

## 多孔材料辐射-传热耦合性能的统计二阶双尺度计算

杨志强<sup>\*1</sup>, 崔俊芝<sup>2</sup>, 张乔夫<sup>2</sup>

(1. 西北工业大学 理学院应用数学系, 西安 710129;

2. 中国科学院数学与系统科学研究院 科学与工程计算国家重点实验室, 北京 100190)

**摘要:** 对多孔材料辐射-传热耦合计算的数学模型, 即 Rosseland 方程, 给出了一种统计的二阶双尺度分析方法, 并针对典型问题进行了数值模拟。建立了考虑辐射项的统计二阶双尺度计算公式, 给出了统计意义下热流密度极值的预测算法, 并通过与理论解的比较对算法进行了验证, 利用本文中方法研究了孔洞体分比和空间分布状态对陶瓷多孔材料热传导系数、辐射传导系数和热流密度极值的影响。结果表明: 孔洞体分数的增加将导致有效热传导系数下降; 热流密度极值随孔洞体分数的增加而变大, 并且在高温时辐射的作用明显增大; 数值试验表明, 使用统计二阶双尺度方法及其有限元算法预测孔洞随机分布复合材料结构的热性能是有效的。

**关键词:** 统计二阶双尺度方法; 辐射-传热耦合方程; 热流密度; Rosseland 方程; 多孔材料

**中图分类号:** TB330.1 **文献标志码:** A

### The statistical second-order two-scale analysis method for conduction - radiation coupled heat transfer of porous materials

YANG Zhiqiang<sup>\*1</sup>, CUI Junzhi<sup>2</sup>, ZHANG Qiaofu<sup>2</sup>

(1. Department of Applied Mathematics, School of Science, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710129, China;

2. LSEC, ICMSEC, Academy of Mathematics and Systems Sciences, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

**Abstract:** A new statistical second - order two - scale (SSOTS) method was presented for predicting the performances of conduction-radiation coupled heat transfer of porous materials with random distribution of pores. The statistical second-order two-scale formulation for the Rosseland problem of porous materials was discussed, and a statistical prediction algorithm for maximum heat flux density was brought forward. Besides, the validity of the proposed method by comparison with theoretical methods with simple numerical models was verified. Finally, macroscopic thermal properties for the porous ceramic materials with varying probability distribution models including volume fraction and spatial distribution model of pores were shown. The results show that the effective thermal conductivity parameters decrease and maximum heat flux density increases with the pores volume fraction increasing. What is more, the radiation is an important factor for heat transfer at a high temperature. It is also shown that the SSOTS method is valid to predict the performances of conduction - radiation coupled heat transfer of porous materials with random distribution of pores.

**Keywords:** the statistical second-order two-scale (SSOTS) method; conduction - radiation coupled heat transfer; heat flux density; Rosseland equation; porous materials

随着科学技术的发展, 多孔复合材料以其质量轻, 防-隔热等特点越来越受到重视。特别是近年来随着人们对太空开发的关注, 对多孔材料的关注越来越多。到目前为止, 针对孔洞随机分布复合材料热学性能的预测, 科学家和工程师们已经提出了

很多方法, 例如 Maxwell-Eucken 模型<sup>[1]</sup>、等效介质理论<sup>[2-3]</sup>、自洽方法<sup>[4]</sup>等。这些方法有效地推动了计算材料科学的发展, 但是这些平均意义下的方法对真实的材料结构都做了很大的简化, 所以并不能充分反映材料的微结构特征, 另外, 它们通常都

是预测有效热传导的性能，没有考虑辐射的影响。

辐射是传热的一种重要方式，特别是在高温情况下，考虑包括辐射在内的复合材料的传热特性显得尤为重要<sup>[5-10]</sup>。对于高孔隙材料，一些学者通过考虑辐射近似的 Rosseland 方程，研究了孔洞形状、尺寸对有效热导率的影响<sup>[5-8]</sup>。他们多致力于建立孔洞的不同模型，得出辐射系数在不同模型下的值，但是没有考虑传导和辐射耦合作用对于温度和热流密度的影响。另外，对于随机分布复合材料结构热传导和热辐射耦合的综合热传输行为，尚没有相关的研究。

近年来，基于均匀化方法<sup>[11-12]</sup>，崔俊芝等针对不同类型复合材料及其结构的性能预测发展了一系列的高阶双尺度计算方法，提出了针对具有周期构造的复合材料结构的热、力学性能预测的双尺度方法<sup>[13-14]</sup>，在此基础上，通过引入随机分布模型，提出了用于预测颗粒/孔洞/裂隙一致和非一致随机分布复合材料结构热、力学性能的统计二阶双尺度分析方法及其有限元算法，并得到了相应的数值结果<sup>[15-19]</sup>。

本文中针对闫长海和 Doermann<sup>[20-21]</sup>等提出的多孔材料中的热传导与热辐射耦合的 Rosseland 方程，发展了统计二阶双尺度计算方法，推导求解这类问题的二阶双尺度渐进展开式，并给出求解热流密度的算法，最后研究孔洞体分比和空间分布状态对材料热传导系数、辐射传导系数和热流密度极值的影响。

### 1 多孔材料辐射-传热耦合性能的统计二阶双尺度计算公式

大多数孔洞随机分布的结构  $\Omega^\epsilon$ ，可看作由具有相同随机分布模型的  $\epsilon$ -单胞组合而成，如图 1 所示，即

$$\Omega^\epsilon = \bigcup_{s=1}^m (\omega^s, t^s \in \mathbf{z}) \epsilon(Y^s + t^s)$$

其中： $\epsilon(Y^s + t^s)$  表示  $\Omega^\epsilon$  内的第  $s$  个单胞； $\epsilon$  表示单胞的尺度； $Y^s$  表示其相应的单位化的单胞； $\omega^s$  是表征在  $\epsilon$ -单胞内分布特征的随机变量。对于多孔材料热传导-热辐射耦合的 Rosseland 模型，当把宏观结构和微细观的单胞一起考虑时，它可以表示成如下具有混合边界条件的热传导-热辐射耦合问题：

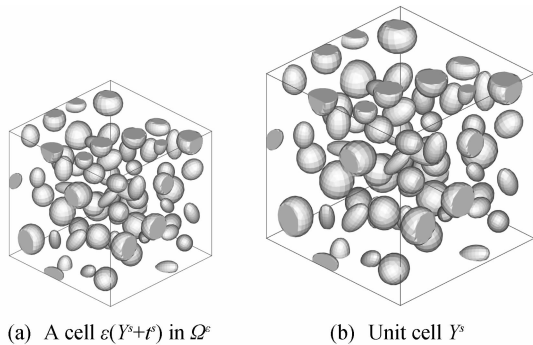


图 1 孔洞随机分布复合材料的结构  
Fig.1 Random distribution of porous materials

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x_j} \left( k_{ij}^\epsilon(x, \omega) \frac{\partial T_\epsilon(x, \omega)}{\partial x_j} + b_{ij}^\epsilon(x, \omega) \frac{\partial T_\epsilon^r(x, \omega)}{\partial x_j} \right) \\ = f(x) & x \in \Omega \\ T_\epsilon(x, \omega) = \bar{T}(x) & x \in \Gamma_1 \\ \nu_i \left( k_{ij}^\epsilon(x, \omega) + 4T_\epsilon^3(x, \omega)b_{ij}^\epsilon(x, \omega) \right) \frac{\partial T_\epsilon(x, \omega)}{\partial x_j} \\ = \bar{q}(x) & x \in \Gamma_2 \end{cases} \quad (2)$$

其中： $T_\epsilon(x, \omega)$  表示温度； $k_{ij}^\epsilon(x, \omega)$  表示热传导系数； $b_{ij}^\epsilon(x, \omega)$  表示热辐射系数； $f(x)$  是内部热源； $\bar{\theta}$  为边界温度； $\bar{q}(x)$  为边界热流； $\nu_i$  表示法线方向。

假设：

(1)  $\{k(\omega)\}$  为有界的随机变量函数，则它的数学期望存在。

(2)  $\left\{ k_{ij} \left( \frac{x}{\epsilon}, \omega \right) \right\}, \left\{ b_{ij} \left( \frac{x}{\epsilon}, \omega \right) \right\}$  为有界，对称的，正定的随机变量，并且满足椭圆形条件。即存在正常数  $c_1, c_2$  (与  $\omega$  无关) 使下式成立：

$$c_1 \eta_i \eta_i \leq k_{ij} \left( \frac{x}{\epsilon}, \omega \right) \eta_i \eta_j \leq c_2 \eta_i \eta_j$$

$$c_1 \eta_i \eta_i \leq b_{ij} \left( \frac{x}{\epsilon}, \omega \right) \eta_i \eta_j \leq c_2 \eta_i \eta_j$$

(3)  $A = (a_{ij}) = k_{ij}^\epsilon(x, \omega) + 4z^3(x, \omega)b_{ij}^\epsilon(x, \omega)$ .  $a_{ij} = a_{ji}$ ,  $T_{\min} < T_{\max}$  为两个常数。则有如下不等式成立：

$$\lambda |\xi|^2 \leq a_{ij}(z, x, \omega) \xi_i \xi_j \leq \Lambda |\xi|^2, 0 < \lambda \leq \Lambda,$$

$$\forall (z, x, \xi) \in [T_{\min}, T_{\max} + C_*] \times \Omega^\epsilon \times R^n$$

对于任意确定的  $\omega$ ，根据假设 (2) 和 (3)，Zhang<sup>[22-23]</sup>等证明方程解的存在性。

$T_\epsilon(x, \omega)$  有如下的渐进展式：

$$T_\epsilon(x, \omega) = T_0(x, \frac{x}{\epsilon}) + \epsilon T_1(x, \frac{x}{\epsilon}, \omega) + \epsilon^2 T_2(x, \frac{x}{\epsilon}, \omega) + \dots \quad (2)$$

相应的

$$\begin{aligned} T_\epsilon^4(x, \omega) &= (T_0(x, \frac{x}{\epsilon}, \omega) + \epsilon T_1(x, \frac{x}{\epsilon}, \omega) + \epsilon^2 T_2(x, \frac{x}{\epsilon}, \omega) + \dots)^4 \\ &= T_0^4 + \epsilon(4T_0^3 T_1) + \epsilon^2(6T_0^2 T_1^2 + 4T_0^2 T_2) + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

令  $P_\epsilon = T_\epsilon^4$ , 类似 Cui<sup>[13-14]</sup>, 取  $y = \frac{x}{\epsilon}$ ,  $x$  代表宏观坐标,  $y$  代表局部坐标。

令算子

$$\begin{aligned} A^\epsilon &= \epsilon^{-2} A_1 + \epsilon^{-1} A_2 + \epsilon^0 A_3 \\ B^\epsilon &= \epsilon^{-2} B_1 + \epsilon^{-1} B_2 + \epsilon^0 B_3 \end{aligned} \quad (4)$$

其中

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{\partial}{\partial y_i} \left[ k_{ij}(y, \omega) \frac{\partial}{\partial y_j} \right] \\ A_2 &= -\frac{\partial}{\partial y_i} \left[ k_{ij}(y, \omega) \frac{\partial}{\partial x_j} \right] - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ k_{ij}(y, \omega) \frac{\partial}{\partial y_j} \right] \\ A_3 &= -\frac{\partial}{\partial x_i} \left[ k_{ij}(y, \omega) \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \\ B_1 &= -\frac{\partial}{\partial y_i} \left[ b_{ij}(y, \omega) \frac{\partial}{\partial y_j} \right] \\ B_2 &= -\frac{\partial}{\partial y_i} \left[ b_{ij}(y, \omega) \frac{\partial}{\partial x_j} \right] - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ b_{ij}(y, \omega) \frac{\partial}{\partial y_j} \right] \\ B_3 &= -\frac{\partial}{\partial x_i} \left[ b_{ij}(y, \omega) \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \end{aligned}$$

相应的求偏导变为

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial y}$$

将展开式代入原方程, 令方程两端  $\epsilon$  同次幂系数相等, 可以构造性地得到如下一系列方程:

$$\epsilon^{-2}: (A_1 T_0 + B_1 P_0) = 0 \quad (5)$$

$$\epsilon^{-1}: (A_1 T_1 + A_2 T_0 + B_1 P_1 + B_2 P_0) = 0 \quad (6)$$

$$\epsilon^0: A_1 T_2 + A_2 T_1 + A_3 T_0 + B_1 P_2 + B_2 P_1 + B_3 P_0 = f \quad (7)$$

由式(5)可知

$$-\frac{\partial}{\partial y_i} \left( (k_{ij}(y, \omega^s) + 4T_0^3 b_{ij}(y, \omega^s)) \frac{\partial T_0(x, y)}{\partial y_j} \right) = 0 \quad (8)$$

令

$$a(\phi, \varphi) = \int_Y \left[ k_{ij}(y) \frac{\partial \phi}{\partial y_i} \frac{\partial \varphi}{\partial y_j} + b_{ij}(y) \frac{\partial \phi^4}{\partial y_i} \frac{\partial \varphi}{\partial y_j} \right] dy_i dy_j$$

在空间  $H^1(Y)$  方程的变分形式为

$$a(T_0, \varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in H^1(Y)$$

由假设(2), (3)及若  $T_0(x, y) > 0$ , 则

$$\int_Y \nabla T_0 \nabla T_0 dy \leq a(T_0, \varphi) = 0$$

可证式(8)对于  $y$  存在唯一的解, 由此说明  $T_0(x, y)$  关于  $y$  为常数。由 Zhang<sup>[22]</sup> 定理 5.1 的证明可知均匀化解  $T_0$  是有正的下界。

对于式(6), 由于  $T_0(x)$  与  $y$  无关, 方程可简化为

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_i} \left( (k_{ij}(y, \omega^s) + 4T_0^3 b_{ij}(y, \omega^s)) \frac{\partial T_1}{\partial y_j} \right) \\ = -\frac{\partial}{\partial y_i} \left( (k_{ij}(y, \omega^s) + 4T_0^3 b_{ij}(y, \omega^s)) \frac{\partial T_0(x)}{\partial x_j} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

定义辅助函数  $N_{a_1}(x, y, \omega^s)$  为下面方程在  $H^1(Y)$  空间内的解

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_i} \left( (k_{ij}(y, \omega^s) + 4T_0^3 b_{ij}(y, \omega^s)) \frac{\partial N_{a_1}}{\partial y_j} \right) \\ = -\frac{\partial}{\partial y_i} (k_{ia_1}(y, \omega^s) + 4T_0^3 b_{ia_1}(y, \omega^s)) \end{aligned}$$

由于  $T_0(x)$  与  $y$  无关且系数  $k_{ij}(y, \omega^s)$ ,  $b_{ij}(y, \omega^s)$  关于  $y$  周期的, 则有  $\int_Y C_1 N_{a_1} dy = 0$ , 这说明上式在空间  $H^1(Y)$  内存在唯一解。那么方程解的一般形式可以定义为

$$T_1(x, y) = N_{a_1}(x, y, \omega^s) \frac{\partial T_0}{\partial x_{a_1}} + \tilde{T}_1(x)$$

$\tilde{T}_1(x)$  为只与  $x$  有关的函数。 $T_1(x, y)$  关于  $y$  是周期的。同时选择  $N_{a_1}(x, y, \omega^s)$  满足如下的边界条件:

$$N_{a_1}(x, y, \omega^s) = 0 \quad \text{on } \partial Y^s$$

则  $N_{a_1}(x, y, \omega^s)$  在归一化单胞  $Y^s$  上满足如下椭圆型偏微分方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_i} \left( (k_{ij}(y, \omega^s) + 4T_0^3 b_{ij}(y, \omega^s)) \frac{\partial N_{a_1}}{\partial y_j} \right) \\ = -\frac{\partial}{\partial y_i} (k_{ia_1}(y, \omega^s) + 4T_0^3 b_{ia_1}(y, \omega^s)) \quad y \in Y^s \\ N_{a_1}(x, y, \omega^s) = 0 \quad y \in \partial Y^s \end{cases} \quad (11)$$

对于任意给定的  $\omega^s$ , 根据假设(2)和(3), Zhang<sup>[22]</sup> 引理 5.3, Lax-Milgram 定理和 Poincare 不等式可知, 方程(11)存在唯一解。

根据文献[15, 18], 对于任意一个样本  $\omega^s$ , 定义如下的均匀化系数

$$\begin{aligned} \hat{k}_{ij}(x, \omega^s) &= \frac{1}{|Y|} \int_Y \left[ k_{ip}(y, \omega^s) \frac{\partial N_j}{\partial y_p} + k_{ij}(y, \omega^s) \right] dy \\ \hat{b}_{ij}(x, \omega^s) &= \frac{1}{|Y|} \int_Y \left[ b_{ip}(y, \omega^s) \frac{\partial N_j}{\partial y_p} + b_{ij}(y, \omega^s) \right] dy \end{aligned} \quad (12)$$

并给出定理 1:

$|\hat{k}_{ij}(x, \omega^s)| \leq \tilde{M}$ ,  $|\hat{b}_{ij}(x, \omega^s)| \leq N$ ,  $\tilde{M}$ 、 $N$  为不依赖于  $y$ 、 $\omega^s$  的常数。

证明: 由假设(2)知

$$|k_{ij}(y, \omega^s)| \leq M_1, b_{ij}(y, \omega^s) \leq M_2$$

并且根据 Zhang<sup>[22]</sup> 的引理 5.3, 对于任意确定的  $\omega^s$   $\|\nabla_y N_{a_1}(x, y, \omega^s)\|_{L^2(Y)} \leq C$ ,  $M_1$ 、 $M_2$ 、 $C$  为不依赖于  $y$ 、 $\omega^s$  的常数。

由均匀化的系数公式知

$$\begin{aligned} |\hat{k}_{ij}(x, \omega^s)| &= \left| \frac{1}{|Y|} \int_Y \left[ k_{ip}(y, \omega^s) \frac{\partial N_j}{\partial y_p} + k_{ij}(y, \omega^s) \right] dy \right| \\ &\leq \frac{1}{|Y|} (k_{i_1}(\cdot, \omega^s)_{L^\infty(Y)} \|\nabla_y N_{a_1}(\cdot, \omega^s)\|_{L^2(Y)} + \\ &\quad \|\hat{k}_{ij}(\cdot, \omega^s)\|_{L^\infty(Y)}) \leq \frac{1}{|Y|} (M_1 * C + M_1) |Y| = \tilde{M} \end{aligned}$$

同理可证明  $|\hat{b}_{ij}(x, \omega^s)| \leq N$ 。

进一步由假设(1)知  $\hat{k}_{ij}(x, \omega^s)$ ,  $\hat{b}_{ij}(x, \omega^s)$  期望存在, 则定义期望均匀化系数

$$\hat{k}_{ij}(x) = E\hat{k}_{ij}(x, \omega^s), \hat{b}_{ij}(x) = E\hat{b}_{ij}(x, \omega^s)$$

由柯尔莫哥洛夫强大数定理, 其期望均匀化系数可写成如下的形式:

$$\begin{aligned} \hat{k}_{ij}(x) &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\sum_{s=1}^M \hat{k}_{ij}(x, \omega^s)}{M} \\ \hat{b}_{ij}(x) &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\sum_{s=1}^M \hat{b}_{ij}(x, \omega^s)}{M} \end{aligned} \quad (13)$$

$M$  为最大样本数,  $x$  取遍整个  $\Omega^s$  区域,  $\hat{k}_{ij}(x)$ ,  $\hat{b}_{ij}(x)$  为定义在  $\Omega^s$  内的函数。并且根据 Li<sup>[15]</sup> 的证明可知  $\hat{k}_{ij}(x)$ ,  $\hat{b}_{ij}(x)$  为对称正定的。

对方程(7)有如下的形式:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\partial}{\partial y_i} ((k_{ij}(y, \omega^s) + 4T_0^3 b_{ij}(y, \omega^s)) \frac{\partial}{\partial y_j}) \\ C_1 T_2 &= - \frac{\partial}{\partial y_i} (k_{ij}(y, \omega^s) \frac{\partial T_1}{\partial x_j}) - \frac{\partial}{\partial x_i} (k_{ij}(y, \omega^s) \frac{\partial T_1}{\partial y_j}) - \\ &\quad \frac{\partial}{\partial x_i} (k_{ij}(y, \omega^s) \frac{\partial T_0}{\partial x_j}) - \frac{\partial}{\partial y_i} (6T_0^2 b_{ij}(y, \omega^s) \frac{\partial T_1^2}{\partial y_j}) - \\ &\quad \frac{\partial}{\partial y_i} (b_{ij}(y, \omega^s) \frac{\partial (4T_0^3 T_1)}{\partial x_j}) - \frac{\partial}{\partial x_i} (4T_0^3 b_{ij}(y, \omega^s) \frac{\partial T_1}{\partial y_j}) - \\ &\quad \frac{\partial}{\partial x_i} (b_{ij}(y, \omega^s) \frac{\partial T_0^4}{\partial x_j}) - f \end{aligned} \quad (14)$$

要使方程关于  $T_2$  在空间  $H^1(Y^s)$  内存在唯一解, 则

需要  $\int_Y (C_1 T_2) dy = 0$  的相容性条件, 于是方程(14)在单胞上右端积分也需为 0。由于  $T_0$ ,  $T_1$  关于  $Y$  是周期的, 则方程右端积分为 0, 得到方程

$$\begin{aligned} - \frac{\partial}{\partial x_i} \int_Y \left( (k_{ij}(y, \omega^s) + 4T_0^3 b_{ij}(y, \omega^s)) \frac{\partial T_1}{\partial y_j} \right) - \\ \int_Y k_{ij}(y, \omega^s) dy \frac{\partial^2 T_0}{\partial x_i \partial x_j} - \int_Y b_{ij}(y, \omega^s) dy \frac{\partial^2 T_0^4}{\partial x_i \partial x_j} \\ = |Y| f \end{aligned} \quad (15)$$

将方程(10)代入方程(15)并整理, 在整个区域  $\Omega$  定义如下均匀化问题:

$$\begin{cases} - \frac{\partial}{\partial x_i} (\hat{k}_{ij} \frac{\partial T_0(x)}{\partial x_j}) - \frac{\partial}{\partial x_i} (\hat{b}_{ij} \frac{\partial T_0^4(x)}{\partial x_j}) \\ = f(x) & x \in \Omega \\ T_0(x) = \bar{T}(x) & x \in \Gamma_1 \\ \nu_i (\hat{k}_{ij} + 4T_0^3(x) \hat{b}_{ij}) \frac{\partial T_0(x)}{\partial x_j} = \bar{q}(x) & x \in \Gamma_2 \end{cases} \quad (16)$$

对于任意取定的  $\omega^s$ , 利用  $\hat{k}_{ij}(x)$ ,  $\hat{b}_{ij}(x)$  为对称正定, Zhang<sup>[22]</sup> 定理 5.1 证明了方程解的存在性。

为了得到近似展开式的二阶项, 将式(14)  $f$  替换成式(16)的形式并整理得

$$\begin{aligned} C_1 T_2 &= - \frac{\partial}{\partial y_i} (k_{ij}(y, \omega^s) \frac{\partial T_1}{\partial x_j}) - \\ &\quad \frac{\partial}{\partial x_i} (k_{ij}(y, \omega^s) \frac{\partial T_1}{\partial y_j}) - \frac{\partial}{\partial x_i} (k_{ij}(y, \omega^s) \frac{\partial T_0}{\partial x_j}) - \\ &\quad \frac{\partial}{\partial y_i} (6T_0^2 b_{ij}(y, \omega^s) \frac{\partial T_1^2}{\partial y_j}) - \\ &\quad \frac{\partial}{\partial y_i} (b_{ij}(y, \omega^s) \frac{\partial (4T_0^3 T_1)}{\partial x_j}) - \\ &\quad \frac{\partial}{\partial x_i} (4T_0^3 b_{ij}(y, \omega^s) \frac{\partial T_1}{\partial y_j}) - \\ &\quad \frac{\partial}{\partial x_i} (b_{ij}(y, \omega^s) \frac{\partial T_0^4}{\partial x_j}) + \\ &\quad \frac{\partial}{\partial x_i} (\hat{k}_{ij} \frac{\partial T_0}{\partial x_j}) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\hat{b}_{ij} \frac{\partial T_0^4}{\partial x_j}) \\ &= - \frac{\partial}{\partial x_i} ((k_{ij}(y, \omega^s) + \\ &\quad k_{ip}(y, \omega^s) \frac{\partial N_j}{\partial y_p} - \hat{k}_{ij}) \frac{\partial T_0}{\partial x_j}) - \frac{\partial}{\partial x_i} ((b_{ij}(y, \omega^s) + \\ &\quad b_{ip}(y, \omega^s) \frac{\partial N_j}{\partial y_p} - \hat{b}_{ij}) \frac{\partial T_0^4}{\partial x_j}) - \\ &\quad \frac{\partial}{\partial y_i} (k_{ij}(y, \omega^s) (N_a(x, y, \omega^s) \frac{\partial^2 T_0}{\partial x_a \partial x_j}) - \\ &\quad \frac{\partial}{\partial y_i} (6T_0^2 b_{ij}(y, \omega^s) \frac{\partial (N_\beta)^2}{\partial y_j} (\frac{\partial T_0}{\partial x_\beta})^2) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y_i} (b_{ij}(y, \omega^s) N_a(x, y, \omega^s) \frac{\partial^2 T_0^1}{\partial x_a \partial x_j}) - \\ & \frac{\partial}{\partial y_i} (k_{ij}(y, \omega^s) \frac{\partial N_a}{\partial x_j} + 4T_0^3 b_{ij}(y, \omega^s) \frac{\partial N_a}{\partial x_j}) \frac{\partial T_0}{\partial x_a} - \\ & \frac{\partial}{\partial x_i} (k_{ij}(y, \omega^s) \frac{\partial N_a}{\partial y_j}) \frac{\partial T_0}{\partial x_a} - \frac{\partial k_{ij}(y, \omega^s)}{\partial x_i} \frac{\partial T_0}{\partial x_j} + \\ & \frac{\partial}{\partial x_i} (\hat{k}_{ij}) \frac{\partial T_0}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i} (b_{ij}(y, \omega^s) \frac{\partial N_a}{\partial y_j}) \frac{\partial T_0^4}{\partial x_a} - \\ & \frac{\partial b_{ij}(y, \omega^s)}{\partial x_i} \frac{\partial T_0^4}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\hat{b}_{ij}) \frac{\partial T_0^4}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (17)$$

欲使式(17)成立, 定义  $T_2(x, y, \omega^s)$  的形式为

$$\begin{aligned} T_2(x, y, \omega^s) = & M_{a_1 a_2}(x, y, \omega^s) \frac{\partial^2 T_0}{\partial x_{a_1} \partial x_{a_2}} + \\ & N_{a_1 a_2}(x, y, \omega^s) \frac{\partial^2 T_0^4}{\partial x_{a_1} \partial x_{a_2}} + \\ & R_{a_1}(x, y, \omega^s) \left( \frac{\partial T_0}{\partial x_{a_1}} \right)^2 + C_{a_1}(x, y, \omega^s) \frac{\partial T_0}{\partial x_{a_1}} \end{aligned}$$

其中:  $T_0(x)$  为定义在  $\Omega$  上的均匀化问题的均匀化解,  $M_{a_1 a_2}(x, y, \omega^s)$ ,  $N_{a_1 a_2}(x, y, \omega^s)$ ,  $R_{a_1}(x, y, \omega^s)$  以及  $C_{a_1}(x, y, \omega^s)$  为定义在单位化的单胞  $Y^s$  上的依赖于抽样  $\omega^s$  的局部解, 对于一个确定的分布样本  $\omega^s$ , 可通过求解如下问题确定。

$M_{a_1 a_2}(x, y, \omega^s)$  是如下方程的解:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_i} \left( (k_{ij}(y, \omega^s) + 4T_0^3 b_{ij}(y, \omega^s)) \frac{\partial M_{a_1 a_2}}{\partial y_j} \right) = \\ \hat{k}_{a_1 a_2} - k_{a_1 a_2}(y, \omega^s) - k_{a_2 j}(y, \omega^s) \frac{\partial N_{a_1}}{\partial y_j} - \\ \frac{\partial}{\partial y_i} (k_{i a_2}(y, \omega^s) N_{a_1}(x, y, \omega^s)) \quad y \in Y^s \\ M_{a_1 a_2}(x, y, \omega^s) = 0 \quad y \in \partial Y^s \\ N_{a_1 a_2}(x, y, \omega^s) \text{ 是如下方程的解:} \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_i} \left( (k_{ij}(y, \omega^s) + 4T_0^3 b_{ij}(y, \omega^s)) \frac{\partial N_{a_1 a_2}}{\partial y_j} \right) = \\ \hat{b}_{a_1 a_2} - b_{a_1 a_2}(y, \omega^s) - b_{a_2 j}(y, \omega^s) \frac{\partial N_{a_1}}{\partial y_j} - \\ \frac{\partial}{\partial y_i} (b_{i a_2}(y, \omega^s) N_{a_1}(x, y, \omega^s)) \quad y \in Y^s \\ N_{a_1 a_2}(x, y, \omega^s) = 0 \quad y \in \partial Y^s \end{cases} \quad (19)$$

$R_{a_1}(x, y, \omega^s)$  是如下方程的解:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_i} \left( (k_{ij}(y, \omega^s) + 4T_0^3 b_{ij}(y, \omega^s)) \frac{\partial R_{a_1}}{\partial y_j} \right) = \\ - \frac{\partial}{\partial y_i} \left( 6T_0^3 b_{ij}(y, \omega^s) \frac{\partial (N_{a_1})^2}{\partial y_j} \right) \quad y \in Y^s \\ R_{a_1}(x, y, \omega^s) = 0 \quad y \in \partial Y^s \end{cases} \quad (20)$$

$C_{a_1}(x, y, \omega^s)$  是如下方程的解

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_i} \left( (k_{ij}(y) + 4T_0^3 b_{ij}(y)) \frac{\partial C_{a_1}}{\partial y_j} \right) = \\ \frac{\partial \hat{k}_{a_1}}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k_{ij}(y) \frac{\partial N_{a_1}}{\partial y_j} \right) - \\ \frac{\partial}{\partial y_i} \left( k_{ij}(y, \omega^s) \frac{\partial N_{a_1}}{\partial x_j} \right) + 4T_0^3 \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \hat{b}_{a_1}(x) - \right. \\ \left. \frac{\partial}{\partial x_i} (b_{ij}(y, \omega^s) \frac{\partial N_{a_1}}{\partial y_j}) - \frac{\partial}{\partial y_i} (b_{ij}(y, \omega^s) \frac{\partial N_{a_1}}{\partial x_j}) \right) \\ y \in Y^s \quad C_{a_1}(x, y, \omega^s) = 0 \quad y \in \partial Y^s \end{cases} \quad (21)$$

由假设(ii), (iii), Lax - Milgram 定理和 Poincare 不等式可知, 上述问题(18)~(21)的解存在且唯一。

由以上推导, 可以得到定理 2:

多孔材料热传导-热辐射耦合问题的温度解有如下形式的统计二阶双尺度渐进展开式:

$$\begin{aligned} T_\varepsilon(x, \omega^s) = & T_0(x) + \varepsilon N_{a_1}(x, y, \omega^s) \frac{\partial T_0}{\partial x_{a_1}} + \\ & \varepsilon^2 \left[ M_{a_1 a_2}(x, y, \omega^s) \frac{\partial^2 T_0}{\partial x_{a_1} \partial x_{a_2}} + \right. \\ & N_{a_1 a_2}(x, y, \omega^s) \frac{\partial^2 T_0^4}{\partial x_{a_1} \partial x_{a_2}} + \\ & R_{a_1}(x, y, \omega^s) \left( \frac{\partial T_0}{\partial x_{a_1}} \right)^2 + \\ & \left. C_{a_1}(x, y, \omega^s) \frac{\partial T_0}{\partial x_{a_1}} \right] + \varepsilon^3 P_1(x, y, \omega^s) \end{aligned} \quad (22)$$

其中:  $T_0(x)$  为均匀化问题的解,  $N_{a_1}(x, y, \omega^s)$ ,  $M_{a_1 a_2}(x, y, \omega^s)$ ,  $N_{a_1 a_2}(x, y, \omega^s)$ ,  $R_{a_1}(x, y, \omega^s)$ ,  $C_{a_1}(x, y, \omega^s)$  为定义在单胞上问题(11)、(18)、(19)、(20)、(21)的单胞解。

在实际工程问题中, 式(22)仅取展开式的前三项, 即

$$\begin{aligned} \tilde{T}_\varepsilon(x, \omega^s) = & T_0(x) + \varepsilon N_{a_1}(x, y, \omega^s) \frac{\partial T_0}{\partial x_{a_1}} + \\ & \varepsilon^2 (M_{a_1 a_2}(x, y, \omega^s) \frac{\partial^2 T_0}{\partial x_{a_1} \partial x_{a_2}} + \\ & N_{a_1 a_2}(x, y, \omega^s) \frac{\partial^2 T_0^4}{\partial x_{a_1} \partial x_{a_2}} + \\ & R_{a_1}(x, y, \omega^s) \left( \frac{\partial T_0}{\partial x_{a_1}} \right)^2 + C_{a_1}(x, y, \omega^s) \frac{\partial T_0}{\partial x_{a_1}}) \end{aligned} \quad (23)$$

式(23)是温度的二阶双尺度渐进展开式, 可继续推导得温度梯度及其热流密度的展开式:

$$\frac{\partial \tilde{T}_\varepsilon(x, \omega^s)}{\partial x_i} = \frac{\partial T_0(x)}{\partial x_i} + \frac{\partial N_{a_1}(x, y, \omega^s)}{\partial y_i} \frac{\partial T_0(x)}{\partial x_{a_1}} +$$

$$\begin{aligned} &\varepsilon N_{a_1}(x, y, \omega^s) \frac{\partial^2 T_0(x)}{\partial x_{a_1} \partial x_i} + \frac{\partial N_{a_1}(x, y, \omega^s)}{\partial x_i} \frac{\partial T_0(x)}{\partial x_{a_1}} + \\ &\varepsilon \frac{\partial^2 T_0(x)}{\partial x_{a_1} \partial x_{a_2}} \left( \frac{\partial M_{a_1 a_2}(x, y, \omega^s)}{\partial y_i} + \varepsilon \frac{\partial M_{a_1 a_2}(x, y, \omega^s)}{\partial x_i} \right) + \\ &\varepsilon^2 M_{a_1 a_2}(x, y, \omega^s) \frac{\partial^3 T_0(x)}{\partial x_{a_1} \partial x_{a_2} \partial x_i} + \\ &\varepsilon \frac{\partial^2 T_0(x)}{\partial x_{a_1} \partial x_{a_2}} \left( \frac{\partial N_{a_1 a_2}(x, y, \omega^s)}{\partial y_i} + \right. \\ &\left. \varepsilon \frac{\partial N_{a_1 a_2}(x, y, \omega^s)}{\partial x_i} \right) + \varepsilon^2 N_{a_1 a_2}(x, y, \omega^s) \frac{\partial^3 T_0(x)}{\partial x_{a_1} \partial x_{a_2} \partial x_i} + \\ &\varepsilon \frac{\partial R_{a_1}(x, y, \omega^s)}{\partial y_i} \left( \frac{\partial T_0}{\partial x_{a_1}} \right)^2 + \\ &\varepsilon^2 R_{a_1}(x, y, \omega^s) \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial T_0}{\partial x_{a_1}} \right)^2 + \\ &\varepsilon^2 \frac{\partial R_{a_1}(x, y, \omega^s)}{\partial x_i} \left( \frac{\partial T_0}{\partial x_{a_1}} \right)^2 + \varepsilon \frac{\partial C_{a_1}(x, y, \omega^s)}{\partial y_i} \frac{\partial T_0(x)}{\partial x_{a_1}} + \\ &\varepsilon^2 C_{a_1}(x, y, \omega^s) \frac{\partial^2 T_0(x)}{\partial x_{a_1} \partial x_i} + \varepsilon^2 \frac{\partial C_{a_1}(x, y, \omega^s)}{\partial x_i} \frac{\partial T_0(x)}{\partial x_{a_1}} \end{aligned} \quad (24)$$

$$q_i(x, \omega^s) = -k_{ij}^s(x, \omega^s) \frac{\partial \tilde{T}_\varepsilon(x, \omega^s)}{\partial x_j} \quad (25)$$

## 2 统计双尺度热流密度极值的算法过程

(1) 根据给定的随机分布复合材料单胞的概率分布模型生成一个随机分布的样本  $\omega^s$ ，并对其相应的单胞进行有限元离散。

(2) 在整个区域  $\Omega^\varepsilon$  上，选取一定数量的代表点  $x^i (i = 1, 2, \dots, L) \subset \Omega$ 。对于  $x^i (i = 1, 2, \dots, L)$ ，取温度区间  $[T_1, T_2]$ ，在相应的单胞上采用有限元方法求解  $N_{a_1}(x^i, y, \omega^s)$ 。进一步通过式(12)计算对应于样本  $\omega^s$  的均匀化热传导系数  $\{\hat{k}_{ij}(x^i, \omega^s)\}$  和均匀化辐射系数  $\{\hat{b}_{ij}(x^i, \omega^s)\}$ 。

(3) 对一定数量的样本  $\omega^s (s=1, \dots, M)$ ，重复(1)~(2)步，其中  $M$  是样本数。由此可以使用式(13)计算期望均匀化系数  $\{\hat{k}_{ij}(x^i)\}$ ， $\{\hat{b}_{ij}(x^i)\}$ 。

(4) 根据在整个区域  $\Omega^\varepsilon$  上已经计算出的期望均匀化系数  $\{\hat{k}_{ij}(x^i)\}$ ， $\{\hat{b}_{ij}(x^i)\}$  ( $i = 1, 2, \dots, L$ )，通过样条插值得出整个区间的期望均匀化系数。然后，利用直接迭代法求解非线性问题，得到在整个结构  $\Omega$  上的宏观均匀化温度解  $T_0(x)$ 。

(5) 根据求得的均匀化解，确定在整个  $\Omega^\varepsilon$  上宏观热流密度极值可能出现的区域。

(6) 在确定区域内选取单胞  $c^s$ ，生成样本  $\omega^s$ 。

然后根据(2)，(3)，(4)步求出  $N_{a_1}(x, y, \omega^s)$ ， $M_{a_1 a_2}(x, y, \omega^s)$ ， $N_{a_1 a_2}(x, y, \omega^s)$ ， $R_{a_1}(x, y, \omega^s)$  以及  $C_{a_1}(x, y, \omega^s)$ ，进而按式(24)和(25)确定单胞内的温度梯度以及热流密度分布。

(7) 对单胞  $c^s$ ，其内各点热流密度分量可由式(25)得到，设在  $x \in c^s$  点热流密度为  $q(x, \omega^s)$ ，则在此单胞内的热流密度极值为

$$q_{\text{extr}}(\omega^s) = \max_{x \in c^s} q(x, \omega^s) \quad (26)$$

(8) 对于所有的样本  $\omega^s (s = 1, \dots, M)$ ，重复(6)~(7)步，可以得到  $M$  个宏观均匀化热流密度极值  $q_{\text{extr}}(\omega^s)$ 。类似于期望均匀化系数的求解，可得整个区域内的统计热流密度极值：

$$\bar{q}_{\text{extr}} = \frac{\sum_{s=1}^M q_{\text{extr}}(\omega^s)}{M} \quad (27)$$

## 3 数值试验

### 3.1 算法有效性验证

为了验证算法的正确性，取周期区域  $\Omega^\varepsilon$  如图2(a)所示，即表示三个方向各由10个单胞周期分布形成。周期单胞  $Y^s$  如图2(b)。区域内部热源取为0，材料上边界温度为1000 K，下边界为100 K，左右边界绝热。为了给出正确的温度分布，辐射传热系数取材料的有效值<sup>[20]</sup>。

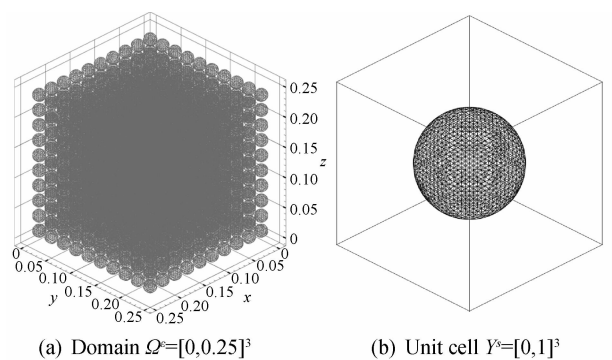


图2 孔洞周期分布复合材料的结构  
Fig. 2 Periodic distribution of porous materials

多孔材料热传导和热辐射的系数如下：

$$\begin{aligned} k_{ij0} &= 0.0441 \delta_{ij}, \quad k_{ij1} = 0.0557375 \delta_{ij} \\ b_{ij0} &= 1.356 \times 10^{-11} \delta_{ij}, \quad b_{ij1} = 1.356e \times 10^{-11} \delta_{ij} \end{aligned}$$

其中有效辐射系数取闫长海<sup>[1]</sup>给出的有效值。因为不可能找到问题的解析解，采用非常细网格上的有限元解  $T_\varepsilon$  来代替  $T_\varepsilon(x, \omega^s)$ 。对区域进行四面体

网格剖分, 剖分单元数和节点数如表 1 所示。

表 1 计算量比较

Table 1 Comparison of computational cost

Elements	Original equation	Unit cell	Homogenized equation
	1568790	5078	93750
Nodes	276069	1403	17576

设  $e_0 = T_e - T_0$ ,  $e_1 = T_e - T_1^*$ ,  $e_2 = T_e - T_2^*$ ,  $T_e(x)$  是非常细网格上的有限元解,  $T_0(x)$  是均匀化方程的有限元解,  $T_1^*(x, y)$  是一阶双尺度有限元解,  $T_2^*(x, y)$  是二阶双尺度有限元解。图 3 给出了统计双尺度有限元解与传统的有限元解在  $z=0.2$  时的温度分布切片图和绝对误差图。

另外本文中得到的温度梯度公式在计算上增加了单胞函数的导数计算, 但增加的二阶项能更好地对均匀化解的有关信息进行补充。为便于直观地比较二阶双尺度方法相对于均匀化方法在计算温度梯度时的有效性, 图 4 给出了用双尺度有限元方法和均匀化方法求解  $z$  方向温度梯度并和细网格有限元解比较的结果。

由图 3 和图 4 的计算结果可知, 均匀化结果不是很满意, 二阶多尺度有限元解对于复合材料的计算是有效的。并且当  $\epsilon$  取值比较小的时候, 直接进行有限元计算需要非常细的网格并且收敛很慢, 当自由度非常大时, 计算是十分困难的。因此多尺度有限元法是一种实用有效的方法。另外从图表可知, 对于均匀化问题和单胞问题, 本文的计算量很小。

### 3.2 随机分布孔洞对材料热性能的影响

为呈现孔洞分布状态对复合材料热传导性能的影响, 本文将对如下三种微观孔洞分布状态进行分析<sup>[18]</sup>: 圆球孔洞的中心在单胞内均匀分布; 圆球孔洞的中心以单胞的形心点为中心正态分布; 长椭圆孔洞(长轴为中轴和短轴的 2 倍)的倾角沿  $x_3$  方向正态分布, 中心在单胞内均匀分布, 如图 5 所示。为了得到较为准确的预测值, 必须进行大量样本的计算, 最后计算出统计意义上的结果。本文中所有的计算结果都是对 50 个样本的统计。

本文中选取闫长海<sup>[20]</sup>中的陶瓷多孔材料, 上边界温度为  $T_1 = 1000$  K, 下边界为  $T_2 = 100$  K, 左右边界绝热。并取  $\epsilon = 0.001$ 。材料参数和边界条件如表 2 所示。

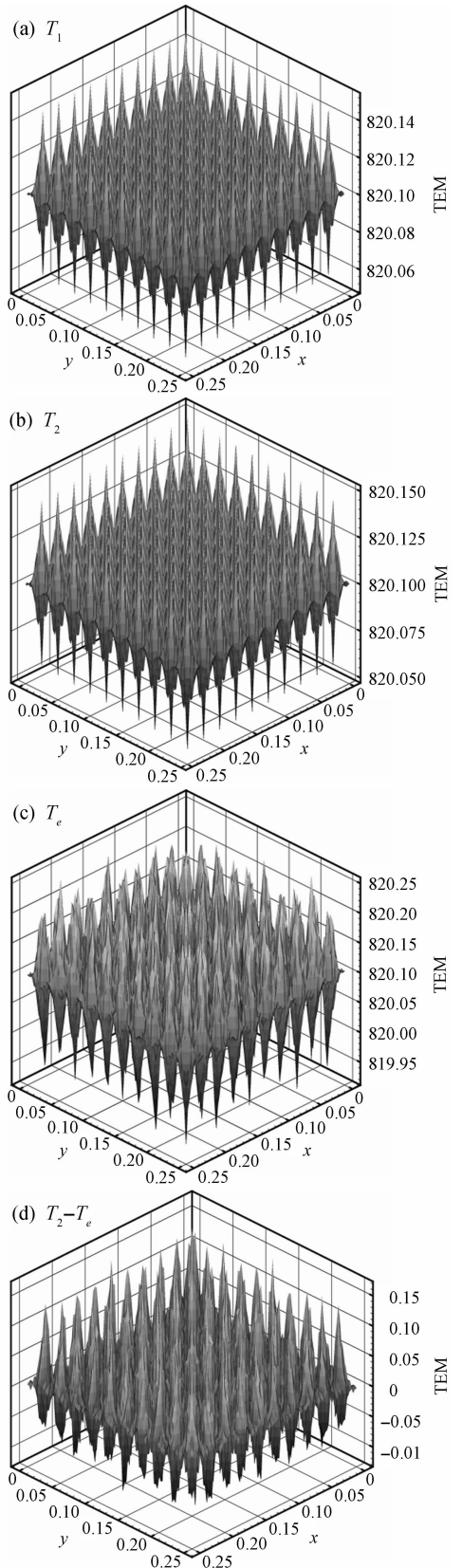


图 3 多孔材料温度和误差在  $z=0.2$  分布图  
Fig. 3 Temperature and error distribution of porous materials at  $z=0.2$

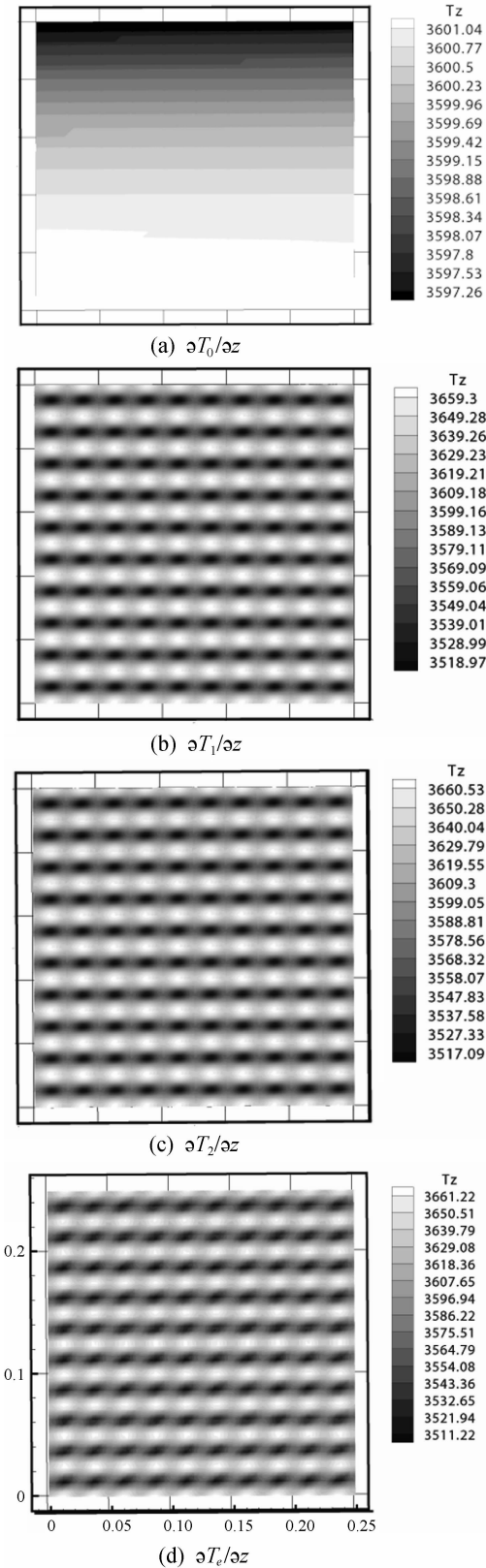


图4 多孔材料温度梯度在  $x=0.15$  分布图  
Fig. 4 Temperature gradient distribution of porous materials at  $x=0.15$

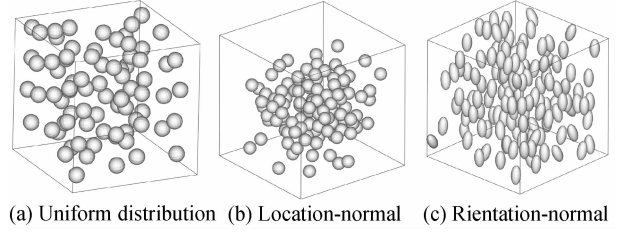


图5 复合材料中的孔洞分布  
Fig. 5 Distribution of pores in composite materials

表2 陶瓷多孔材料热传导参数

**Table 2 Thermal conductivity of porous ceramic materials**

$W(m \cdot K)^{-1}$

Ceramic	Gas	Effective radiative thermal conductivity of ceramic
4.41	0.0557375	$1.356 \times 10^{-11}$

用基于有限元的统计双尺度方法计算这种复合材料的有效热导率。由于方程的非线性，有效热导系数与温度有关。本文中计算了不同温度下不同体分比的有效热传导系数，并与 Hashin - shtrikman 界进行了比较。孔洞中心位置为均匀分布模型，温度为 30 K 和 1000 K 时，双尺度方法计算出的结果如表 3 所示。孔洞位置为正态分布，温度为 1000 K 时，双尺度计算的结果如表 4 所示。从表中可知求得的有效热传导系数在 Hashin - shtrikman 界内。并且在孔洞具有相同体积分数的情况下，孔洞中心呈正态分布时有效热导率较中心呈均匀分布复合材料的有效热导率要高。这是因为孔洞大部分集中在单胞中心，而基体的热导率较高，在四周形成良好的热导性。

表3 孔洞位置均匀分布且温度为 30 K 和 1000 K 时陶瓷多孔材料均匀化热传导系数随体积分变化值

**Table 3 Effective thermal conductivity of porous ceramic materials with different volume fractions at 30 K and 1000 K with uniform distribution of the spherical pores**

Temperature/ K	Volume fraction/ %	SSOTS/ $(W(m \cdot K)^{-1})$	HS-upper bound/ $(W(m \cdot K)^{-1})$	HS-lower bound/ $(W(m \cdot K)^{-1})$
30	8.8	3.9057129	4.0154	0.2162
	18.8	3.3881790	3.5374	0.2154
	28.6	2.8955281	3.0353	0.2144
	36.0	2.5299048	2.6318	0.2135
1000	8.8	3.9078538	4.0154	0.2162
	18.8	3.3903183	3.5374	0.2154
	28.6	2.9041928	3.0353	0.2144
	36.0	2.5350241	2.6318	0.2135



表 4 孔洞位置正态分布且温度为 1000 K 时陶瓷  
多孔材料均匀化热传导系数随体积分数变化值

Table 4 Effective thermal conductivity of porous ceramic materials with different volume fractions at 1000 K with normal distribution of the spherical pores

Volume fraction/%	SSOTS/ (W(m·K) <sup>-1</sup> )	HS-upper bound/ (W(m·K) <sup>-1</sup> )	HS-lower bound/ (W(m·K) <sup>-1</sup> )
8.8	3.9312157	4.0154	0.2162
18.8	3.4272720	3.5374	0.2154
28.6	2.9795456	3.0353	0.2144

考虑孔洞中心位置在单位化单胞内均匀分布(见图 5(a)), 图 6(a)为孔洞体分比为 18.8% 时等效热传导系数随温度变化的曲线, 图 6(b)为等效辐射系数随温度变化的曲线。可以看出, 等效热传导系数随温度变化不是很显著, 但是等效辐射系数随温度变化很明显。这说明当温度很高时辐射对传热起主要作用。

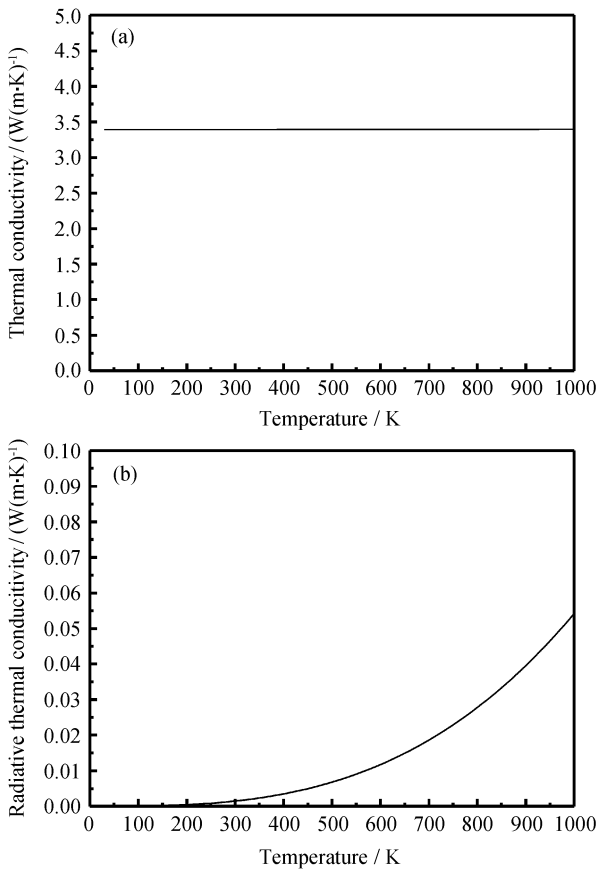


图 6 陶瓷多孔材料均匀化热传导系数和热辐射系数随温度的变化

Fig. 6 Effective thermal conductivity and effective radiative conductivity of porous ceramic materials with temperature

对这三种孔洞不同分布复合材料构件进行热流密度极值的分析。整体区域  $\Omega^e$  长、宽为单位长度, 厚度为 0.5 的长方体区域。边界条件和参数选取与上面的相同。其中椭球孔洞, 长轴为 0.08, 中轴和短轴为 0.04, 当椭球长轴走向以  $x_3$  轴为中心正态分布时, 图 7 给出了具有不同分布状态的陶瓷多孔材料厚板内热流密度极值随孔洞体积分数的变化。可以看出, 对于同一分布状态, 随孔洞体积分数的增大构件内部的热流密度极值都呈上升趋势, 倾角呈正态分布较中心呈均匀分布和位置正态分布构件内热流密度极值明显偏大, 当辐射系数很小时热流密度在不同微结构中变化的趋势与文献[17]变化趋势是相反的。这是因为多孔材料有效热导率随体积分数的增加逐渐减小的结果。

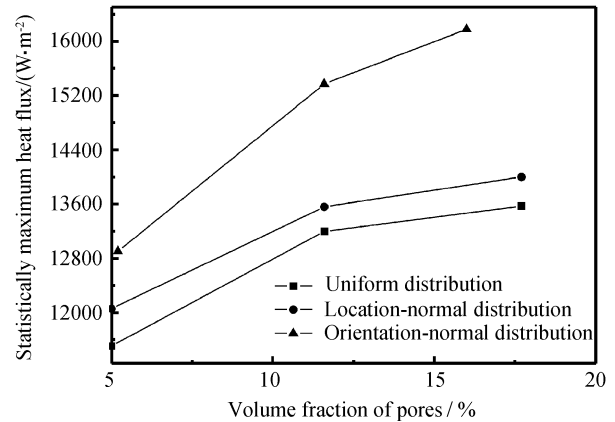


图 7 陶瓷多孔材料热流密度极值随孔洞不同分布下不同体分比的变化

Fig. 7 Statistically maximum heat flux densities of porous ceramic materials as the functions of volume fractions for different distributions of pores locations

#### 4 结论

(1) 本文中提出的二阶双尺度方法及其有限元算法可以有效的计算考虑辐射的 Rosseland 模型。从计算量的比较来看, 用统计的有限元方法求解此类问题需要非常精细的网格剖分, 而本文中提出的双尺度算法的计算代价远少于传统的有限元方法。

(2) 从表格和直观图中可以看出统计二阶双尺度近似解很接近细网格有限元解, 而均匀化解不是很满意。并且从计算结果可知均匀化收敛速度明显快于有限元的收敛速度。

(3) 利用统计二阶双尺度算法对不同体分比、不同空间分布状态的孔洞随机复合材料进行了研

究。有效热传导系数和有效热辐射系数随温度升高而增大,且温度越高,有效热辐射系数变化越大,而有效热传导系数变化缓慢。

(4) 热流密度极值不仅与材料结构和所施加载荷有关,也与材料的微观构造,包括体积分数和孔洞分布状态等有关。对于同一分布状态,随孔洞体积分数的增大构件内部的热流密度极值都呈上升趋势,倾角呈正态分布较孔洞中心呈均匀分布和位置正态分布构件内热流密度极值均偏大。

#### 参考文献:

- [1] Hashin Z, Shtrikman S. A variational approach to the theory of the effective magnetic permeability of multiphase materials [J]. *Journal of Applied Physics*, 1962, 33: 3125-3131.
- [2] Landauer R. The electrical resistance of binary metallic mixtures [J]. *Journal of Applied Physics*, 1952, 23: 779-784.
- [3] Kirkpatrick S. Percolation and conduction [J]. *Review of Modern Physics*, 1973, 45(4): 574-588.
- [4] Torquato S. Random heterogeneous materials: Microstructure and macroscopic properties [M]. New York: Springer, 2002.
- [5] Zhao C Y, Lu T J, Hodson H P. Thermal radiation in ultralight metal foams with open cells [J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2004(47): 2927-2939.
- [6] Glicksman L R, Schuetz M, Sinofsky M. Radiation heat transfer in foam insulation [J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1987, 30(1): 187-197.
- [7] Grujicic M, Zhao C L, Biggers S B, Kennedy J M, Morgan D R. Suitability of a coal-derived carbon-based foam for use in thermal protection systems of common aero vehicles [J]. *Multidiscipline Modeling in Materials and Structures*, 2007, 3(1): 1-26.
- [8] Daryabeigi K. Analysis and testing of high temperature fibrous insulation for reusable launch vehicles [C]//37th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. American: AIAA, 1999.
- [9] 武文明, 成来飞, 王 炜. 3D C/SiC 复合材料的热辐射性能 [J]. *复合材料学报*, 2008, 25(5): 79-84.  
Wu Wenming, Cheng Laifei, Wang Wei. Thermal radiation properties of 3D C/SiC composites [J]. *Acta Materiae Compositae Sinica*, 2008, 25(5): 79-84.
- [10] 唐羽烨, 薛明德. 蜂窝夹芯板的热学与力学特性分析 [J]. *复合材料学报*, 2005, 22(2): 130-136.  
Tang Yuyue, Xue Mingde. Thermo-mechanical characteristics analysis of sandwich panel with honeycomb core [J]. *Acta Materiae Compositae Sinica*, 2005, 22(2): 130-136.
- [11] Bensoussan A, Lions J L, Papanicolaou G. Asymptotic analysis for periodic structure [M]. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1978.
- [12] Oleinik O A, Shamaev A S, Yosifian G A. Mathematical problems in elasticity and homogenization [M]. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1992.
- [13] Cui J Z, Shin T M, Wang Y L. Two-scale analysis method for bodies with small period configuration [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 1999, 7(6): 601-614.
- [14] Cui J Z, Yu X G. The two-scale method for identifying mechanical parameters of composite materials with periodic configuration [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2006, 22: 581-594.
- [15] Li Y Y, Cui J Z. Two-scale analysis method for predicting heat transfer performance of composite materials with random grain distribution [J]. *Science in China Series A: Mathematics*, 2004, 47: 101-110.
- [16] Yu Y, Cui J Z, Han F. An effective computer generation method for the composites with random distribution of large numbers of heterogeneous grains [J]. *Composites Science and Technology*, 2008, 68: 2543-2550.
- [17] Yu Y, Cui J Z, Han F, Chen Y. The two-order and two-scale method for heat conduction properties of composite materials with random distribution of grains [J]. *Computer and Experimental Simulations in Engineering and Science*, 2008, 2: 19-34.
- [18] Yu Y, Cui J Z, Han F. The statistical second-order two-scale analysis method for heat conduction performances of the composite structure with inconsistent random distribution [J]. *Computational Materials Science*, 2009, 46: 151-161.
- [19] Han F, Cui J Z, Yu Y. The statistical second-order two-scale method for mechanical properties of statistically inhomogeneous materials [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2010, 84(8): 972-988.
- [20] 闫长海. 金属热防护系统隔热材料的隔热机理及隔热效率研究 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2006.  
Yan Changhai. Thermal insulating mechanism and research on thermal insulating efficiency of thermal insulations of metallic thermal protection system [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2006.
- [21] Doermann D, Sacadura J F. Heat transfer in open cell foam insulation [J]. *Journal of Heat Transfer*, 1996, 118: 88-93.
- [22] Zhang Q F, Cui J Z. Existence theory for Rosseland equation and its homogenized equation [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2012, 33(12): 1595-1612.
- [23] 张乔夫. 周期型复合材料 Rosseland 型方程多尺度分析 [D]. 北京: 中国科学院数学与系统科学研究院, 2012.  
Zhang Qiaofu. Multi-scale analysis method for Rosseland-type equation of periodic composites [D]. Beijing: Academy of Mathematics and Systems Sciences, Chinese Academy of Sciences, 2012.