文章编号：1001-506X(2012)04-0854-03

指数寿命产品的寿命性能评估

晏爱君，刘三阳
（西安电子科技大学数学系，陕西 西安 710071）

摘　要： 传统的统计过程控制理论假设过程的质量特性值服从正态分布，然而在实践过程中这一假设并不成立。本文假设产品的质量特性值服从指数分布，基于定数截尾样本，用过程能力指数评估产品的寿命性能，给出寿命性能指数 C_L 的一致最小无偏估计及其置信区间，提出一种新的方法对 C_L 进行检验。最后通过实例表明，此检验方法不仅简单易行，而且还可以用来判断产品是否达到所要求的水平。

关键词： 寿命性能指数；P 值检验；一致最小方差无偏估计；指数分布

中图分类号： O 213　　**文献标志码：** A　　**DOI：** 10.3969/j.issn.1001-506X.2012.04.37

Estimation of lifetime performance exponential products

YAN Ai-jun, LIU San-yang
(*Department of Mathematics, Xidian University, Xi'an 710071, China*)

Abstract: The traditional statistical process control theory is to assume that the characteristic value of quality of the process is normal distribution. However, in the practical process this hypothesis is untenable. The quality characteristic of the products is assumed to obey exponential distribution, and the process capability index is used to evaluate the lifetime performance of products based on the type II right-censored sample. This study constructs a uniformly minimum variance unbiased estimator (UMVUE), and the confidence interval of the lifetime performance index is also given. Then the UMVUE of the lifetime performance index is utilized to develop a new hypothesis testing. Finally, a practical example is illustrated that the test method is simple and easy to operate. Moreover, this method can be employed to determine whether the products achieve the required level.

Keywords: lifetime performance index; P-value test; uniformly minimum variance unbiased estimator (UMVUE); exponential distribution

0　引　言

过程能力指数是衡量生产过程中的产品质量特性适合规格和接近目标值的能力[1]，是质量管理中一个非常重要的指标，被广泛地应用在制造业的质量监控方面，以评估制造能力是否合乎标准。传统的统计过程控制理论都是假设过程的质量特性值服从正态分布，而在实际的生产过程中，收集到的数据往往不是服从正态分布[2]。文献[3]指出电子零件寿命常常服从指数、Gamma 或 Weibull 分布，文献[4－5]指出企业寿命为 Pareto 分布，文献[6－8]指出产品寿命为双参数指数分布等。文献[9]提出可用过程能力指数评估电子零件的寿命性能，并将它定义为寿命性能指数 C_L。文献[10－11]在完全样本情况下，推导出指数分布产品的寿命性能指数 C_L 的一致最小方差无偏估计(uniformly minimum variance unbiased estimator，UMVUE)及置信区间；文献[12－13]分别在记录值样本和逐步 II 型截尾样本下，得出指数产品的寿命性能指数 C_L 的估计量并对其进行检验。本文在定数截尾的情况下，讨论指数分布产品的寿命性能指数 C_L，给出 C_L 的 UMVUE 和置信区间，并用一种新的 P 值检验法对 C_L 进行检验。

1　产品寿命性能指数及其 UMVUE

假设产品寿命 X 服从指数分布，密度函数为

$$f_X(x) = \theta e^{-\theta x},\ x > 0, \theta > 0 \tag{1}$$

对于指数分布的产品来说，其寿命性能指数 C_L 为

$$C_L = \frac{\mu - L}{\sigma} = \frac{\dfrac{1}{\theta} - L}{\dfrac{1}{\theta}} = 1 - \theta L \tag{2}$$

收稿日期： 2011－09－02；**修回日期：** 2012－01－10。

基金项目： 国家自然科学基金(61105065)资助课题

作者简介： 晏爱君(1978－)，女，讲师，博士研究生，主要研究方向为贝叶斯统计、可靠性评估。E-mail：yanaijun@xidian.edu.cn

式中，μ 为过程均值；σ 为过程标准差；$\mu=\sigma=\dfrac{1}{\theta}$；$L$ 为规格下限（即顾客对产品寿命的最低容忍值）。当 $X\geqslant L$ 时，该产品被视为合格品，故产品的合格率 R_c 定义为

$$R_C=P(X\geqslant L)=\int_L^{\infty}\theta\exp(-\theta x)\mathrm{d}x=$$
$$\exp(-\theta L)=\mathrm{e}^{C_L-1},\ -\infty<C_L<1 \tag{3}$$

从式(3)可看出，由 C_L 值可得到相应的合格率 R_C；反之，由合格率 R_C 也可得到相应的 C_L 值。文献[14]指出，寿命性能指数 C_L 与合格率 R_C 间的关系相当密切，C_L 值越大，说明产品质量越好，合格率越高。因此，运用 C_L 和合格率 R_C 之间的数学关系，可以使寿命性能指数 C_L 成为一个评估产品寿命的有效工具。

考虑定数截尾寿命试验。取 n 个产品同时进行试验，当产品失效数达到事先给定的正整数 $r(1<r<n)$ 时，试验停止，记相应的失效时间为 $x_{(1)}\leqslant x_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant x_{(r)}$，总试验时间为 $T=\sum\limits_{i=1}^{r}x_{(i)}+(n-r)x_{(r)}$，则定数截尾样本 $x=(x_{(1)},x_{(2)},\cdots,x_{(r)})$ 的联合密度函数为

$$L(x\mid\theta)=\frac{n!}{(n-r)!}\theta^r\exp\left[-\theta\left(\sum_{i=1}^{r}x_{(i)}+(n-r)x_{(r)}\right)\right]=$$
$$\frac{n!}{(n-r)!}\theta^r\exp(-\theta T) \tag{4}$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(x|\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0$ 得 θ 的极大似然估计 $\hat{\theta}=\dfrac{r}{T}$。由极大似然估计的不变性[15]知

$$\hat{C}_L=1-\hat{\theta}L=1-\frac{rL}{T} \tag{5}$$

又因为 $2\theta T\sim\chi^2_{(2r)}$[16]，故

$$E(\hat{C}_L)=E\left(1-\frac{rL}{T}\right)=1-\frac{r}{r-1}\cdot\theta L\neq C_L$$

即 $\hat{C}_L$ 不是 C_L 的无偏估计，但当 $r\to+\infty$ 时，$E(\hat{C}_L)\to C_L$，且

$$E(\hat{C}_L-C_L)^2=\mathrm{Var}(\hat{C}_L)+(E(\hat{C}_L)-C_L)^2=$$
$$\frac{r^2\theta^2L^2}{(r-1)^2(r-2)}+\frac{\theta^2L^2}{(r-1)^2}\to 0$$

即 $\hat{C}_L$ 是 C_L 的渐近无偏估计，也是一致估计。将 C_L 的估计量修正为

$$\hat{C}_L^*=1-\frac{(r-1)L}{T} \tag{6}$$

因为

$$E(\hat{C}_L^*)=1-(r-1)L\cdot E\left(\frac{1}{T}\right)=$$
$$1-(r-1)L\cdot\frac{\theta}{r-1}=1-\theta L=C_L$$

所以 $\hat{C}_L^*$ 是 C_L 的无偏估计，易证 $\hat{C}_L^*$ 是 C_L 的一致估计，又因为 $\hat{C}_L^*$ 是充分完备统计量，所以 $\hat{C}_L^*$ 是 C_L 的 UMVUE。

2　产品寿命性能指数 C_L 的 P 值检验

为了了解产品质量是否满足顾客的要求，需要评估产品寿命性能指数 C_L 是否达到所要求的水平，下面对寿命性能指数 C_L 进行 P 值检验并给出 C_L 的置信区间。假设所要求的寿命性能指数 C_L 大于或等于 c，其中，c 为目标值。在显著性水平 α 下，考虑假设检验：$H_0:C_L\leqslant c$，$H_1:C_L>c$。选取枢轴量 $\hat{C}_L^*$ 作为检验统计量，于是这个检验问题的 P 值为

$$P\text{ 值}=P\{\hat{C}_L^*>C_L'\mid C_L=c\}=$$
$$P\left\{1-\frac{(r-1)L}{T}>C_L'\mid C_L=c\right\}=$$
$$P\left\{T>\frac{(r-1)L}{1-C_L'}\mid C_L=c\right\}=$$
$$P\left\{2\theta T>\frac{2\theta(r-1)L}{1-C_L'}\mid 1-\theta L=c\right\}=$$
$$P\left\{2\theta T>\frac{2(r-1)(1-c)}{1-C_L'}\right\} \tag{7}$$

式中，C_L' 是 $\hat{C}_L^*$ 的观测值。通过上式求出 P 值，将其与显著性水平 α 做比较，若 P 值 $<\alpha$，则拒绝原假设 H_0，即说明产品寿命性能指数达到要求水平。

另一方面

$$P\{2\theta T\leqslant\chi^2_\alpha(2r)\}=$$
$$1-\alpha\Rightarrow P\left\{2(r-1)\cdot\frac{1-C_L}{1-\hat{C}_L^*}\leqslant\chi^2_\alpha(2r)\right\}=$$

$$1-\alpha\Rightarrow P\left\{C_L\geqslant 1-\frac{(1-\hat{C}_L^*)\cdot\chi^2_\alpha(2r)}{2(r-1)}\right\}=1-\alpha$$

所以 C_L 的 $1-\alpha$ 单侧置信区间为

$$C_L\geqslant 1-\frac{(1-\hat{C}_L^*)\cdot\chi^2_\alpha(2r)}{2(r-1)}$$

记

$$\underline{LB}=1-\frac{(1-\hat{C}_L^*)\cdot\chi^2_\alpha(2r)}{2(r-1)} \tag{8}$$

若 $c\notin[\underline{LB},+\infty)$，则拒绝原假设 H_0，说明产品寿命性能指数达到要求水平。

3　实例计算

有一种电气绝缘材料在试验中受到连续不断增加的电压应力的冲击，下面 12 个数据表示其失效时间（单位：min）[16]：21.8，70.7，24.4，138.6，151.9，75.3，12.3，95.5，98.1，43.2，28.6，46.9。我们用上述方法对这组数据进行检验，首先从这 12 个数据里产生截尾样本

$$\{x_{(i)},i=1,2,\cdots,8\}=$$
$$\{12.3,21.8,24.4,28.6,43.2,46.9,70.7,75.3\}$$

假设产品寿命规格下限 $L=4.252$，即若电气绝缘材料的寿命超过 4.252 min，我们就认为它是合格品。若该产品的合格率 R_C 要求不低于 90%，由文献[10]可知，C_L 的值不小于 0.9，因此可设定寿命性能指数值 $c=0.9$，即需进行如下检验：$H_0:C_L\leqslant 0.9$，$H_1:C_L>0.9$。给定显著性水平 $\alpha=$

0.05,计算检验统计量 $\hat{C}_L^*$ 的值,由式(6)得

$$\hat{C}_L^* = 1 - \frac{(8-1)\times 4.252}{624.4} = 0.952\ 3$$

由式(7)

$$P\text{ 值} = P\left\{2\theta T > \frac{2(r-1)(1-c)}{1-C_L'}\right\} = P\left\{2\theta T > \frac{2\times 7\times(1-0.9)}{1-0.952\ 3}\right\} = P\{2\theta T > 29.35\} = 0.022 < 0.05$$

故应该拒绝原假设 H_0,从而得出结论,该电气绝缘材料的寿命性能指数达到要求水平。

由式(8)可得 C_L 的$(1-\alpha)$置信下限

$$\underline{LB} = 1 - \frac{(1-0.952\ 3)\times\chi^2_{0.05}(16)}{2\times 7} = 0.910\ 47$$

因为 $c\notin[\underline{LB},+\infty)$,所以拒绝 H_0,也说明该电气绝缘材料的寿命性能指数达到要求水平。

4 结 论

过程能力指数已被企业广泛用来评估产品的质量特性,本文在定数截尾情形下,假设产品寿命服从指数分布,给出产品寿命的寿命性能指数 C_L 的 UMVUE,然后提出一种新的 P 值检验法,并以 C_L 的 UMVUE 为检验统计量对 C_L 进行检验,然后给出 C_L 的置信区间,最后对一个实例进行分析,判断产品合格率是否达到顾客的要求。本文提出的寿命性能指数评估模式简单且容易使用,不仅可以了解所提供的产品寿命是否达到规定要求,也可以借此方法提高产品的质量,使之满足顾客的需求。另外,由于产品的质量特性并非服从某一特定分布,因此其他的分布(比如 Weibull 分布等)还有待进一步研究。

参考文献:

[1] Kotz S, Lovelace C. *Process capability indices in theory and practice*[M]. London: Amold, 1998.

[2] 孔祥芬. 非正态过程能力分析与控制方法研究[D]. 天津:天津大学, 2007. (Kong X F. Research of process capability analysis and control methods in non-normal processes[D]. Tianjin: Tianjin University, 2007.)

[3] Keller G, Warrack B, Bartel H. *Statistics for management and economics*[M]. Belmont & California Duxbury Press, 1994.

[4] Hong C W, Wu J W, Cheng C H. Implementing lifetime performance index for the pareto lifetime businesses of the service industries[J]. *Quality & Quantity*, 2009, 43(2): 291-304.

[5] Hong C W, Wu J W, Cheng C H. Computational procedure of performance assessment of lifetime index of businesses for the pareto lifetime model with the right type II censored sample[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2007, 184(2): 336-350.

[6] Wu J W, Lee H M, Lei C L. Computational testing algorithmic procedure of assessment for lifetime performance index of products with two-parameter exponential distribution[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2007, 190(1): 116-125.

[7] Lee W C, Wu J W, Lei C L. Evaluating the lifetime performance index for the exponential lifetime products[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2010, 34(5): 1217-1224.

[8] Lee H M, Wu J W, Lei C L, et al. Implementing lifetime performance index of products with two-parameter exponential distribution[J]. *International Journal of Systems Science*, 2010, 42(8): 1-17.

[9] Montgomery D C. *Introduction to statistical quality control*[M]. New York: John Wiley&Sons Inc., 1985.

[10] Tong L I, Chen K S, Chen H T. Statistical testing for assessing the performance of electronic components with exponential distribution[J]. *International Journal of Quality & Reliability Management*, 2002, 19(7): 812-824.

[11] Chen H T, Tong L I, Chen K S. Assessing the lifetime performance of electronic components by confidence interval[J]. *Journal of the Chinese Institute of Industrial Engineers*, 2002, 19(2): 53-60.

[12] Wu J W, Lee H M, Lei C L. Computational procedure for assessing lifetime performance index of products for a one-parameter exponential lifetime model with the upper record values[J]. *Journal of Engineering Manufacture*, 2008, 222(12): 1729-1739.

[13] Lee W C, Wu J W, Hong C W. Assessing the lifetime performance index of products with the exponential distribution under progressively type II right censored samples[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2009, 231(2): 648-656.

[14] Montgomery D C. *Introduction to statistical quality control*[M]. 5th ed. New York: John Willey and Sons, 2005.

[15] Zehna P W. Invariance of maximum likelihood estimation[J]. *Annals of Mathematical statistics*, 1966, 37(3): 744.

[16] Lawless J F. *Statistical models and methods for lifetime data*[M]. 2nd ed. New York: John Wiley&Sons, Inc. 2003.