

文章编号: 1004-4574(2007)05-0143-05

高强箍筋混凝土简支梁斜裂缝分形理论研究

戎 贤¹, 刘 源², 王铁成³, 谭品峰³

(1 河北工业大学 土木工程学院, 天津 300130 2 西南大学, 工程技术学院, 重庆 400716 3 天津大学 建筑工程学院, 天津 300072)

摘要:通过对 8根集中荷载作用下高强箍筋 T形截面简支梁的试验研究, 运用分形理论对试件中斜裂缝的出现、发育及分布特征进行了分析。结果表明: 分形理论对斜裂缝自相似性有很好的量化关系。

关键词: 高强箍筋; 分形几何; 分形维数; 斜裂缝

中图分类号: TU375.1 **文献标识码:** A

Fractal theory-based research on diagonal crack of reinforced concrete simple beam with high-strength stirrup

RONG Xian¹, LIU Yuan², WANG Tie-cheng³, TAN Ping-feng³

(1. College of Civil Engineering Hebei University of Technology Tianjin 300130 China 2. College of Engineering and Technology, South-west University, Chongqing 400715, China 3. College of Civil Engineering Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract In this paper, experimental research on diagonal crack in eight T-shaped simple beams with high-strength stirrup under concentrated load was presented. By using fractal theory, the diagonal crack opening development and distribution of concrete simple beam with high-strength stirrup under concentrated load is analysed. The results indicate that the fractal theory has a good quantizing relationship on self-similarity of diagonal crack.

Keywords high-strength stirrup; fractal geometry; fractal dimension; diagonal crack

分形理论作为一种有效的非线性数学工具, 为分析材料中一类不规则几何现象提供了新的思想、方法、解释。广泛用于钢筋混凝土等一系列存在着大量不规则分布微、细观裂纹缺陷复合材料中。

对于混凝土受剪斜裂缝的研究, 应用分形几何理论可以定量和定性描述斜裂缝的演化、分布及其结构特征。本文通过 8根 T形截面简支梁试验, 得出了高强箍筋混凝土简支梁斜裂缝的分布规律, 用分形几何理论加以研究和论证, 并实现用分形理论在斜裂缝和混凝土损伤断裂能之间建立起联系。

1 分形几何简介

分形几何学 (fractal geometry) 由法国数学家 Mandelbrot 在 20 世纪 70 年代中期创立, 他在 1976 年《科学》杂志上发表了题为“英国海岸线有多长?” 的文章, 正式提出了分形几何学, 所谓分形是一种散乱的延伸, 但结构却十分精细的图案, 如果把它放大, 就会显示出反复出现的细节, 相似的结构在所有尺度上都存在, 分形现象的一个重要特征就是自相似性, 我们应用中多是统计意义上自相似或局部一定尺度上的分形结构。

收稿日期: 2007-04-30 修订日期: 2007-08-16

基金项目: 河北省自然科学基金资助项目 (E2007000064); 国家 863 课题 (2004AA33G050)

作者简介: 戎贤 (1965-), 男, 教授, 主要从事结构工程研究. E-mail: liuyuan2000392000@yahoo.com.cn

分形几何最重要的概念是分形维数, 简称分维, 最早由 Hausdorff 于 1919 年提出, 通常我们只对 R^n 的子集的维数感兴趣, 许多维数的定义依赖于对集 E “在尺度 r 下的度量”, 通过这样的尺度观测集合可以确定集合的不规则性, 于是维数通常是依据这些度量值当 $r \rightarrow 0$ 时服从的幂定律的状况来定义。

实际研究中主要涉及到集合的容量维数 (也叫盒维数)、Hausdorff 维数、填充维数, 本文试验主要采用盒维数和星积分形曲面定理, 定义为: 对 R^n 的一个非空有界子集 E , 设 $N_r(E)$ 是覆盖 E 的直径为 r 的集合的最少个数, E 的上、下盒维数的定义分别为:

$$\underline{\dim}_B E = \lim_{r \rightarrow 0} \inf \frac{\log N_r(E)}{-\log r} \tag{1}$$

和

$$\overline{\dim}_B E = \lim_{r \rightarrow 0} \sup \frac{\log N_r(E)}{-\log r} \tag{2}$$

如果他们相等就把这相等的值称为盒维数:

$$\dim_B E = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N_r(E)}{-\log r} \tag{3}$$

这样能覆盖 E 的直径为 r 的集合的最少个数大约是 r^{-s} 阶, 这里的 $s = \dim_B E$ 。

星积分形曲面定理^[5]: 设 $A: z=f(x), x \in [a, b]$ 和 $B: z=g(y), y \in [c, d]$ 分别为坐标平面 xoz 和 $yo z$ 中的分形曲线, $f(a)=g(c)$ 则:

$$\dim(A * B) = 1 + \max(\dim A, \dim B) \tag{4}$$

2 试件设计

试件的截面尺寸及配筋情况见图 1 表 1。其中配蒙皮钢筋网片的截面 A-A 适用于试验梁 LQ7、LQ8 纵筋配置 5 25 分两排放置, 放置方法参考截面 A-A。

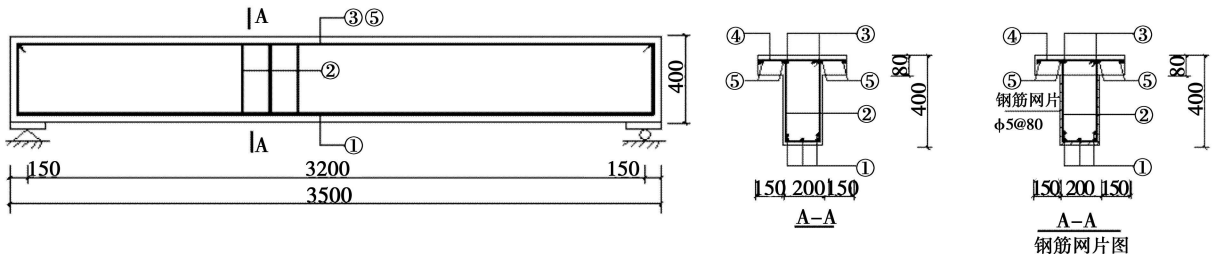


图 1 试验梁截面形式

Fig 1 Section of tested beams

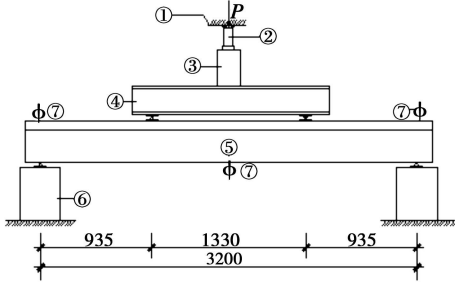
表 1 梁的配筋

Table 1 Reinforcement of beams

构件编号	混凝土	①筋 500 MPa	②筋 500 MPa	③筋 (II 级)	④筋 (I 级)	⑤筋 (I 级)
LQA1	C30	5 25	10@ 200	2 12	φ 68@ 200	2φ6
LQA2	C40	5 25	10@ 200	2 12	φ 68@ 200	2φ6
LQA3	C50	5 25	10@ 200	2 12	φ 68@ 200	2φ6
LQA4	C30	5 25	10@ 250	2 12	φ 68@ 200	2φ6
LQA5	C40	5 25	10@ 250	2 12	φ 68@ 200	2φ6
LQA6	C50	5 25	10@ 250	2 12	φ 68@ 200	2φ6
LQA7	C40	5 25	10@ 200	2 12	φ 68@ 200	2φ6
LQA8	C40	5 25	10@ 250	2 12	φ 68@ 200	2φ6

注: LQA7 和 LQA8 为配有 φ5@ 80 蒙皮钢筋网的试验梁。

3 试验装置及加载方式



注: ①—反力梁; ②—压力传感器; ③—液压千斤顶; ④—反力梁;
⑤—试验梁; ⑥—支墩; ⑦—百分表。

图 2 对称集中加载

Fig 2 Symmetrically concentrated load

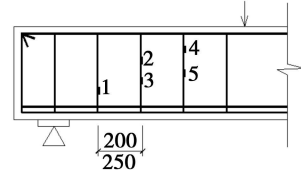


图 3 试验梁应变片位置

Fig 3 Location of strain gages on stirrup of tested beam

4 分形理论研究

在对受剪斜裂缝的研究中, 传统断裂力学理论把斜裂缝看成一条一维直线, 把断裂斜截面看成平坦的二维平面。实际上, 混凝土裂缝的扩展并非沿着理想的一维直线前进, 而是往往按 Z 或 Y 字形路径向前扩展, 而大的 Z(Y)形路径又包含不同小尺寸 Z(Y)字形微裂缝, 层层嵌套。因此断裂表面是粗糙不规则的, 断裂表面的真实面积大于平面表观面积, 图 4 为试验梁裂缝分布。根据式 (4), 分析梁 A、B 两面剪跨段的斜裂缝分布图, 然后利用盒维数网格法用不同尺寸的网格覆盖在拟定分维的裂缝图上, 对支座处到加载点 (如图 3) 斜裂缝所占据的网格进行计数, 表 2 分别统计出 8 根梁在不同标度下 $N(r)$ 即裂缝总数。为减小误差, $N(r)$ 为 A、B 面对应段的平均。

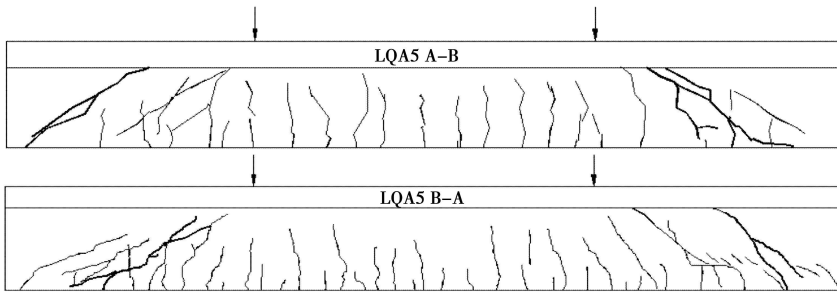


图 4 梁的裂缝分布

Fig 4 Distribution of cracks in beam

表 2 不同标度 r 下有裂缝的格子总数 $N(r)$ 统计结果

Table 2 Statistics of amount $N(r)$ of grids with crack for different scales r

r/mm	$N(r)$							
	LQA1	LQA2	LQA3	LQA4	LQA5	LQA6	LQA7	LQA8
1 0	1321	1189	1217	1165	1379	1197	1441	1537
2 0	573	551	547	542	591	532	643	692
2 5	453	442	437	431	478	429	512	538
3 0	387	363	371	361	381	349	423	434
3 5	301	295	306	297	308	293	356	369
4 0	261	257	267	248	255	261	292	302
5 0	221	203	237	199	219	201	228	245
6 0	179	181	185	173	169	164	189	195
7 0	149	143	148	138	136	141	146	163
8 0	125	129	118	113	126	119	126	143
9 0	109	113	101	99	103	107	106	126
10 0	85	78	81	76	83	84	89	78

将上述统计结果绘制在双对数坐标图中,最有代表的 3 根梁为: LQA 5, LQA 7, LQA 8得到图 5所示。

由图 5可看出,双对数图具有很好的拟合度,说明高强箍筋混凝土在剪力作用下的裂缝具有较好的自相似性,具有分形特征,由分形盒维数的定义式 (1), (2), (3)可知:分形就是斜率,然后在图 5的双对数坐标系下取 n 个点的坐标为:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n) \text{ 设 } l_{xx} = \sum_{i=1}^n (x_i - x)^2,$$

$$l_{yy} = \sum_{i=1}^n (y_i - y)^2, l_{xy} = \sum_{i=1}^n (x_i - x)(y_i - y), \text{ 拟合回归直线方程为:}$$

$$y = \hat{a} + \hat{b}x$$

其中 $\hat{b} = l_{xy} / l_{xx}$, $\hat{a} = y - \hat{b}x$ 分别求出各自斜率即为裂缝的分形维数,结果如下:

$$\dim(\text{LQA } 5) = 1.183$$

$$\dim(\text{LQA } 7) = 1.258$$

$$\dim(\text{LQA } 8) = 1.287$$

由公式 (4)可以计算出斜裂缝面上的分形维数,分别为: 2.183, 2.258, 2.287, 结果表明:断裂面上的分形维数可以很好的表征混凝土损伤破坏的机理,根据断裂力学 Griffith 裂纹扩展理论,材料发生脆性断裂时的临界裂纹断裂能 G_f 为:

$$G_f = 2\gamma_s \tag{5}$$

式中 γ_s 为单位面积的表面能,它是反映材料物性的一个量,式 (5)是对断裂面为平坦光滑面的情况,即不考虑斜裂缝扩展的分形特点,将分形维数引入到断裂准则并考虑裂缝扩展沿不规则路径,分形维数被引入断裂准则,上式可写为:

$$G'_f = 2[L(\epsilon) / L_0(\epsilon)] \gamma_s \tag{6}$$

其中 $L(\epsilon) / L_0(\epsilon)$ 为单位长度裂纹的断面比原来直量的值,计算 G'_f 的值为:

$$G'_f = 2\gamma_s \left(\frac{H}{r}\right)^{d-2} \quad (2 < d < 3) \tag{7}$$

式中 H 为断裂韧带高度, r 为盒计维数标度,把上面计算出的面维数带入 (6)式可分别得:

$$G'_{f(\text{LQA } 5)} = 2\gamma_s \left(\frac{H}{r}\right)^{2.183-2} = 2\gamma_s \left(\frac{H}{r}\right)^{0.183} \tag{8}$$

$$G'_{f(\text{LQA } 7)} = 2\gamma_s \left(\frac{H}{r}\right)^{2.258-2} = 2\gamma_s \left(\frac{H}{r}\right)^{0.258} \tag{9}$$

$$G'_{f(\text{LQA } 8)} = 2\gamma_s \left(\frac{H}{r}\right)^{2.287-2} = 2\gamma_s \left(\frac{H}{r}\right)^{0.287} \tag{10}$$

从式 (7), (8), (9), (10)可以看出混凝土断裂能与混凝土断裂面的分数维是正相关的,随着 d 的增加 G'_f 也增加,即裂纹扩展路径愈不规则,对应的断裂面也就越粗糙,必然导致所耗的断裂能越大;这与我们按现行《混凝土结构设计规范》(GB50010-2002)对配置 500 MPa 箍筋构件的斜截面承载力值与分形断裂能有很好的正相关性,计算结果见表 3 由以上分析可以知道:斜裂缝的长生、发育、发展到破坏的过程取决于

表 3 试验梁受剪承载力

Table 3 Shear bearing capacity of tested beams

构件编号	实测破坏剪力 V_u^0 /kN	计算破坏剪力 V_u^c /kN	比值 V_u^0 / V_u^{cal}
LQA1	364.6	225.9	1.61
LQA2	388.3	230.0	1.69
LQA3	396.2	235.7	1.68
LQA4	339.3	197.6	1.71
LQA5	369.5	201.7	1.83
LQA6	371.6	227.3	1.63
LQA7	486.3	315.8	1.54
LQA8	497.2	317.4	1.57

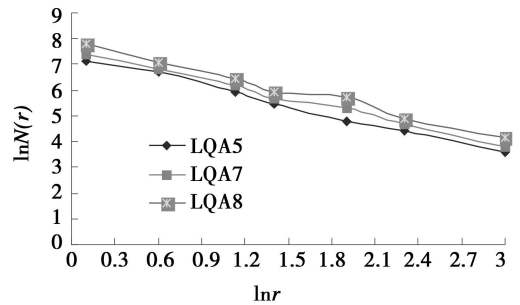


图 5 $\ln V(r) - \ln r$ 的关系

Fig 5 Relationship of $\ln V(r) - \ln r$

试验梁面上的分形曲线的维数, 混凝土损伤表面的分维值在 1.10~1.90 之间对应的斜裂缝状态可以分为线状、面状和网状 3 类, 一般线状分维值大致为 1.10~1.40, 面状为 1.30~1.60, 网状为 1.50~1.90, 分维值不仅反映了损伤斜裂缝的几何特征, 其值越大, 损伤越开裂越严重, 同时分维也在损伤断裂能中蕴藏了丰富信息, 结合我们做的试验梁, 面分维值在线状范围内, 说明 50MPa 箍筋在限制斜裂缝和延伸以及在正常使用阶段的斜裂缝宽度的限制都体现出很好稳定性和足够的安全储备, 分形理论对高强箍筋混凝土梁研究有很好理论指导作用。

5 结论

- (1) 分形几何很好的把斜裂缝和混凝土损伤断裂能联系起来;
- (2) 分维值随剪力的增大而增大, 说明梁内部“空化”现象越来越严重;
- (3) 高强箍筋混凝土简支梁在剪力作用下的斜裂缝分布极其复杂, 具有分形特征, 用分形维数可以描绘其破坏承载力的大小和裂缝化程度;
- (4) 配置蒙皮钢筋的混凝土构件的受剪承载力有一定程度地提高, 并且蒙皮钢筋的配置使得垂直裂缝和斜裂缝开展数量均增多, 裂缝发展细密, 分形维数相对较大, 能有效地限制裂缝开展宽度又能改善受剪破坏的脆性性能。

参考文献:

- [1] 谢和平, 等. 分形几何 - 数学基础应用 [M]. 重庆: 重庆大学出版社, 1991.
- [2] 肯尼斯·法尔科内. 分形几何中的技巧 [M]. 沈阳: 东北大学出版社, 1999.
- [3] 谢和平, 等. 混凝土损伤断裂的分形特征 [M]. 跨世纪的工程力学, 1996.
- [4] 王铁成, 等. 混凝土结构裂缝状态及其扩展的分形几何解析 [J]. 大连理工大学学报, 1997, 8: 77-81.
- [5] 谢和平, 等. 星积分形曲面及其维数 [J]. 应用数学和力学, 1997, 11(20): 1101-1106.
- [6] 陈瑜, 等. 分形在混凝土损伤表面的应用及其分数维的计算方法探讨 [J]. 混凝土, 2004, 10: 18-21.
- [7] 谢和平. 岩石混凝土损伤力学 [M]. 徐州: 中国矿业大学出版社, 1990: 111-115.
- [8] Tan K H, Lu H Y. Shear behavior of large reinforced concrete deep beams and code comparisons [J]. ACI Structural Journal, 1996, 5: 693-702.
- [9] 陈万春, 等. 基于分形理论的钢筋混凝土梁式桥裂缝发育特征 [J]. 长安大学学报, 2003, 23(6): 44-46.
- [10] 谢和平, 鞠杨. 混凝土微观损伤断裂的分形行为 [J]. 煤炭学报, 1997, 22(6): 586-589.
- [11] 孙丽凤. 分形几何方法模拟混凝土材料的裂纹扩展 [J]. 青岛建筑工程学报, 1998, 2: 87-91.