第7卷 第3期
1986年6月

航空学报
ACTA AERONAUTICA ET ASTRONAUTICA SINICA

Vol. 7 No. 3
June 1986

考虑一阶环节和法向约束的最优导引律

西北工业大学　　詹致祥

前　言

目前关于最优导引律的文献中，除文献〔2〕讨论了将导引对象视为具有瞬时响应特性的质点，考虑了控制的法向约束而外，其他均未考虑控制的约束问题。为了大幅度地提高导引精度，在建立“导引对象——目标”的数学模型时，就必须考虑导引对象的动态响应。但是如果把实际动态响应全部都考虑到，就会使问题变得非常复杂，以致无法解决，在目前的研究中总是将导引对象的动特性简化为一阶或二阶环节。本文在假定导引过程中导引对象的运动方向变化不大的条件下导出了导引对象的动特性为一阶惯性环节，控制受到法向约束，以零控拦截曲面为目标集的最优导引律。

对于大气层以内的导引，当控制力的来源为空气动力时，如果忽略诱导阻力，控制力沿弹道的法向，即控制应满足法向约束条件。

大多数文献是针对飞行器的，本文的背景是水下航行器。由于水下航行器的控制力仅为流体动力，推力是常数，所以其控制力应当满足法向约束条件。又由于水的阻尼远大于空气的阻尼，所以大多数水下航行器的动特性可以相当满意地简化为一阶惯性环节。

主要符号

$\vec{X}$　相对位置矢量

$\vec{V}$　相对速度矢量

$\vec{a}$　相对加速度矢量

$\vec{V}_v$　航行器的速度矢量

$\vec{a}_v$　航行器的加速度矢量

$\vec{a}_t$　目标的加速度矢量

$\vec{u}_t$　航行器的控制矢量

t_f　从导引运动开始至命中目标的时间，称导引时间

T　到达零控拦截曲面的时间，称引入时间

μ　由零控拦截曲面至命中目标的时间，称剩余时间

τ　航行器的时间常数

1984年11月9日收到。

τ_t 目标的时间常数

一、 问题的提法

"航行器——目标"的数学模型:

$$\left.\begin{array}{ll}\dot{\vec{X}}=\vec{V} & \vec{X}(0)=\vec{X}_0\\ \dot{\vec{V}}=\vec{a}_t-\vec{a}_v & \vec{V}(0)=\vec{V}_0\\ \dot{\vec{a}}_v=-\dfrac{1}{\tau}\vec{a}_v+\dfrac{1}{\tau}\vec{u} & \vec{a}_v(0)=\vec{a}_{v0}\end{array}\right\} \tag{1}$$

性能指标

$$J=\frac{1}{2}\int_0^T \vec{u}^\tau\vec{u}_{dt} \tag{2}$$

T 是终点时刻，是事先选定的。

目标集是零控拦截曲面 L 和航行器的加速度为零:

$$\left.\begin{array}{l}L^{[2]}:\ \vec{X}(T)+\mu\vec{V}(T)=0,\quad \mu\geqslant 0\\ \vec{a}_v(T)=0\end{array}\right\} \tag{3}$$

如果 T 已选定则 μ 待定。

约束条件

$$\langle\vec{u},\ \vec{V}_v\rangle=0,\ |\vec{V}_v|=\text{常数} \tag{4}$$

二、 最优导引律

系统（1）的 Hamilton 方程为

$$H=\vec{\psi}_1^\tau\vec{V}+\vec{\psi}_2^\tau\vec{a}_t-\vec{\psi}_2^\tau\vec{a}_v-\frac{1}{\tau}\vec{\psi}_3^\tau\vec{a}_v+\frac{1}{\tau}\vec{\psi}_3^\tau\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{u}^\tau\vec{u} \tag{5}$$

式中 $\vec{\psi}_1$，$\vec{\psi}_2$，$\vec{\psi}_3$ 是系统（1）的共轭矢量，它们满足共轭方程

$$\left.\begin{array}{l}\dot{\vec{\psi}}_1=-\dfrac{\partial H}{\partial\vec{X}}=0\\ \dot{\vec{\psi}}_2=-\dfrac{\partial H}{\partial\vec{V}}=-\vec{\psi}_1\\ \dot{\vec{\psi}}_3=-\dfrac{\partial H}{\partial\vec{a}_v}=\vec{\psi}_2+\dfrac{1}{\tau}\vec{\psi}_3\end{array}\right\} \tag{6}$$

和横截条件

$$\left.\begin{array}{l}\vec{\psi}_1(T)=\vec{\lambda}\\ \vec{\psi}_2(T)=\mu\vec{\lambda}\\ \vec{\psi}_3(T)=\vec{\nu}\end{array}\right\} \tag{7}$$

$\vec{\nu}$ 和 $\vec{\lambda}$ 是 Lagrange 乘子，是三维待定常矢量。

由极值条件

$$\frac{\partial H}{\partial\vec{u}}+\delta\frac{\partial}{\partial\vec{u}}\langle\vec{u},\ \vec{V}_v\rangle=0$$

得最优导引律为

$$\vec{u}^*(t)=\frac{1}{\tau}\vec{\psi}_3(t)+\delta\vec{V}_v(t)$$

式中δ是Lagrange乘子。由约束条件确定δ后，代入上式得

$$\vec{u}^*(t)=\frac{1}{\tau}\vec{\psi}_3(t)-\frac{1}{\tau|\vec{V}_v|^2}\langle\vec{\psi}_3(t),\ \vec{V}_v(t)\rangle\vec{V}_v(t) \tag{8}$$

要确定$\vec{u}^*(t)$需要求解共轭方程组（6），并使其满足横截条件（7）得

$$\left.\begin{aligned}&\vec{\psi}_1(t)=\vec{\lambda}\\&\vec{\psi}_2(t)=(T+\mu-t)\vec{\lambda}\\&\vec{\psi}_3(t)=e^{-\frac{1}{\tau}(T-t)}\vec{\nu}-\tau\left[(\tau-\mu)e^{-\frac{1}{\tau}(T-t)}+(T+\mu-\tau-t)\right]\vec{\lambda}\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

将$\vec{\psi}_3(t)$代入（8）式

$$\vec{u}^*(t)=\frac{1}{\tau}e^{-\frac{1}{\tau}(T-t)}\vec{\nu}_1-\left[(\tau-\mu)e^{-\frac{1}{\tau}(T-t)}+(T+\mu-\tau-t)\right]\vec{\lambda}_1 \tag{10}$$

式中

$$\vec{\nu}_1=\vec{\nu}-\frac{1}{|\vec{V}_v|^2}\langle\vec{\nu},\ \vec{V}_v(t)\rangle\vec{V}_v(t),\qquad \vec{\lambda}_1=\vec{\lambda}-\frac{1}{|\vec{V}_v|^2}\langle\vec{\lambda},\ \vec{V}_v(t)\rangle\vec{V}_v(t)$$

为了确定$\vec{u}^*(t)$，还必须确定$\vec{\nu}_1$与$\vec{\lambda}_1$，为此求解方程组（1）。将式（10）代入方程组（1）后积分。由于假定航行器的运动方向变化不大，在积分过程中可以把$\vec{V}_v(t)$看成常矢量，于是得到

$$\left.\begin{aligned}
\vec{X}(t)=&\vec{X}_0+\vec{V}_0t+\int_0^t(t-s)\vec{a}_t(s)\,ds+\tau\left[\tau\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)-t\right]\vec{a}_{v0}\\
&-e^{-\frac{T}{\tau}}\left[\frac{\tau}{2}\left(e^{\frac{t}{\tau}}-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)-t\right]\vec{\nu}_1+\left\{(T+\mu)\tau\left[\tau\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)-t\right]\right.\\
&\left.+(\tau-\mu)\tau e^{-\frac{T}{\tau}}\left[\frac{\tau}{2}\left(e^{\frac{t}{\tau}}-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)-t\right]+\frac{1}{2}\left[(T+\mu)t^2-\frac{t^3}{3}\right]\right\}\vec{\lambda}_1\\
\vec{V}(t)=&\vec{V}_0\\
&+\int_0^t a_t(s)\,ds-\tau\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\vec{a}_{v0}-e^{-\frac{T}{\tau}}\left[\frac{1}{2}\left(e^{\frac{t}{\tau}}+e^{-\frac{t}{\tau}}\right)-1\right]\vec{\nu}_1\\
&-\left\{(T+\mu)\tau\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)-(\tau-\mu)\tau e^{-\frac{T}{\tau}}\left[\frac{1}{2}\left(e^{\frac{t}{\tau}}+e^{-\frac{t}{\tau}}\right)-1\right]\right.\\
&\left.+\frac{1}{2}\left[(T+\mu-t)^2-(T+\mu)^2\right]\right\}\vec{\lambda}_1\\
\vec{a}_v(t)=&e^{-\frac{t}{\tau}}a_{v0}+\frac{1}{2\tau}e^{-\frac{T}{\tau}}\left(e^{\frac{t}{\tau}}-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\vec{\nu}_1\\
&+\left[(T+\mu)e^{-\frac{t}{\tau}}-\frac{1}{2}(\tau-\mu)e^{-\frac{T}{\tau}}\left(e^{\frac{t}{\tau}}-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\right.\\
&\left.-(T+\mu-t)\right]\vec{\lambda}_1
\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

在式（11）中令 $t=T$，代入（3）式，解出 $\vec{v}_1$ 与 $\vec{\lambda}_1$ 后代入式（10），然后令 $t=0$ 得闭环导引律如下：

$$\vec{u}^*_{(0)}=\frac{Q(T,\ \mu)}{P(T,\ \mu)}\left[\vec{X}^0(T)+\mu\vec{V}^0(T)+\frac{R(T,\ \mu)}{Q(T,\ \mu)}\vec{a}^0_v(T)\right] \tag{12}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}
&Q(T,\mu)=(T+\mu+\tau)e^{-\frac{2T}{\tau}}-2\mu e^{-\frac{T}{\tau}}+(T+\mu-\tau)\\
&P(T,\ \mu)=-\left\{\frac{T^3}{3}+(T+\mu)[(T+\mu+\tau)\tau+T\mu]-\tau\mu(\tau-\mu)\right\}e^{-\frac{2T}{\tau}}\\
&\qquad+4\tau\mu(T+\mu)e^{-\frac{T}{\tau}}+\frac{T^3}{3}-(T+\mu)[(T+\mu-\tau)\tau-T\mu]\\
&\qquad-\tau\mu(\tau+\mu)\\
&R(T,\ \mu)=P(T,\ \mu)M(T,\ \mu)+Q(T,\ \mu)F(T,\ \mu)\\
&M(T,\ \mu)=\frac{2e^{-\frac{T}{\tau}}}{e^{-\frac{2T}{\tau}}-1}\\
&F(T,\ \mu)=\frac{\tau}{e^{-\frac{2T}{\tau}}-1}\left[(\tau-\mu)e^{-\frac{2T}{\tau}}+2(T+\mu)e^{-\frac{T}{\tau}}-(\tau+\mu)\right]\\
&\vec{X}^0(T)+\mu\vec{V}_0(T)=\vec{X}_0+(T+\mu)\vec{V}_0+\int_0^T(T+\mu-S)\vec{a}_t(s)ds\\
&\qquad-\tau\left[(\tau-\mu)e^{-\frac{T}{\tau}}+(T+\mu-\tau)\right]\vec{a}_{v0}\\
&\vec{a}^0_v(T)=e^{-\frac{T}{\tau}}\vec{a}_{v0}
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

最终确定导引律 $\vec{u}^*_{(0)}$ 还必须确定 μ（或 $T+\mu$）。由约束条件 $\langle\vec{u}^*(0),\ \vec{V}_{v0}\rangle=0$，并注意到 $\langle\vec{a}_{v0},\ \vec{V}_{v0}\rangle=0$，得

$$Q(T,\ \mu)=0 \tag{14}$$

$$\langle\vec{X}^0(T)+\mu\vec{V}^0(T),\ \vec{V}_{v0}\rangle=0 \tag{15}$$

由式（14）解出的 μ 与初始状态无关，因此只能用式（15）来确定 μ。当 T 和初始状态给定之后，可由式（15）解出 μ。如果对应于这个 μ 值由式（12）所确定的，在 T 时间内为消除初始偏差所需的控制加速度超过可用法向过载，可另给较大的 T 值，重新计算 μ，并进行验算。如果对应于给定的 T 和初始状态方程（15）没有正根，说明这种初始状态不能实现导引。

三、讨　论

1. 如果目标的动特性也是一阶惯性环节，则

$$\vec{a}_t(t)=e^{-\frac{t}{\tau_t}}\vec{a}_{t0} \tag{16}$$

将式（16）代入式（13）的最后两个式子然后再代入式（12），得

$$\vec{u}^*(0)=\frac{Q(T,\ \mu)}{P(T,\ \mu)}\Big\{\vec{X}_0+(T+\mu)\vec{V}_0+\varphi(k\tau,\ T,\ \mu)\vec{a}_0$$

$$+\left[\frac{R(T,\ \mu)}{Q(T,\ \mu)}e^{-\frac{T}{\tau}}+\varphi(k\tau,\ T,\ \mu)-\varphi(\tau,\ T,\ \mu)\right]\vec{a}_{\nu0}\Big\} \tag{17}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}&\varphi(\tau,\ T,\ \mu)=\tau\left[(\tau-\mu)e^{-\frac{T}{\tau}}+(T+\mu-\tau)\right]\\&\varphi(k\tau,\ T,\ \mu)=k\tau\left[(k\tau-\mu)e^{-\frac{T}{k\tau}}+(T+\mu-k\tau)\right]\\&k=\frac{\tau_t}{\tau}，一般情况下\ k>1\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

由约束条件 $\langle\vec{u}^*(0),\ \vec{V}_{\nu0}\rangle=0$，得

$$\langle\vec{X}_0,\ \vec{V}_{\nu0}\rangle+(T+\mu)\langle\vec{V}_0,\ \vec{V}_{\nu0}\rangle+\varphi(k\tau,\ T,\ \mu)\langle\vec{a}_0,\ \vec{V}_{\nu0}\rangle=0$$

由上式解出 $T+\mu$

$$T+\mu=-\frac{\langle\vec{X}_0,\ \vec{V}_{\nu0}\rangle+\varphi(k\tau,\ T,\ \mu)\langle\vec{a}_0,\ \vec{V}_{\nu0}\rangle}{\langle\vec{V}_0,\ \vec{V}_{\nu0}\rangle} \tag{19}$$

又

$$\begin{aligned}\vec{X}_0+(T+\mu)\vec{V}_0&=\vec{X}_0-\frac{\langle\vec{X}_0,\ \vec{V}_{\nu0}\rangle\vec{V}_0+\varphi(k\tau,\ T,\ \mu)\langle\vec{a}_0,\ \vec{V}_{\nu0}\rangle\vec{V}_0}{\langle\vec{V}_0,\ \vec{V}_{\nu0}\rangle}\\&=\frac{\langle\vec{V}_0,\ \vec{V}_{\nu0}\rangle\vec{X}_0-\langle\vec{X}_0,\ \vec{V}_{\nu0}\rangle\vec{V}_0-\varphi(k\tau,\ T,\ \mu)\langle\vec{a}_0,\ \vec{V}_{\nu0}\rangle\vec{V}_0}{\langle\vec{V}_0,\ \vec{V}_{\nu0}\rangle}\\&=-\frac{\langle\vec{X}_0,\ \vec{X}_0\rangle}{\langle\vec{V}_0,\ \vec{V}_{\nu0}\rangle}\vec{\omega}_0\times\vec{V}_{\nu0}-\varphi(k\tau,\ T,\ \mu)\frac{\langle\vec{a}_0,\ \vec{V}_{\nu0}\rangle}{\langle\vec{V}_0,\ \vec{V}_{\nu0}\rangle}\vec{V}_{\nu0}\end{aligned} \tag{20}$$

式中

$$\vec{\omega}_0=\frac{\vec{X}_0\times\vec{V}_0}{\langle\vec{X}_0,\ \vec{X}_0\rangle}\text{是视线旋转率} \tag{21}$$

将式（20）代入式（17）

$$\vec{u}^*(0)=-\frac{Q(T,\ \mu)}{P(T,\ \mu)}\Big\{\frac{\langle\vec{X}_0,\ \vec{X}_0\rangle}{\langle\vec{V}_0,\ \vec{V}_{\nu0}\rangle}\vec{\omega}_0\times\vec{V}_{\nu0}+\varphi(k\tau,\ T,\mu)\left[\frac{\langle\vec{a}_0,\ \vec{V}_{\nu0}\rangle}{\langle\vec{V}_0,\ \vec{V}_{\nu0}\rangle}\vec{V}_0-\vec{a}_0\right]$$

$$-\left[\frac{R(T,\ \mu)}{Q(T,\ \mu)}e^{-\frac{T}{\tau}}+\varphi(k\tau,\ T,\ \mu)-\varphi(\tau,\ T,\ \mu)\right]\vec{a}_{\nu0}\Big\} \tag{22}$$

由此看出，$\vec{u}^*(0)$ 由两部分组成：第一项是变系数的比例导航，其余各项是与相对速度、相对加速度和航行器的加速度有关的修正项。

由文献〔3〕

$$\vec{a}_0=2\frac{\langle\vec{X}_0,\ \vec{V}_0\rangle}{\langle\vec{X}_0,\ \vec{X}_0\rangle}\vec{\omega}_0\times\vec{X}_0+\frac{\langle\vec{X}_0,\ \vec{a}_0\rangle}{\langle\vec{X}_0,\ \vec{X}_0\rangle}\vec{X}_0+\dot{\vec{\omega}}_0\times\vec{X}_0 \tag{23}$$

上式表明，若相对加速度不易测量时，可通过测量相对距离，视线旋转角速度，角加速度和相对速度及相对加速度在视线上的投影得到。

2．水下航行器的速度远小于飞行器的速度，导引时间较长，所以

$$\frac{T}{\tau} \gg 1, \quad \frac{T}{\tau_t} \gg 1 \tag{24}$$

考虑到式（24）可将式（13）的前两式及式（18）简化为

$$\left.\begin{aligned} &Q(T,\ \mu)=Q(t_f)=t_f,\ \ P(T,\ \mu)=P(t_f,\ \sigma)=t_f^3\sigma\left(\frac{\sigma^2}{3}-\sigma+1\right) \\ &\varphi(\tau,\ T,\ \mu)=\varphi(\tau,\ t_f)=t_f\tau,\ \ \varphi(k\tau,\ T,\ \mu)=\varphi(k\tau,\ t_f)=kt_f\tau \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

其中

$$t_f=T+\mu,\quad \sigma=\frac{T}{t_f} \tag{26}$$

将式（25）及式（26）代入式（17），得

$$\vec{u}^*(0)=\frac{1}{t_f^2\sigma\left(\dfrac{\sigma^2}{3}-\sigma+1\right)}\left[\vec{X}_0+t_f\vec{V}_0+kt_f\tau\vec{a}_0+(k-1)t_f\tau\vec{a}_{v0}\right] \tag{27}$$

由约束条件

$$t_f=-\frac{\langle\vec{X}_0,\ \vec{V}_{v0}\rangle}{\langle\vec{V}_0,\ \vec{V}_{v0}\rangle+k\tau\langle\vec{a}_0,\ \vec{V}_{v0}\rangle} \tag{28}$$

将式（28）代入式（27）并注意到式（21）和式（23），得

$$\begin{aligned} \vec{u}^*(\vec{X}_0,\ \vec{V}_0,\ \vec{a}_0,\ \vec{\omega}_0,\dot{\vec{\omega}}_0,\ \vec{V}_{v0},\ \vec{a}_{v0},\ \sigma)=&-\frac{\langle\vec{V}_0,\ \vec{V}_{v0}\rangle+k\tau\langle\vec{a}_0,\ \vec{V}_{v0}\rangle}{\sigma\left(\dfrac{\sigma^2}{3}-\sigma+1\right)\langle\vec{X}_0,\vec{V}_{v0}\rangle} \\ \times\Bigg[\frac{\langle\vec{X}_0,\ \vec{X}_0\rangle}{\langle\vec{X}_0,\ \vec{V}_{v0}\rangle}\vec{\omega}_0\times\vec{V}_{v0}+2k\tau\frac{\langle\vec{X}_0,\ \vec{V}_0\rangle}{\langle\vec{X}_0,\ \vec{X}_0\rangle}\vec{\omega}_0\times\vec{X}_0&+k\tau\left(\frac{\langle\vec{X}_0,\ \vec{a}_0\rangle}{\langle\vec{X}_0,\ \vec{X}_0\rangle}-\frac{\langle\vec{a}_0,\ \vec{V}_{v0}\rangle}{\langle\vec{X}_0,\ \vec{V}_{v0}\rangle}\right)\vec{X}_0 \\ +k\tau\dot{\vec{\omega}}_0\times\vec{X}_0+(k-1)\tau\vec{a}_{v0}\Bigg]& \end{aligned} \tag{29}$$

将$\vec{X}_0$，$\vec{V}_0$，$\vec{a}_0$，$\vec{\omega}_0$，$\dot{\vec{\omega}}_0$，$\vec{V}_{v0}$，$\vec{a}_{v0}$视为系统（1）的实时状态时，本文得到的最优导引律具有实时状态反馈的特点。

3．σ的选择

与直接导引法相比，间接导引多了一个可调参数σ。选择σ的原则是使弹道的法向过载满足要求，同时又留有一定的剩余时间进行“微调”，以提高导引精度。一般情况下应选σ接近于1，否则会增大弹道的法向过载。令

$$\frac{d\,|\vec{u}^*(\cdot)|}{dt}=0$$

将式（29）代入上式得σ＝1。这一结果表明，在相同的初始状态下弹道的最小法向过载发生在σ＝1处。

参考文献

〔1〕 臧冠中、佟明安，现代控制理论导论，国防工业出版社，（1981）。
〔2〕 韩京清，拦截问题中的导引律，国防工业出版社，（1977）。
〔3〕 王朝珠，最优拦截导引律，航空学报，1979年第4期。
〔4〕 王朝珠，带有不确定因素的最优拦截制导律，航空学报，4卷4期（1983）。
〔5〕 陈学愚，一种考虑一阶惯性环节的最优制导律，航空学报，3卷4期（1982）。

〔6〕 李忠应，具有二阶环节的导弹的最优导引律，航空学报，3卷4期（1982）。

〔7〕 Cottrell, R. G., Optimal intercept guidance for short-range tactical missiles, AIAA J., Vol. 9, No.7 (1971).

〔8〕 Carber, V., Optimum intercept laws of acceleratary target, AIAA J, Vol.6, No. 11 (1968).

OPTIMAL GUIDANCE LAW WITH FIRST ORDER LAG LOOP AND NORMAL CONSTRAINT

Zhan Zhixiang

(Northwestern Polytechnical University)

Abstract

An optimal guidance law based on the maximum principle is discussed in this paper. It is assumed that the kinetic characteristics of "vehicle-target" are that of a first order lag loop which can be described as follows:

$$\dot{\vec{X}} = \vec{V}$$

$$\dot{\vec{V}} = \vec{a}_t - \vec{a}_v$$

$$\dot{\vec{a}}_v = -\frac{1}{\tau}\vec{a}_v + \frac{1}{\tau}\vec{u},$$

the performance index is the minimum control energy consumption

$$J = \frac{1}{2}\int_0^T \vec{u}^T\vec{u}dt,$$

the terminal states belong to a intecept curved surface with control cut-off and the terminal acceleration of the vehicle equals zero:

$$\vec{X}(\tau) + \mu\vec{V}(T) = 0, \quad \mu \geqslant 0$$

$$\vec{a}_v(T) = 0,$$

the control force satisfies the normal constraint:

$$\langle\vec{u}, \ \vec{V}_v\rangle = 0 。$$

Based on these assumptions, an analytical form of the closed loop optimal intercept guidance law has been deduced.