

# 基于极值理论的系统最大值指标评定方法

韩旭<sup>1</sup>, 王建宇<sup>1</sup>, 祖先锋<sup>2</sup>

(1. 南京理工大学自动化学院, 江苏南京 210094; 2. 空军第一航空学院, 河南信阳 464000)

**摘要:** 提出了基于极值理论的系统最大值指标评定与测算方法, 为某些特殊领域(如航空、航天、国防)中的长周期系统的最大值指标评定提供了理论依据。首先, 遵循一定的原则对系统输出的误差序列进行区组划分, 取得近乎独立的最大値观测序列; 其次, 对最大値观测序列应用极值理论建模, 取得一定重现期下的重现水平和不确定度; 然后考查重现水平与最大値指标间的关系, 并应用经典统计学理论完成对系统最大値指标的评定与测算; 接着, 给出了具体的应用实例, 实验结果表明, 该方法是可行的。最后, 从不同角度对时间序列模型方法与极值理论方法建模求解系统最大値指标的特点进行了对比分析, 并给出了相关结论。

**关键词:** 质量控制与可靠性管理; 评定方法; 广义极值; 最大値指标

中图分类号: N 94

文献标志码: A

DOI: 10.3969/j.issn.1001-506X.2012.05.39

## System maximum-error specification oriented testing methodology based on extreme value theory

HAN Xu<sup>1</sup>, WANG Jian-yu<sup>1</sup>, ZU Xian-feng<sup>2</sup>

(1. School of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China;

2. First Aeronautical College of Air Force, Xinyang 464000, China)

**Abstract:** A testing methodology for the system maximum-error specification based on the extreme value theory is proposed. It can provide a theoretic basis for the testing of maximum-error specification on long-working systems in some special fields, such as aviation, aeronautics and national defenses. Firstly, the error series of system outputs is divided into blocks by obeying some essential principals, and the corresponding maximum error series which are nearly independent with each other are gotten. Secondly, the extreme value models for the maximum error series are built and the return level and its uncertainty are obtained under some return period. Then, the relationships between the return level and the maximum-error specification are researched and the system maximum-error specification is tested and evaluated by using classic statistical theories. After that, a practical sample is given to introduce the methodology more clearly, which shows that this methodology is feasible. Finally, by comparing the proposed methodology with that based on the time series models from different points of view, some conclusions are given.

**Keywords:** quality control and reliability management; testing methodology; generalized extreme value (GEV); maximum-error specification

## 0 引言

传统上,人们对系统误差定量指标的评定都是以独立同分布为假设条件,并应用正态分布理论进行相应的误差分析与处理,最终按照  $3\sigma$  原则给出相应的指标评定结果。这样的指标评定方法对于多数系统而言是合适的,因为它可以将系统误差地总体分布情况直观地展现出来。但在有些特殊领域,如航空、航天以及国防领域,人们对系统可靠

性的关注已不是其平常的表现,而是其在极端条件下的最坏表现。为此,有人提出了以考核系统误差最大值为目标的指标评定方式,这对以往的以正态分布为基础的指标评定体系是个不小的挑战,因为正态分布的  $3\sigma$  原则在分析极值的问题上是存在缺陷的<sup>[1]</sup>;1877年 Helmert 就曾指出,极值问题的正确提法应该与样本量有关。因为当样本量趋于无穷时,会有更多的机会使样本最大值出现在分布的尾部,此时,正态总体的样本最大值也应该趋于无穷。因此,从理

收稿日期:2011-08-31; 修回日期:2012-01-05。

基金项目:教育部博士点新教师基金(200802881012)资助课题

作者简介:韩旭(1975-),男,工程师,博士研究生,主要研究方向为信息系统工程、惯性导航系统。E-mail:china\_hanxu@163.com

论上说,样本的最大值与总体均值的距离大于任一固定常数的  
事件终究要发生,3σ 原则对于小样本而言,过于保守,而对于大样本来说,又太过宽松。因此,在面向系统最大值指标评定的问题上,必须寻找更合适的理论方法。事实上,极值理论已经通过数学建模的方式解决了很多类似的极值问题,并且在气象<sup>[2]</sup>、环境<sup>[3]</sup>、金融保险<sup>[4]</sup>、电力供应<sup>[5]</sup>、机械制造<sup>[6]</sup>、材料与生命科学<sup>[7]</sup>等诸多领域都得到了较好的应用。因此,本文将围绕极值统计建模理论展开对系统最大值指标评定方法的研究。

## 1 基于极值理论的系统误差序列最大值指标评定方法

### 1.1 相关理论基础

#### 1.1.1 平稳极值模型

在考核系统误差序列最大值指标的问题上,人们很自然地会想到经典数理统计方法中的最大/最小顺序统计量分布。但对最大/最小顺序统计量分布而言,当样本容量  $n \rightarrow \infty$  时,其求得的<sup>最大值/最小值分布极限只能是 0 或 1,这样的退化分布是没有任何意义的。为解决这个问题,文献[1]在最大/最小顺序统计量分布的基础上提出了极值类型定理<sup>[1]</sup>,根据该定理,对于独立同分布(假设底分布为  $F(x)$ )的随机变量序列  $\{X_i\}$ ,若  $M_n = \max X_i (i = 1, 2, \dots, n)$ ,且存在常数序列  $\{a_n > 0\}$  和  $\{b_n\}$ ,使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left( \frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x \right) = W(x), x \in \mathbf{R}$  成立,其中  $W(x)$  是非退化的分布函数,则  $W(x)$  必属于下列 3 种类型之一:</sup>

(1) I 型分布(Gumbel 分布)

$$W_1(x; \mu, \sigma) = \exp \left( -e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}} \right), \quad -\infty < x < +\infty \quad (1)$$

(2) II 型分布(Fréchet 分布)

$$W_2(x; a, \mu, \sigma) = \begin{cases} 0, & x \leq \mu \\ \exp \left[ -\left( -\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^{-a} \right], & x > \mu \end{cases} \quad (2)$$

式中,  $a > 0$ 。

(3) III 型分布(Reversed Weibull 分布)

$$W_3(x; a, \mu, \sigma) = \begin{cases} 1, & x > \mu \\ \exp \left[ -\left( -\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^a \right], & x \leq \mu \end{cases} \quad (3)$$

式中,  $a > 0$ 。

1936 年, Von Mises 将这 3 种极值分布统一为一种表述形式,即广义极值(generalized extreme value, GEV)分布,表示为

$$W(x; \mu, \sigma, \xi) = \exp \left[ -\left( 1 + \xi \frac{x-\mu}{\sigma} \right)^{-1/\xi} \right] \quad (4)$$

式中,  $\mu, \xi \in \mathbf{R}; \sigma > 0; 1 + \xi \frac{x-\mu}{\sigma} > 0$ 。

对 GEV 分布而言,当  $\xi > 0$  时,它表示 II 型 Fréchet 分

布;当  $\xi < 0$  时,它表示 III 型 Reversed Weibull 分布;当  $\xi = 0$  时,它表示 I 型 Gumbel 分布。

上述极值分布的模型参数可通过极大似然估计法取得。具体来说,GEV 分布的对数似然函数为

$$l(\mu, \sigma, \xi) = -m \ln \sigma - \left( 1 + 1/\xi \right) \sum_{i=1}^m \ln \left[ 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right] - \sum_{i=1}^m \left[ 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-1/\xi} \quad (5)$$

式中,  $m$  为最大观测值的总数。Gumbel 分布的对数似然函数为

$$l(\mu, \sigma) = -m \ln \sigma - \sum_{i=1}^m \exp \left[ -\left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right] - \sum_{i=1}^m \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \quad (6)$$

关于 Fréchet 分布及 Reversed Weibull 分布的有关结论,可参照 Gumbel 分布的形式自行推导,本文不再赘述。需要注意的是,极大似然估计法并非在任何情况下都是有效的,它需要满足一定的正则条件。例如对于 GEV 分布而言,当  $-1 < \xi < -0.5$  时,极大似然估计法的渐近性条件就不再成立,而当  $\xi < -1$  时,极大似然估计法是没有数值解的,此时,一般推荐使用 L 矩估计法求解<sup>[8]</sup>。幸运的是,多数情况下  $\xi$  都是大于 0.5 的。

根据数理统计分位数(水文统计中也称之为重现水<sup>[11]</sup>)的定义:  $F(x_p) = P\{x < x_p\} = p, 0 < p < 1$ , GEV 分布的  $p$  分位数可表示为

$$x_p = \mu - \sigma(1 - (-\ln p)^{-\xi})/\xi \quad (7)$$

若令重现期为

$$R_p = 1/(1 - p) > 1 \quad (8)$$

则在  $R_p$  下的重现水平即是  $x_p$ 。它表示平均每  $R_p$  个最大观测值中,就会有一个达到或超过  $x_p$ 。换言之,对  $R_p$  个最大观测值而言,其中任意一个最大观测值达到或超过重现水平  $x_p$  的概率为  $1/R_p$ 。注意,这里重现期  $R_p$  表示的是  $R_p$  个最大观测值,这与现实生活中的重现期概念是有区别的。将式(8)代入到式(7),即可得到既定重现期  $R_p$  下的 GEV 分布重现水平值为

$$\hat{x}_p = \hat{\mu} - \hat{\sigma} \left[ 1 - \left( -\ln \frac{R_p - 1}{R_p} \right)^{-\hat{\xi}} \right] / \hat{\xi} \quad (9)$$

同理可得 Gumbel 分布的重现水平值为

$$\hat{x}_p = \hat{\mu} - \hat{\sigma} \ln \left( -\ln \frac{R_p - 1}{R_p} \right) \quad (10)$$

为了计算  $\hat{x}_p$  的方差,参照文献[1,9],可应用 Delta 方法,则

$$\text{Var } \hat{x}_p \approx \nabla \mathbf{x}_p^T \cdot \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{x}_p \quad (11)$$

式中,  $\mathbf{V}$  为极值参数极大似然估计中的协方差矩阵,它等于 Fisher 信息阵的逆矩阵;  $\nabla \mathbf{x}_p^T$  为  $x_p$  关于参数  $\mu, \sigma, \xi$  的全微分函数矩阵;  $\nabla \mathbf{x}_p$  为  $\nabla \mathbf{x}_p^T$  的转置矩阵。这里,假如令  $y_p = -\ln \frac{R_p - 1}{R_p}$ ,则对 GEV 分布有

$$\nabla \mathbf{x}_p^T = \left( \frac{\partial x_p}{\partial \mu}, \frac{\partial x_p}{\partial \sigma}, \frac{\partial x_p}{\partial \xi} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\xi^{-1}(1-y_p^{-\xi}) \\ \hat{\sigma}\hat{\xi}^{-2}(1-y_p^{-\xi}) - \hat{\sigma}\hat{\xi}^{-1}y_p^{-\xi}\ln y_p \end{pmatrix}^T \quad (12)$$

同理,对 Gumbel 分布有

$$\nabla x_p^T = \left( \frac{\partial x_p}{\partial \mu}, \frac{\partial x_p}{\partial \sigma} \right) = (1, -\ln y_p) \quad (13)$$

从而根据极值统计的有关规律,重现期  $R_p$  下的重现水平应服从正态分布,即

$$x_p \sim N(\hat{x}_p, \sqrt{\text{Var } \hat{x}_p}) \quad (14)$$

### 1.1.2 非平稳线性趋势极值模型

以上方法都是针对平稳最大观测值序列的。工程中,有时会发现最大观测值序列可能具有随时间变化的某种非平稳趋势,如线性增长趋势等,此时,可以考虑对极值分布的参数再进行建模,例如对于线性增长趋势,可以令

$$\mu(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t \quad (15)$$

也可以令

$$\sigma(t) = \beta_0 + \beta_1 t \quad (16)$$

每增加一个线性趋势形式的参数设定,相当于减少一个似然比意义下的参数约束。同时需要注意,此时的对数似然函数与式(5)和式(6)中的是有区别的,对 GEV 分布,此时的对数似然函数为

$$l(\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, \xi) = - \sum_{i=1}^m \ln(\beta_0 + \beta_1 i) - (1 + 1/\xi) \sum_{i=1}^m \ln \left[ 1 + \xi \left( \frac{x_i - \alpha_0 - \alpha_1 i}{\beta_0 + \beta_1 i} \right) \right] - \sum_{i=1}^m \left[ 1 + \xi \left( \frac{x_i - \alpha_0 - \alpha_1 i}{\beta_0 + \beta_1 i} \right) \right]^{-1/\xi} \quad (17)$$

求解式(17)的对数似然函数,可得参数  $(\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, \xi)$

的估计值为  $(\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\xi})$ 。

同理可得 Gumbel 分布的对数似然函数参数  $(\alpha_0, \alpha_1,$

$\beta_0, \beta_1)$  的估计值为  $(\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)$ 。

将  $(\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)$  代入式(15)和式(16)可得

$$\hat{\mu}(t) = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 t \quad (18)$$

$$\hat{\sigma}(t) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 t \quad (19)$$

然后,令

$$z = \frac{x - \hat{\mu}(t)}{\hat{\sigma}(t)} \quad (20)$$

在 GEV 分布条件下,序列  $\{z_i\}$  应近似服从  $W(z; 0, 1, \hat{\xi})$ ; 在 Gumbel 分布条件下,序列  $\{z_i\}$  应近似服从  $W_1(z; 0, 1)$ 。这里为了表述方便,将极值分布统一表述为  $W(\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \dots)$  的形式,则有

$$z \sim W(0, 1, \dots) \quad (21)$$

从而利用平稳极值模型的有关方法,可以得到序列  $\{z_i\}$  在重现期  $R_p$  下的重现水平  $\hat{z}_{R_p}$  及方差  $\text{Var } \hat{z}_{R_p}$ , 并有

$$z_{R_p} \sim N(\hat{z}_{R_p}, \sqrt{\text{Var } \hat{z}_{R_p}}) \quad (22)$$

需要说明的是,非线性、非平稳极值模型下最大观测值序列  $\{x_i\}$  的重现水平及其不确定度的求解是很困难的,只能具体问题具体分析。

## 1.2 极值统计模型的选择

### 1.2.1 建模前提条件

应用极值统计理论建立样本极值的概率模型,必须满足下面 3 个条件<sup>[1]</sup>:

**条件 1** 观测对象为随机变量;

**条件 2** 随机变量的底分布应保持不变的,或者如果有任何变化,应该可以经数据变换减少这种变化带来的影响;

**条件 3** 观测到的极值是独立的。

对于条件 1,由于系统输出的误差序列一般来说都是随机的,因此假设其可以自然满足。对于条件 2,如果系统输出的误差序列的分布规律是已知的,那么可以根据极值分布的最大值吸引场理论找到精确的极值模型;而如果误差序列的实际分布规律是未知的,那么只能得到极值的渐近分布,但即便这样,只要数据规模比较大,多数情况下仍可以基于这个渐近分布建立简单、满意的极值模型,并且这样的统计分析方法已经在很多实际应用中得到肯定<sup>[1]</sup>。因此,可以认为多数系统输出的误差序列对于条件 2 也是可以假设其满足的。对于条件 3,如果系统输出的误差序列不存在长程依赖,一般而言也是可以通过适当的模型修正手段(如调整模型区组的长度)来满足的。

因此,对于多数系统而言,其误差序列的最大值指标的统计分析是可以通过极值统计建模的方法来实现的。

### 1.2.2 极值建模分析方法的选择

实践中,常用的分析观测数据的极值理论主要包括:区组最大值法、 $r$  最大值法、超阈值模型分析法和点过程分析法等。其中,区组最大值法也叫“年最大值法”,是极值统计理论的经典模型,它具有简单、计算方便等优点,在实践中应用的最为普遍。因此,这里主要讨论基于区组最大值法的系统最大值指标评定的极值建模过程。为了更有效地展开后面的论述,这里假定:

(1) 系统输出的误差序列拥有足够大的数据量,即系统的工作周期足够长。

(2) 系统输出的误差序列不存在长程依赖,或者即使存在长程依赖,也可以通过区组划分的方式取得近乎独立的最大观测值序列。

需要特别说明的是,如果发现观测序列确实存在长程依赖(经济学上常用 Hurst 指数来衡量),则理论上是不能直接应用极值理论建模的,此时可以先对数据做些预处理:如应用自相关消除法(建立 AR 模型等)、Lettenmaier 数据样本修整技术、基于小波与核函数的概率密度估计法等<sup>[10]</sup>。

### 1.3 区组最大值法建模步骤

应用区组最大值法建模的工作流程如图 1 所示。

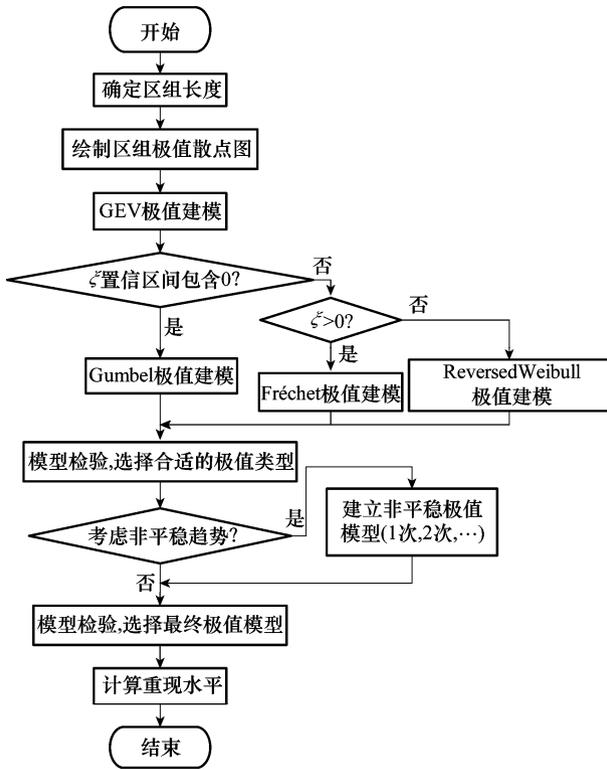


图 1 区组最大值法建模的工作流程

1.3.1 区组长度的确定

区组长度的确定是区组最大值建模的一个难题,需要权衡考虑到偏和方差。如果区组长度取值过大,则只有少数最大值被用于极值统计模型,这会使得极值参数的极大似然估计统计量的方差过大;而如果区组长度取值过小,则会使得极值模型与实际模型之间的差别过大,形成一个有偏估计<sup>[11]</sup>。因此,区组长度太大或太小都是不可取的。根据文献[12],对于指数型底分布的观测数据,当区组长度大于 20 时,可以为 5~100 倍区组长度的重现期提供出近乎合理的偏;而对于正态型底分布观测数据,当区组长度大于 50 时,可以为 5~100 倍区组长度的重现期提供出近乎合理的偏。文献[13]提出了观察 GEV 分布形状参数随区组长度的变化规律来确定区组长度的方法,并认为能够使得形状参数趋于平坦的区组长度为最优选择。

上述文献所采用的区组划分方法都有一定的可行性和可操作性。但它们都是在特定的应用背景下才有效的,即它们都假定区组划分后的最大值数据是相互独立的。而事实上,很多系统输出的误差序列是存在自相关的,如果区组划分不当,区组最大值的观测数据很难保证满足相互独立的假设条件,从而也就不再满足极值建模的第 3 条基本条件。因此,在区组长度确定方法中引入相关性标准是非常必要的。有鉴于此,本文中,区组长度的确定将按照如下步骤进行。

步骤 1 选定区组长度的区间,保证区组个数满足文

献[12]的基本要求。为保证极大似然估计统计量的方差不至于过大,同时考虑到文献[14]提出的当区组个数小于 25 时,应用极大似然估计可能导致形状参数的估计结果飘浮不定的问题,建议将区组个数取为 25~100。另外,为了结合本文的最大值指标求解方法,在选择区组长度时还应考虑系统给定的最大值指标及希望获取实测最大值指标的显著水平  $\alpha$ ,本文中要求最终的区组个数应大于  $1/\alpha$ ,例如当  $\alpha=0.05$  时,则最终的区组个数应大于 20 个。

步骤 2 绘制不同区组长度下的最大自相关系数绝对值变化曲线。区组划分尽量选用能够保证分组后的最大观测值序列的自相关系数接近极值建模的独立性要求,一般来说,自相关系数小于 0.2 即可认为满足独立性条件,而自相关系数大于 0.5 则认为不能接受独立性假设。

步骤 3 通过不同区组长度下 GEV 模型形状参数的数值曲线进一步确定区组长度。选择既能满足自相关系数相对较小,又能保证其对应的 GEV 形状参数处于形状参数变化相对平坦的区间的区组长度作为最优解。

另外,在区组划分的过程中,有效观测数据的总量  $L$  可能存在不被选定的区组长度  $m$  整除的问题,这里,设  $L/m$  的余数部分为  $R$ ,则为了得到等长的区组,可在余下的  $R$  个观测值后面补足  $m-R$  条数据,补足数据的取值可设定为  $R$  个观测数据的均值  $\bar{R}$ 。

1.3.2 模型检验方法

模型检验的目的:一是确认该模型是可以接受的极值统计模型;二是确认该模型是当前条件下最适合的极值统计模型。

检验一个模型是否适合的方法主要包括:概率纸、概率(probability-probability, P-P)图、分位数(quantile-quantile, Q-Q)图、重现水平图以及直方图、拟合优度检验法等。总的来看,极值模型适用性检验的方法虽有很多,但从实际应用来看,用的最多的还是 P-P 图、Q-Q 图、重现水平图和直方图。因此,本文也将主要采用这几种手段来对模型适用性进行检验。

在确定选用的模型是否为当前条件下的最佳极值模型的问题上,似然比检验法是用得最多的一种。似然比检验的实质是比较有约束条件下的似然函数最大值与无约束条件下似然函数最大值,并认为如果所增加的约束条件有效,两模型间的似然函数值就不应有显著的差异。例如,Gumbel 模型相比 GEV 模型而言,增加了形状参数  $\xi=0$  的约束条件,因此同等条件下,Gumbel 模型的似然函数值必然要低于 GEV 模型的似然函数值。如果有证据表明两者的似然函数值并没有显著的差别,那么说明 Gumbel 模型所增加的形状参数  $\xi=0$  约束条件是有效的,在此条件下,一般认为应选择 Gumbel 模型。

在鉴别似然比是否显著的问题上,统计学中一般采用偏差度函数的方法:假设  $M_0$  是在  $M_1$  模型的基础上将  $M_1$  的  $q$  个参数设为常值约束而得到的,即  $M_0 \subset M_1$ ,同时设

$l_x(\hat{\theta}^{(1)})$  和  $l_x(x(\hat{\theta}^{(0)}))$  分别表示  $M_1$  和  $M_0$  模型的对数似然函数值,则可构建如下偏差度函数统计量:

$$D = 2\{l_x(x(\hat{\theta}^{(1)})) - l_x(x(\hat{\theta}^{(0)}))\} \quad (23)$$

设  $\alpha$  为似然比检验显著水平,则当  $D > \chi_{1-\alpha}^2$  时,认为两模型具有显著差异,应选择  $M_1$ ;反之,则说明二者无显著差异,应选择  $M_0$ 。

在判定极值模型参数是否存在线性趋势的问题上,同样可以采用上述似然比检验方法,这里不再赘述。

### 1.4 误差序列最大值指标的计算

不同系统,其误差最大值指标的给定方式可能是有区别的。这里,如果从形式上看,某个最大值指标是按照常值指标的形式给出的,就将其称为是常值最大值指标;如果最大值指标是与某个协变量序列相关联的,就将其称为是带有时间协变量的最大值指标。

#### 1.4.1 平稳极值序列的最大值指标计算

假设  $\mathbf{X}$  为系统误差绝对值序列经分组后得到的最大观测值序列,则当  $\mathbf{X}$  为平稳序列时,按照区组最大值建模方法,应用式(7)~式(14),可以得出重现期  $R_p$  下的重现水平  $x_p \sim N(\hat{x}_p, \sqrt{\text{Var } \hat{x}_p})$ 。设  $R_p$  重现期内给定的误差最大值指标为  $H$ ,则根据  $x_p$  正态分布的有关特性,此时以  $P_{Hxp} =$

$$\{X|x \leq H\} = \Phi\left(\frac{H - \hat{x}_p}{\sqrt{\text{Var } \hat{x}_p}}\right)$$

的置信概率认定其重现水平的真值是小于最大值指标为  $H$  的;而又由重现水平的定义,最大观测值序列出现超过重现水平  $x_p$  观测值的概率平均为  $1/R_p$ ,即在已知重现水平  $x_p$  的条件下,可以以  $P_{xp} = \frac{R_p - 1}{R_p}$  的置信概率相信观测序列的最大值是小于  $x_p$  的。因此,综合来看, $R_p$  重现期内观测序列的最大值小于既定最大值指标  $H$  的概率,即产品的合格概率:

$$P_H = P_{xp} P_{Hxp} = \frac{R_p - 1}{R_p} \Phi\left(\frac{H - \hat{x}_p}{\sqrt{\text{Var } \hat{x}_p}}\right) \quad (24)$$

从式(24)可以看出,重现期  $R_p$  下的产品合格概率  $P_H < \frac{R_p - 1}{R_p}$ ,由此也可以看出,对于产品合格概率的评价的确是跟样本量相关的,重现期  $R_p$  越大,则用于极值统计的最大观测值数量就越多,应用极值统计方法所能给出的置信概率上限就越高,这正是极值统计方法区别于传统统计学方法的一个重要方面。

为了得到一定显著水平  $\alpha > 1/R_p$  下的实测最大值指标,这里令

$$\tilde{\alpha} = \frac{\alpha R_p - 1}{R_p - 1} \quad (25)$$

则有  $1 - \tilde{\alpha} = (1 - \alpha) / \left(\frac{R_p - 1}{R_p}\right)$ ,从而根据式(24),有

$$P_{\hat{H}xp} = P_{\hat{H}} / P_{xp} = 1 - \tilde{\alpha} = \Phi\left(\frac{\hat{H} - \hat{x}_p}{\sqrt{\text{Var } \hat{x}_p}}\right) \quad (26)$$

由式(26)可以解得实测最大值指标为

$$\hat{H} = \hat{x}_p + \sqrt{\text{Var } \hat{x}_p} Z_{\tilde{\alpha}} \quad (27)$$

#### 1.4.2 非平稳极值序列的最大值指标计算

对于非平稳极值序列,这里仅考虑模型的位置参数  $\mu$  和尺度参数  $\sigma$  随时间线性变化的情况。设非平稳极值序列为  $\{x_i\}$ ,其中  $x_i$  为  $R_p$  重现期内各个区组 ( $R_{\mu}$ ) 的最大观测值,这里  $i=1, 2, \dots, R_p$ ,则应用式(15)~式(19),可以求得  $x_i$  随时间变化的参数估计值  $\hat{\mu}(i), \hat{\sigma}(i)$  以及其他常值参数,然后利用式(21)和式(22),可以求得去除趋势项后的剩余最大观测值序列  $\{z_i\}$  的分布和重现水平情况。设给定的误差最大值指标为  $H$ ,则对应的,利用式(20),可以将误差的最大值指标折算到剩余最大观测值序列  $\{z_i\}$  中,有

$$\tilde{H}_i = \frac{H - \hat{\mu}(i)}{\hat{\sigma}(i)}, i = 1, 2, \dots, R_p \quad (28)$$

式中,  $\tilde{H}_i$  表示在第  $i$  个极值观测点上,剩余最大观测值  $z_i$  的换算最大值指标,由式(28)可以看出,它是无量纲的。

由重现水平的定义,对于重现期  $R_p$  而言,在每个极值观测点上保持低于重现水平  $z_{R_p}$  的概率为  $P_{zp} = \frac{R_p - 1}{R_p}$ ,且平均只会有一个极值观测点出现超过  $z_{R_p}$  的情况。因此,若以  $\tilde{H}_i$  作为剩余最大观测值序列  $\{z_i\}$  在重现期  $R_p$  下的最大值指标,则在  $z_i$  观测点上的合格概率为

$$P_{\tilde{H}_i} = P_{zp} P_{\tilde{H}_i} = \frac{R_p - 1}{R_p} \Phi\left(\frac{\tilde{H}_i - \tilde{z}_p}{\sqrt{\text{Var } \tilde{z}_p}}\right) \quad (29)$$

则对于整个重现期  $R_p$  内的所有极值观测点  $\{z_i\} (i=1, 2, \dots, R_p)$  而言,其平均合格概率,即重现期  $R_p$  下的合格概率为

$$P_H = \frac{1}{R_p} \sum_{i=1}^{R_p} P_{\tilde{H}_i} = \left(\frac{R_p - 1}{R_p^2}\right) \sum_{i=1}^{R_p} \Phi\left(\frac{\tilde{H}_i - \tilde{z}_p}{\sqrt{\text{Var } \tilde{z}_p}}\right) \quad (30)$$

实际工程中,由于数学换算的需要,重现期  $R_p$  可能出现非整数的情况,此时,设  $R_p$  的小数部分为  $r_p$ ,则由此折算出的误差最大值指标为

$$\begin{cases} \tilde{H}_i = \frac{H - \hat{\mu}(i)}{\hat{\sigma}(i)}, i = 1, 2, \dots, R_p - r_p \\ \tilde{H}_{R_p} = \frac{H - \hat{\mu}(R_p)}{\hat{\sigma}(R_p)} \end{cases} \quad (31)$$

此时的产品合格概率为

$$P_H = \frac{1}{R_p} \left[ \left(\frac{R_p - r_p}{R_p}\right) \Phi\left(\frac{\tilde{H}_{R_p} - \tilde{z}_p}{\sqrt{\text{Var } \tilde{z}_p}}\right) + \left(\frac{R_p - 1}{R_p}\right) \sum_{i=1}^{R_p - r_p} \Phi\left(\frac{\tilde{H}_i - \tilde{z}_p}{\sqrt{\text{Var } \tilde{z}_p}}\right) \right] \quad (32)$$

在给定显著水平  $\alpha$  的条件下,实测的误差序列最大值指标  $\hat{H}$  很难通过公式直接取得,这里采用数值方法,首先选定一个初值  $\hat{H}_0 > 0$ ,以及合格概率的分辨率  $\Delta P_i > 0$ ,然后按图 2 的流程计算。由图 2 流程中输出的  $\hat{H}_0$  即为最终

$R_p$  重现期下的最大值指标。这里需要说明的是,给定显著水平  $\alpha$  条件下并不是总可以求出相应的最大值指标的,  $\alpha$  的取值必须大于某个极限值  $\bar{\alpha}$ , 但  $\bar{\alpha}$  的具体数值很难用公式求得, 这里也采用数值求解的方法, 具体方法已在图 2 的流程中有所体现。

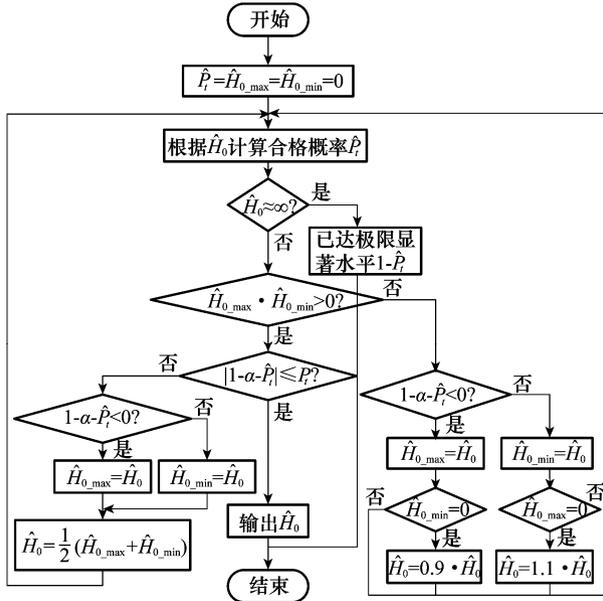


图 2 实测最大值指标的数值求解方法

### 1.4.3 带有时间序列协变量的最大值

假设协变量序列为  $\{u_i\}$ , 并设协变量  $U$  与最大值指标  $H$  之间的关系由式  $H = f(U)$  给出, 则构建如下假设条件:

- (1) 序列  $\{u_i\}$  中每个观测值  $u_j$  都是真实可靠的常数;
- (2) 序列  $\{u_i\}$  可以参照系统输出误差序列的分组方法进行分组, 记分组后的每个小组用  $U_i$  表示, 假设  $U_i$  内所有观测值的最大值指标都是近乎相等的, 并统一记为  $H_i$ 。

上述假设条件在  $f(U)$  为缓变函数的条件下是合理的。

因此, 参照式(28)、式(30)~式(32), 可以将  $\hat{z}_p$  换作  $\hat{x}_p$ ,  $\tilde{H}_i$  换作  $H_i$  后分别代入式(30)或式(32), 即可计算出平稳极值序列在带有时间协变量条件下的合格概率。然后, 参照图 2 中的操作流程, 即可求得时间协变量意义下的平稳极值序列实测最大值指标。

同理, 对于带有线性趋势的非平稳极值序列, 可以将各个最大值指标  $H_i$  分别代入式(28)或式(31)换算后, 再代入式(30)或式(32), 即可计算出其在带有时间协变量意义下的合格概率。然后, 仍然参照图 2 中的操作流程, 即可求得时间协变量意义下的线性趋势非平稳极值序列实测最大值指标。

## 2 应用举例与分析

### 2.1 背景介绍

随着科技的发展, 惯性导航系统作为自主式导航设备已越来越受到人们的青睐。尤其在航空、航天及国防领域,

近年来, 人们对惯性导航系统的要求除了关注其高精度、长周期、大范围的持续导航能力外, 也已经开始关注其长期工作的可靠性方面。为此, 对有些特殊用途的惯性导航系统, 有人提出, 应面向惯性导航设备的误差最大值来定量考核惯导设备的实际性能, 因此这类惯导设备的测试与验收都应以考核其误差最大值技术指标为出发点。

下面以指北惯性导航设备的最大值指标评定为例, 说明基于极值理论的最大值指标评定方法的具体实施过程。

图 3 给出了某型指北惯性导航系统无阻尼工作状态下东向速度误差随时间(时长总计 72 h,  $L = 259\ 200$  条观测数据)变化的情况。

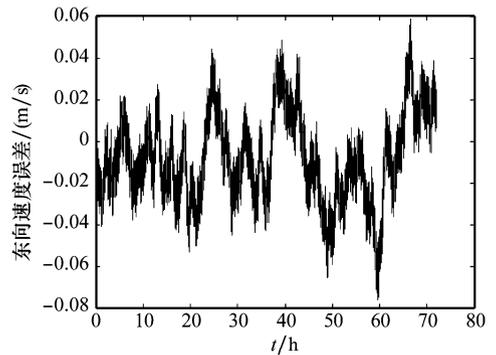


图 3 惯导东向速度误差时序图

### 2.2 极值建模分析

为了应用极值理论对惯导东向速度误差观测值序列进行建模分析, 首先需要对该观测值序列进行区组划分。假设既定最大值指标的显著水平要求  $\alpha = 0.05$ , 则根据前文给出的区组长度确定方法, 初步选定区组个数为  $N \in [25, 100]$ , 换算出来的区组长度区间取值约为  $m = L/N \in [2\ 592, 10\ 368]$ , 即约为 43~173 min。为了方便记忆, 将区组长度的取值范围就设定为 43~173 min, 即  $m \in [2\ 580, 10\ 380]$ 。然后, 将区组长度按步长为 1 在其取值区间内遍历, 即可得到有效区组长度集合  $\{m_i\}$ , 其中  $i = 2\ 580, 2\ 581, \dots, 10\ 380$ 。相应地, 可求得最大观测值序列组合  $\{X_{m_i}\}$ 。对  $\{X_{m_i}\}$  最大观测值序列按滞后项  $k = 1 \sim |L/m_i| - 1$  求解自相关系数, 并求得自相关系数的绝对值的最大值  $r_{m_i}$ 。最后, 将所有  $m_i$  下的  $r_{m_i}$  汇集起来, 如图 4 所示。

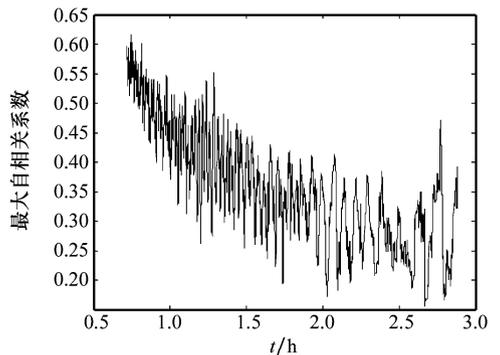


图 4 观测值序列的自相关系数最大绝对值分布情况

由图 4 可以看出,自相关系数最大绝对值相对较小的区组长度区间大致为: $m \in [6\ 257, 10\ 211]$ 。然后,对  $m \in [6\ 257, 10\ 211]$  区组长度内所有分割情况下的最大观测值序列进行 GEV 分布形状参数分析,如图 5 所示。

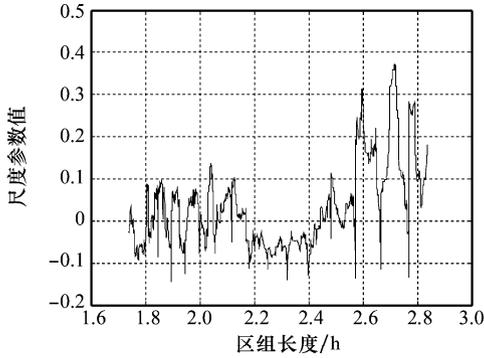


图 5 不同区组长度下的最大观测值序列广义极值分布形状参数变化曲线

对比形状参数变化曲线(见图 5)与自相关函数变化曲线(见图 4),在区组长度为 2.5 h 的附近,GEV 分布形状参数的变化相对较小,同时该区组长度下的最大观测值序列自相关系数也相对较小,因此最终选择区组长度为 2.5 h,即设定  $m=9\ 000$ 。区组长度为 2.5 h 条件下的最大观测值序列散点图如图 6 所示,具体的最大观测值序列数值如表 1 所示,相应的自相关函数随滞后项  $k$  的变化情况如图 7 所示。

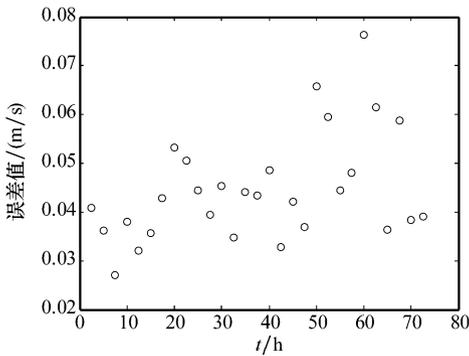


图 6 最大观测值序列散点图

表 1 最大观测值序列数值分布情况

编号	最大值	编号	最大值	编号	最大值
1	0.040 852	11	0.039 503	21	0.059 436
2	0.036 151	12	0.045 353	22	0.044 419
3	0.027 07	13	0.034 76	23	0.048 108
4	0.037 912	14	0.044 11	24	0.076 241
5	0.032 117	15	0.043 399	25	0.061 528
6	0.035 698	16	0.048 575	26	0.036 405
7	0.042 906	17	0.032 74	27	0.058 865
8	0.053 248	18	0.042 1	28	0.038 383
9	0.050 613	19	0.036 962	29	0.039 119
10	0.044 504	20	0.065 728		

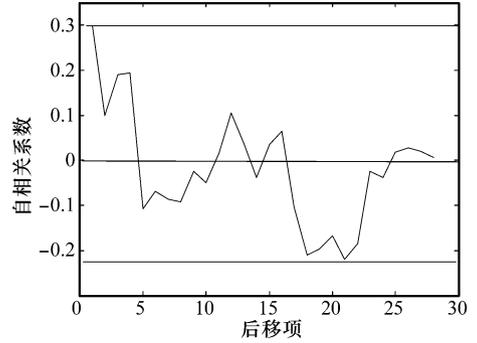


图 7 最大观测值序列自相关函数变化曲线

由图 7 可以看出,最大观测值序列的自相关系数总体上还是比较低的,因此可以假设极值建模的独立性条件基本得到满足。

### 2.3 GEV 模型统计推断

首先,对最大观测值序列进行 GEV 建模。应用 Matlab 工具得到 GEV 分布拟合的极大似然估计参数估值: $(\hat{\xi}, \hat{\sigma}, \hat{\mu}) = (0.037\ 0, 0.008\ 1, 0.039\ 7)$ ,相应的负对数似然函数值为  $-93.078\ 3$ ,参数估计量的近似协方差矩阵为

$$V = \begin{bmatrix} 0.018\ 7 & 3.713\ 5 \times 10^{-5} & -7.777\ 3 \times 10^{-5} \\ -3.713\ 5 \times 10^{-5} & 1.537\ 0 \times 10^{-6} & 8.643\ 2 \times 10^{-7} \\ -7.777\ 3 \times 10^{-5} & 8.643\ 2 \times 10^{-7} & 2.874\ 4 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$$

由 GEV 分布极大似然估计的特性,矩阵  $V$  的对角线元素即为估计量  $(\hat{\xi}, \hat{\sigma}, \hat{\mu})$  的方差,由此,可得参数  $(\hat{\xi}, \hat{\sigma}, \hat{\mu})$  的标准差分别为 0.136 8、0.001 2 和 0.001 7,并可得到参数  $(\xi, \sigma, \mu)$  相应的 95% 置信区间分别为  $[-0.231\ 2, 0.305\ 1]$ ,  $[0.006\ 0, 0.011\ 0]$ ,  $[0.036\ 4, 0.043\ 0]$ 。这样看来,虽然参数  $\xi$  的极大似然估计为正,这相应于一个的 Fréchet 分布,但  $\xi$  的置信区间包含了相当一部分负值区间,所以认为最大观测值序列服从 Fréchet 分布的证据并不充分。为了求取  $\xi$  的更为精确的置信区间,绘制了参数  $\xi$  的轮廓对数似然函数曲线,如图 8 所示。

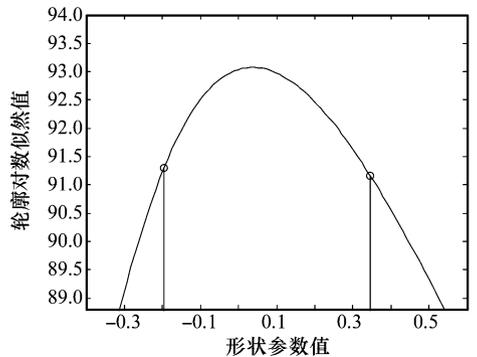


图 8 广义极值分布形状参数轮廓似然函数曲线

图 8 中,两条竖线中间的区域为参数  $\xi$  的 95% 置信区间  $[-0.196\ 0, 0.345\ 8]$ ,这与前面 GEV 极大似然估计的

拟合结果稍有差别,但仍然不能确定最大观测值序列服从 Fréchet 分布。GEV 分布拟合下的重现水平图、直方图、P-P 图、Q-Q 图如图 9 所示。

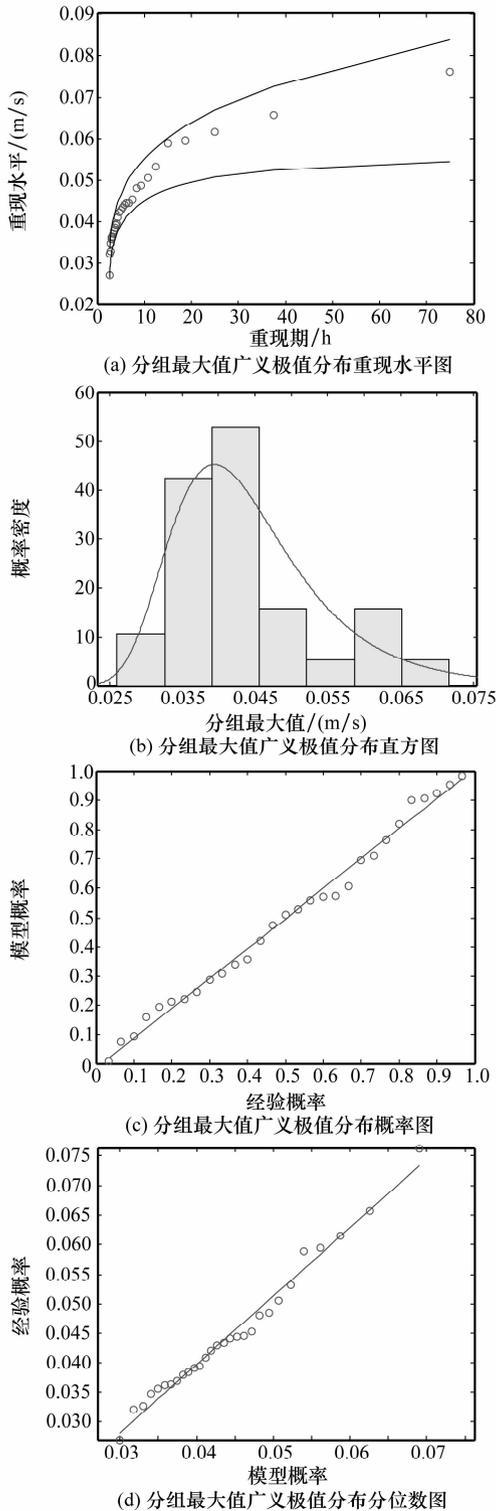


图 9 分组最大值广义极值分布拟合结果

值置信区间过于宽大,为了得到更为精确的重现水平估值,有必要探寻具体的极值分布类型。

### 2.4 Gumbel 模型统计推断

根据图 1 的区组最大值法建模流程,当 GEV 形状参数置信区间包含 0 时,应当首先考虑 Gumbel 分布模型(见图 10)。

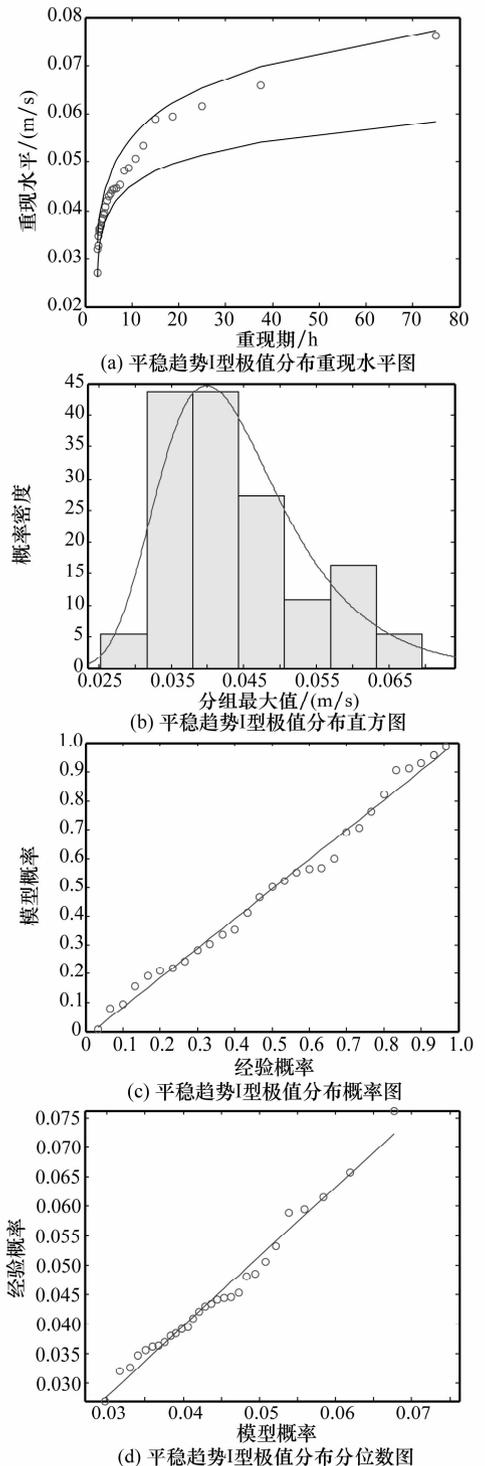


图 10 分组最大值平稳 I 型极值分布拟合结果

由图 9 可见,GEV 分布拟合条件下的重现水平 95% 估

这里重新假设最大观测值序列服从 Gumbel 分布,则可得到的 Gumbel 分布参数估值 $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}) = (0.039\ 9, 0.008\ 2)$ ,相应的标准差分别为 0.001 6 和 0.001 2,相应的 95%置信区间分别为 $[0.036\ 7, 0.043\ 0]$ 和 $[0.006\ 2, 0.011\ 0]$ ,负对数似然函数值为 $-93.040\ 6$ 。则根据似然比检验方法,由式(23)计算可得偏差度函数为

$$D = 2(l_{GEV} - l_{Gumbel}) = 2(93.078\ 3 - 93.040\ 6) = 0.075\ 5 < \chi^2(0.95, 1) = 3.841$$

因此,在 95%置信水平下,认为 Gumbel 分布模型与 GEV 分布模型的差异性并不明显,接受 Gumbel 分布模型。Gumbel 分布的 P-P 图、Q-Q 图、重现水平图、直方图如图 10 所示。从图 10 中可以看出,Gumbel 分布模型确实是合适的。

### 2.5 基于 Gumbel 模型的最大值指标计算

利用 Gumbel 模型统计建模,可求得其 24 h(折算后的重现期  $R_{p24\ h} = 24 \times 3\ 600/m = 86\ 400/9\ 000 = 9.6$ )的重现水平  $\hat{x}_{p24\ h} \sim N(0.058\ 0, 0.003\ 5)$ ,以及 72 h(折算后的重现期  $R_{p72\ h} = 72 \times 3\ 600/m = 28.8$ )的重现水平  $\hat{x}_{p72\ h} \sim N(0.067\ 4, 0.004\ 8)$ 。在此条件下,若假设惯导东向速度误差的技术指标定为:1 日内不大于 0.062 4 m/s;3 日内不大于 0.083 7 m/s,则根据式(24)可以求得相应的合格概率为

$$\left\{ \begin{aligned} P_{H24\ h} &= \frac{R_{p24\ h} - 1}{R_{p24\ h}} \Phi\left(\frac{H - \hat{x}_{p24\ h}}{\sqrt{\text{Var } \hat{x}_{p24\ h}}}\right) = \\ &= \frac{9.6 - 1}{9.6} \Phi\left(\frac{0.062\ 4 - 0.058\ 0}{0.003\ 5}\right) = 0.802\ 4 \\ P_{H72\ h} &= \frac{R_{p72\ h} - 1}{R_{p72\ h}} \Phi\left(\frac{H - \hat{x}_{p72\ h}}{\sqrt{\text{Var } \hat{x}_{p72\ h}}}\right) = \\ &= \frac{28.8 - 1}{28.8} \Phi\left(\frac{0.083\ 7 - 0.067\ 4}{0.004\ 8}\right) = 0.964\ 9 \end{aligned} \right.$$

由于  $\frac{1}{R_{p24\ h}} = 0.104$ ,根据显著水平与重现期的关系,此时无法获得显著水平  $\alpha < 0.104$  时的实测最大值指标。这里假设  $\alpha_{24\ h} = 0.15$ ,则根据式(25)可得: $\tilde{\alpha}_{24\ h} = \frac{\alpha_{24\ h} R_{p24\ h} - 1}{R_{p24\ h} - 1} = 0.045\ 83$ ,代入式(27)可得 85%置信水平下的实测最大值指标为

$$\hat{H}_{24\ h} = \hat{x}_{p24\ h} + \sqrt{\text{Var } \hat{x}_{p24\ h}} Z_{\tilde{\alpha}_{24\ h}} = 0.063\ 9\ \text{m/s}$$

同理,由于  $\frac{1}{R_{p72\ h}} = 0.034\ 7$ ,对 72 h 的情况,无法获得显著水平  $\alpha < 0.034\ 7$  时的实测最大值指标。这里假设  $\alpha_{24\ h} = 0.05$ ,则根据式(25)可得  $\tilde{\alpha}_{72\ h} = \frac{\alpha_{72\ h} R_{p72\ h} - 1}{R_{p72\ h} - 1} = 0.015\ 28$ ,代入式(27)可得 95%置信水平下的实测最大值指标为

$$\hat{H}_{72\ h} = \hat{x}_{p72\ h} + \sqrt{\text{Var } \hat{x}_{p72\ h}} Z_{\tilde{\alpha}_{72\ h}} = 0.077\ 8\ \text{m/s}$$

### 2.6 非平稳 Gumbel 建模

#### 2.6.1 非平稳趋势初步分析

下面讨论最大观测值序列 Gumbel 分布拟合的非平稳

趋势问题。回顾图 6 中的散点图,从图 6 中可以看出,最大观测值序列具有随时间增长而变大的趋势,因此有必要对它进行非平稳特性的分析。首先,假定 Gumbel 分布的位置参数  $\mu$  具有随时间线性变化的趋势,即假设  $\mu = \mu(i) = \beta_0 + \beta_1 i (i=1, 2, \dots, N)$ 。由此,利用 R 语言 ismev 程序包中的 gum.fit() 函数可求得负对数似然函数值为  $\tilde{l}_{Gumbel} = -95.123\ 5$ ,按最大观测值的重现期  $R_p (p=1, 2, \dots, 29)$  求得的线性参数估值  $\hat{\alpha}_0 = 0.035\ 252\ 150$  和  $\hat{\alpha}_1 = 0.000\ 328\ 230$ , Gumbel 分布尺度参数估值  $\hat{\sigma} = 0.076\ 340\ 92$ 。同样根据似然比检验方法,由式(23)计算偏差度函数为

$$D = 2(l_{Gumbel} - \tilde{l}_{Gumbel}) = 2(95.123\ 5 - 93.040\ 6) = 4.165\ 8 > \chi^2(0.95, 1) = 3.841$$

因此,可以以 95%的置信概率确信二模型存在显著差异,认为 Gumbel 分布位置参数的线性趋势模型要比位置参数为常值约束的模型更为适合。这样,根据式(20),可以求得消除了位置参数线性趋势后的剩余最大观测值序列  $\{z_i\}$ 。 $\{z_i\}$  序列的 Gumbel 分布 P-P 图、Q-Q 图、重现水平图、直方图如图 11 所示。

从图 11 中可以看出,去除位置参数线性趋势后的 Gumbel 分布模型确实也是合适的。

#### 2.6.2 最大值指标的计算

假设惯导东向速度误差的技术指标定为:1 日内不大于 0.062 4 m/s;3 日内不大于 0.083 7 m/s,由此根据式(28),可以得到 24 h 条件下的换算最大值指标序列  $\{\tilde{H}_i\}$ ,如表 2 所示。

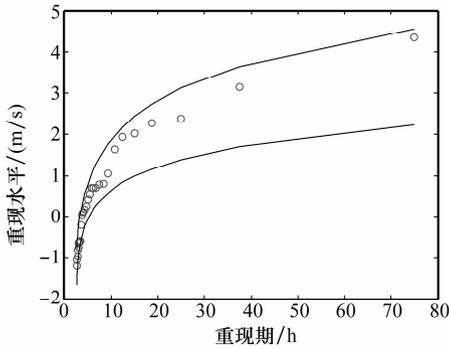
表 2 折算最大值指标(24 h, 0.062 4 m/s)

编号	最大值指标/(m/s)	编号	最大值指标/(m/s)
1	3.513 138 17	6	3.298 161 72
2	3.470 142 88	7	3.255 166 43
3	3.427 147 59	8	3.212 171 14
4	3.384 152 3	9	3.169 175 85
5	3.341 157 01	9.6	3.143 378 676

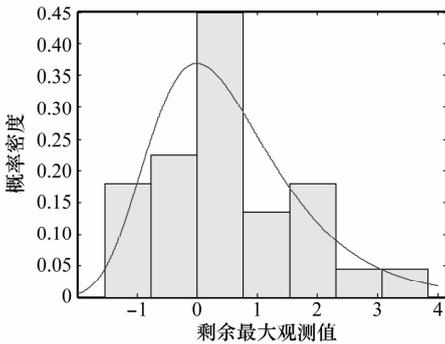
这里同样令  $R_{p24\ h} = 9.6$ ,则由式(22)可得剩余最大观测值序列  $\{z_i\}$  的  $R_{p24\ h}$  重现期下的重现水平  $z_{p24\ h} \sim N(2.207\ 3, 0.432\ 1)$ 。这里  $R_{p24\ h}$  不是纯整数,它的小数部分  $r_{p24\ h} = 0.6$ ,将表 2 中的折算最大值指标  $\tilde{H}_i$  以及  $R_{p24\ h}, r_{p24\ h}$  代入式(32)可得 24 h 期限内、最大值指标为 0.062 4 m/s 条件下的系统合格概率为

$$P_{H24\ h} = \frac{1}{R_{p24\ h}} \left[ \left( \frac{R_{p24\ h} - r_{p24\ h}}{R_{p24\ h}} \Phi\left(\frac{\tilde{H}_{R_{p24\ h}} - \tilde{z}_{p24\ h}}{\sqrt{\text{Var } \tilde{z}_{p24\ h}}}\right) \right) + \left( \frac{R_{p24\ h} - 1}{R_{p24\ h}} \right) \sum_{i=1}^{R_{p24\ h} - r_{p24\ h}} \Phi\left(\frac{\tilde{H}_i - \tilde{z}_{p24\ h}}{\sqrt{\text{Var } \tilde{z}_{p24\ h}}}\right) \right] = 0.841\ 6$$

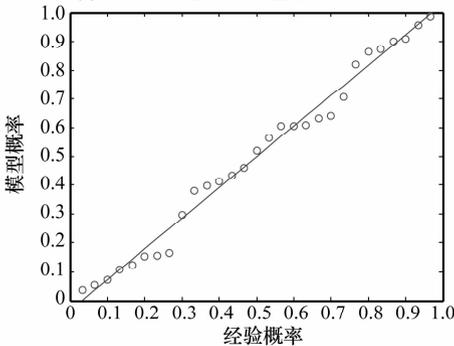
同理,可以得到 72 h 条件下的换算最大值指标序列  $\{\tilde{H}_i\}$ ,如表 3 所示。



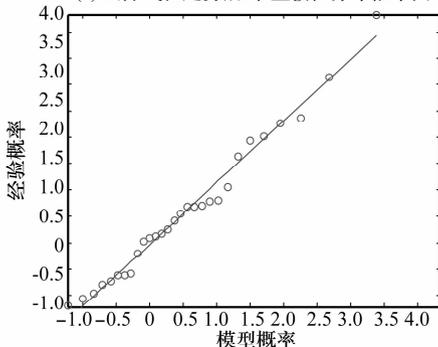
(a) 去除线性趋势后的 I 型极值分布重现水平图



(b) 去除线性趋势后的 I 型极值分布直方图



(c) 去除线性趋势后的 I 型极值分布概率图



(d) 去除线性趋势后的 I 型极值分布分位数图

条件下的系统合格概率为

$$P_{H72h} = \frac{1}{R_{p72h}} \left[ \left( \frac{R_{p72h} - r_{p72h}}{R_{p72h}} \Phi \left( \frac{\tilde{H} - \hat{z}_{p72h}}{\sqrt{\text{Var} \hat{z}_{p72h}}} \right) \right) + \left( \frac{R_{p72h} - 1}{R_{p72h}} \right) \sum_{i=1}^{R_{p72h} - r_{p72h}} \Phi \left( \frac{\tilde{H}_i - \hat{z}_{p72h}}{\sqrt{\text{Var} \hat{z}_{p72h}}} \right) \right] = 0.9393$$

表 3 折算最大值指标 (72 h, 0.083 7 m/s)

编号	最大值指标/(m/s)	编号	最大值指标/(m/s)
1	6.303 253 877	16	5.658 324 526
2	6.260 258 587	17	5.615 329 236
3	6.217 263 297	18	5.572 333 946
4	6.174 268 007	19	5.529 338 656
5	6.131 272 717	20	5.486 343 366
6	6.088 277 427	21	5.443 348 076
7	6.045 282 137	22	5.400 352 786
8	6.002 286 847	23	5.357 357 496
9	5.959 291 557	24	5.314 362 206
10	5.916 296 267	25	5.271 366 916
11	5.873 300 977	26	5.228 371 626
12	5.830 305 687	27	5.185 376 336
13	5.787 310 397	28	5.142 381 046
14	5.744 315 106	28.8	5.107 984 813
15	5.701 319 816		

然后,利用图 2 中的工作流程,可求得 24 h 条件下的极限显著水平  $\tilde{\alpha} = 0.01536$ ,这相应的要求给定显著水平  $\alpha > \tilde{\alpha} = 0.01536$ ,因此无法求得 85% 置信概率下的实测最大值指标,而求得的 84% 置信水平下的实测最大值指标为 0.062 m/s。同理,可求得 72 h 条件下的极限显著水平  $\tilde{\alpha} = 0.0606$ ,这相应的要求给定显著水平  $\alpha > \tilde{\alpha} = 0.0606$ ,因此,无法求得 95% 置信概率下的实测最大值指标,而求得的 93% 置信水平下的实测最大值指标为 0.077 6 m/s。

### 2.6.3 最优极值模型的选择

继续考虑 Gumbel 分布尺度参数随时间线性变化的可能性。仍然利用 R 语言 ismev 程序包中的 gum. fit() 函数,求得 Gumbel 分布位置参数、尺度参数均随时间线性变化条件下的负对数似然函数值为  $l'_{\text{Gumbel}} = -96.3057$ 。同样根据似然比检验方法,由式(23)计算可得偏差度函数为

$$D = 2(\tilde{l}_{\text{Gumbel}} - l'_{\text{Gumbel}}) = 2(96.30257 - 95.1235) = 2.358 < \chi^2(0.95, 1) = 3.841$$

因此,在 95% 置信水平下,看不出增加了 Gumbel 分布尺度参数随时间线性变化条件能带来显著的性能改善,所以可以选择仅位置参数随时间线性变化的 Gumbel 分布模型作为最终的最优极值模型。

### 2.7 带有时间协变量的最大值指标

以上所述均是针对惯导东向速度误差的最大值指标计

图 11 去除位置参数线性趋势后的 I 型极值分布拟合结果

同样令  $R_{p72h} = 28.8$ ,则由式(22),可得剩余最大观测值序列  $\{z_i\}$  的  $R_{p72h}$  重现期下的重现水平  $z_{p72h} \sim N(3.3428, 0.5898)$ 。这里  $R_{p72h}$  也不是纯整数,它的小数部分  $r_{p72h} = 0.8$ ,将表 3 中的折算最大值指标  $\tilde{H}_i$  以及  $R_{p72h}$ 、 $r_{p72h}$  代入式(32)可得 72 h 期限内、最大值指标 0.083 7 m/s

算,它属于常值最大值指标的计算范畴。但对于惯导航向误差而言,其设定的指标往往是与惯导所处的实际纬度相关联的,对于这种情况的最大值指标计算,可参照本文带有时间协变量的最大值指标计算方法来求得,这里不再赘述。

### 3 结 论

本文是在文献[15]的基础上对系统最大值指标评定方法的又一次探索。

从理论基础来看,这两种方法最终都是以经典概率与数理统计理论为基础,并应用正态分布的有关特性给出具有统计学意义的合格概率和一定置信水平下的实测最大值指标评估。但二者在前期的数据处理方面所依据的理论基础和数据处理手段却完全不同:应用时间序列模型的方法将观测数据沿时间轴的分布看作是其内部某种关联结构所导致的必然结果,并认为如果通过某种模型建模的手段能够将观测序列的必然性的内容提取出来,剩余的内容将会是完全随机分布的白噪声序列。因此,从某种程度上来看,时间序列模型的这种方式带有一定“撞大运”的成分,但不管怎样,只要找到了一种能够成功将这种“必然性”内容分离出来的时间序列模型,那么应用该模型所做的统计与预测就是有意义的。而且,现实生活中,时间序列模型已经建立了相对成熟的方法体系,并在很多领域都能被成功应用和得到认可。与基于时间序列模型的方法相比,极值理论的起步相对较晚,是近年来新兴的理论体系。它在数据处理方面的技巧性内容相对时间序列模型方法要少得多,但其几乎每个执行步骤都是有着相对扎实的理论背景作支撑的。它在建模过程中更多地使用了参数化的定量推导方法,与传统的概率论与数理统计理论有着密不可分的关联,其相关的结论也往往具有很强的说服力。因此,它在很多涉及国计民生的极端、重大事件的预测<sup>[16-19]</sup>以及基础性设施的抗灾、防害安全设计<sup>[20]</sup>上应用得相当普遍。

从适用范围上看,两种模型方法都要求观测数据要有相对较大的规模,但具体多大的数据规模才算符合要求却很难有定量的解释。一般认为,如果用于建模的数据量能够保证模型具有稳定的结果输出和较好的预测能力,那么这个数据量就应当是符合要求的。总体来看,基于极值理论的建模方法的约束条件要多一些,这会影响到它在某些场合的应用。比如,对于具有强相关和长程依赖的系统而言,获得相对独立的最大观测值序列可能会很难,在此条件下,应用极值理论的基础就会遭到质疑;再比如,应用极值理论时,由于样本量的限制,较小重现期下根本无法给出较高的置信概率,这对某些应用场合来说也是不适合的。相比而言,应用时间序列模型的方法则具有普遍的适用性,因为数据序列内部相互关联的规律是客观存在的,所以只要按照成熟的时间序列建模方法不断地实验,总能找到与这个内

部关联相近的模型解释。

从预测结果上看,这两种模型方法给出的有关结论是基本相近的。直观的感觉,应用极值理论的方法对于短期内的最大值预测要相对保守一些,甚至可能会给出毫无价值的预测结果,但对于长期的最大值预测结果看,其预测结果相对时间序列模型方法而言要更接近系统的真实输出,这说明极值理论方法在长期预测方面给出的结论要更为准确,这是因为:①时间序列模型方法具有较大的随意性,各种不同的建模方法都可能得到符合要求的白噪声序列,但这些白噪声序列间的差别可能很大,从而可能影响到模型的预测精度;②极值理论模型方法的理论基础较好,能够给出一致性相对较好的输出结果。这从本文的用例中可以看出:平稳观测序列 Gumbel 分布建模方法与考虑线性趋势后的 Gumbel 分布建模方法的输出结果是基本一致的。而且,尽管极值理论中认为不同区组长度的划分可能会对极值建模精度产生影响,但从仿真结果来看,只要基本遵循区组划分方法的既定原则,不同区组长度下的极值建模结论的差别并不明显。

从使用者的角度看,时间序列模型的可用资料相对较为丰富,建模方法相对更易学习理解,因此只要遵循时间序列模型的基本使用方法和原则,找到一个合适的模型来拟合观测数据并不是难事,这对于需要快速得出基本预测结果的应用场合是适合的。而对于相对严谨的应用场合,本文建议应首选极值理论建模方法进行最大值指标的预测与评估,时间序列模型的方法可以作为极值建模方法的备选方案来使用,并从另一个侧面来进一步验证有关结论的准确性。需要特别提醒的是,无论应用哪种建模方法,都应将模型预测结论与实际观测数据作对照,如果发现模型预测结论与实际数据偏差较大,则应考虑及时调整建模方案。

### 参考文献:

- [1] 史道济. 实用极值统计方法[M]. 天津:天津科学技术出版社,2006. (Shi D J. *Practical statistics methods by extreme value theory*[M]. Tianjin: Tianjin Science and Technology Press,2006.)
- [2] Cooley D. Extreme value analysis and the study of climate change: a commentary on Wigley 1988[J]. *Climate Change*, 2009,97(1-2):77-83.
- [3] Mínguez R, Méndez F J, zaguirre C, et al. Pseudo-optimal parameter selection of non-stationary generalized extreme value models for environmental variables[J]. *Environmental Modelling & Software*,2010,25(12):1592-1607.
- [4] Chen H, Cummins J D. Longevity bond premiums; the extreme value approach and risk cubic pricing[J]. *Insurance: Mathematics and Economics*,2010,46(1):150-161.
- [5] Kogana V, Rind T. Determining critical power equipment inventory using extreme value approach and an auxiliary Poisson model[J]. *Computers & Industrial Engineering*,2011,60(1):25-33.

- [6] Prasannavenkatesan R, Przybyla C P, Salajegheh N, et al. Simulated extreme value fatigue sensitivity to inclusions and pores in martensitic gear steels[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2011, 78(6):140 - 155.
- [7] Reiss R D, Thomas M. *Statistical analysis of extreme values with applications to insurance, finance, hydrology and other fields*[M]. 3rd ed. Berlin: Birkhäuser Verlag, 2007.
- [8] Albert M G, Tank K, Zwiers F W, et al. *Guidelines on analysis of extremes in a changing climate in support of informed decisions for adaptation*[M]. Geneva: World Meteorological Organization, 2009.
- [9] Ruggiero P, Komar P D, Allan J C. Increasing wave heights and extreme value projections: the wave climate of the U. S. Pacific Northwest[J]. *Coastal Engineering*, 2010, 57(5):539 - 552.
- [10] Khaliq M N, Ouarda T B M J, Ondo J C, et al. Frequency analysis of a sequence of dependent and/or non-stationary hydro-meteorological observations: a review[J]. *Journal of Hydrology*, 2006, 329(3 - 4):534 - 552.
- [11] Shrivastava U, Dawar G, Dhingra S, et al. Extreme value analysis for record loss prediction during volatile market[J]. *Management Science and Engineering*, 2011, 5(1):19 - 25.
- [12] Umbricht A, Fukutome S, Liniger M A. Seasonal variation of extreme precipitation values in Switzerland[R]. Zurich: Federal Office of Meteorology and Climatology MeteoSwiss, 2010.
- [13] Vitolo R, Ruti P M, Aquila A B, et al. Accessing extremes of mid-latitude wave activity: methodology and application[J]. *Tellus*, 2009, 61(1):35 - 49.
- [14] Kharin V V, Zwiers F W. Estimating extremes in transient climate change simulations[R]. British Columbia: Canadian Centre for Climate Modeling and Analysis, 2004.
- [15] 韩旭, 王建宇, 祖先锋. 基于时间序列模型的系统最大值指标评定方法[J]. 系统工程与电子技术, 2012, 34(4):839 - 845. (Han X, Wang J Y, Zu X F, System maximum-error specification oriented testing methodology basing on timing series model [J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2012, 34(4):839 - 845.)
- [16] Chen Y D, Zhang Q, Xu C Y, et al. Change-point alterations of extreme water levels and underlying causes in the Pearl River Delta, China[J]. *River Research and Applications*, 2009, 25(9):1153 - 1168.
- [17] Sterl A, Brink H, Vries H, et al. An ensemble study of extreme storm surge related water levels in the North Sea in a changing climate[J]. *Ocean Science*, 2009, 5(3):369 - 378.
- [18] Brillinger D R, Bolt B A. A statistical study of the seismic intensities of the 1755 Lisbon earthquake[J]. *Earth and Environmental Science*, 2009, 7(7):455 - 469.
- [19] Hu B Q, Yang Z H, Wang H J, et al. Sedimentation in the Three Gorges Dam and the future trend of Changjiang (Yangtze River) sediment flux to the sea[J]. *Hydrology and Earth System Sciences*, 2009, 13(11):2253 - 2264.
- [20] Zhao J K, Li J F, Dai Z J. Key role of the lakes in runoff supplement in the mid-lower reaches of the Yangtze River during typical drought years[C]//*Proc. of the International Conference on Digital Manufacturing and Automation*, 2010:874 - 880.