬舵反坡度现象, 而且

螺旋模态总是稳定的。采样频率和不同的加权对系统控制品质的影响如图 4 的根迹图所示。按所述方法加权获得的荷兰滚模态位于图中的 P 点, 充分接近 $\zeta = 0.707$ 线, 但计算表明若使方向舵加权增加约一倍 (图中的 Q 点), 则横航协调品质和航向静稳定性将更为理想。如同纵向系统一样, 反馈增益仍随采样频率的增高而变大。随着采样频率的降低 (从 40 降到 10), 荷兰滚模态将逐渐变坏, 航向静稳定性下降, 而螺旋模态将趋近于未增稳的飞机。当采样频率下降到 10 1/s 时, 控制品质有明显的降级。按相同的性能指标, 几种采样频率下的控制品质参数如表 2 所列。

表 2 采样频率的影响

f_s	ζ_d	ω_{nd}	T_K	T_S	α
10	.627	2.25	.566	23.9	3.24
20	.723	2.28	.592	7.75	3.07
40(P)	.698	2.43	.508	8.07	3.18
40(Q)	.868	2.75	.590	9.13	2.14

在横侧增稳系统设计的基础上, 仅改变对姿态角的加权, 就能获得自动驾驶仪的最优设计。图 5 示出了在 $A_\psi = n_{22} = 1.86$ 条件下, 横向自动驾驶仪的阶跃控制响应。

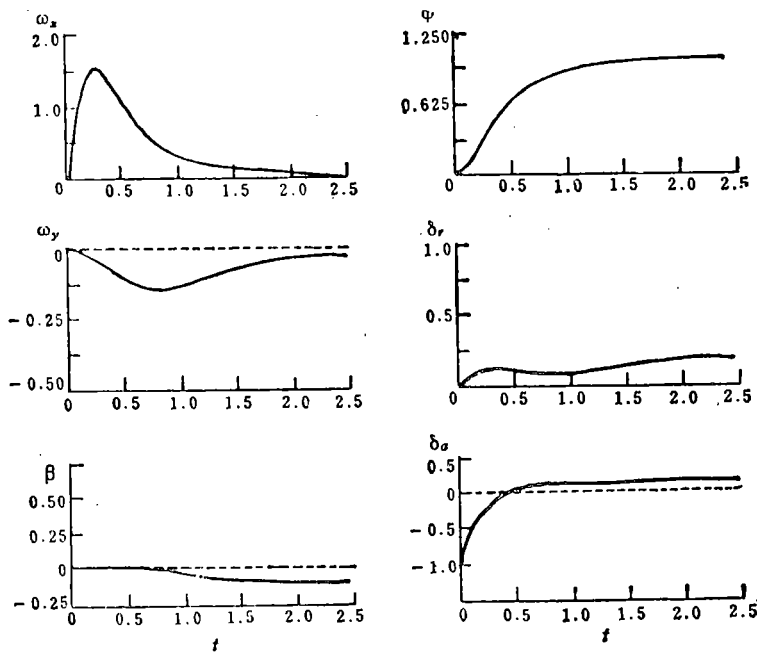


图 5 横向自动驾驶仪姿态控制响应

最后, 当按二输入三输出 ($\dot{\omega}_y, \beta, \omega_x$) 调节器设计横侧增稳系统时, 获得的增益矩阵和控制品质仍与全状态调节器相近, 但横航协调品质有所下降。

四、结 语

利用二次型最优离散调节器原理, 按 C^* 和 D^* 规范以及某些附加的飞行品质要求直接加权, 已获得数字式飞行控制系统的满意设计。这种规范的实质是与最优控制理论相

一致的。简捷的权阵离散转换方法,使计算更为容易和方便。设计表明,横侧向系统较之纵向系统更敏感采样频率的改变。在相同的性能指标约束下,反馈增益总是随采样频率的增加而变大。

参 考 文 献

- [1] Paul Katz, *Digital Control Using Microprocessor*, Prentice-Hall, (1981).
- [2] Dinesh A. Keskar and Gary L. Slater, *Load Factor Response of Digitally Controlled Aircraft*, AIAA 1977 Guidance and Control Conference, Paper 77-1080, (1977).

OPTIMAL DISCRETE DESIGN OF DIGITAL FLIGHT CONTROL SYSTEM

Li Lichun

(Institute of Automatic Flight Control System)

Abstract

An engineering method of optimal discrete regulator design for digital flight control system is described. There are various existing methods available for calculating the transition matrix $\phi(T)$ and its integral. However, methods for calculating weighting matrix numerically in the presence of coupling between the state and control variables are not found. This paper presents an engineering method, with it, the continuous quadratic performance criterion can be simply transformed to a discrete version. The C^* and D^* criterion and some additional flying quality requirements are used for constituting the quadratic cost function and to precisely determine the value of elements of weighting matrix without repeated adjustment. An example using this method to synthesize the stability augmentation system and autopilot is given. Design results are satisfactory, and it shows that, for the longitudinal system, at slow sample rate, less than 10 samples per second, optimal control laws are still adequate to ensure a good system response; for the lateral-directional system, however, the system response is more sensitive to the change of sample rate, and system performance shall be degraded with sample rate slower than 10 samples per second. Under the condition of same performance criterion, the optimal control gains always increase with the sample rate.