第五节　　外代数

定义 1　设ξ是V上的q阶协变张量，即$\xi: V\times\cdots\times V$（$q$个因子）$\to\mathbb{R}$是$V$上的$q$重线性函数。若任意交换两个自变量的位置，$\xi$的值不变，则称$\xi$是对称的$q$阶协变张量。若任意交换两个自变量的位置$\xi$的值只改变符号，则称$\xi$是反对称的$q$阶协变张量。

命题 1　设$\xi\in V_q^0$，则ξ是对称张量的充要条件是ξ的分量关于各个指标是对称的，即

$$\xi_{i_{\sigma(1)}\cdots i_{\sigma(q)}}=\xi_{i_1\cdots i_q},\quad \forall\sigma\in\varphi(q)。$$

ξ是反对称张量的充要条件是ξ的分量关于各个指标是反对称的，即

$$\xi_{i_{\sigma(1)}\cdots i_{\sigma(q)}}=sign(\sigma)\xi_{i_1\cdots i_q},\quad \forall\sigma\in\varphi(q)。$$

定义 2 设$\xi\in V_q^0$，令

$$S_q(\xi)=\frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in\varphi(q)}\sigma(\xi),$$

$$A_q(\xi)=\frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in\varphi(q)}sign(\sigma)\cdot\sigma(\xi)。$$

则$S_q(\xi)$是对称的q阶协变张量，$A_q(\xi)$是反对称的q阶协变张量。S_q为对称化算子，A_q称为反对称化算子。

引理 2　设$1\le r<q$，用A_q表示作用在q阶协变张量上的反对称化算子，用a_r表示q阶协变张量关于前r个自变量的反对称化算子，则对任意的$\xi\in V_q^0$有

$$A_q\circ a_r(\xi)=A_q(\xi)。$$

向量空间V上的r次外形式是一种特殊的张量，其定义如下：

定义 3　向量空间V上的反对称r阶协变张量，即V上的反对称r重

线性函数，称为V上的r次外形式，简称为$r-$形式。

定义 4　设$\alpha\in\wedge^r V^*,\beta\in\wedge^s V^*$。令

$$\alpha\wedge\beta=\frac{(r+s)!}{r!s!}A_{r+s}(\alpha\otimes\beta),$$

则$\alpha\wedge\beta$是$r+s$次外形式，称为α和β的外积。

定理 3　外积运算服从下列运算律，设$\alpha,\alpha_1,\alpha_2\in\wedge^r V^*$，$\beta,\beta_1,\beta_2\in\wedge^s V^*$，$\gamma\in\wedge^t V^*$，则有

(1) 分配律

$$(\alpha_1+\alpha_2)\wedge\beta=\alpha_1\wedge\beta+\alpha_2\wedge\beta,$$

$$\alpha\wedge(\beta_1+\beta_2)=\alpha\wedge\beta_1+\alpha\wedge\beta_2$$

(2) 反交换律

$$\alpha\wedge\beta=(-1)^{rs}\beta\wedge\alpha\ ;$$

(3) 结合律

$$(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma=\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)$$

定理 4　设V是n维向量空间，$\{\delta_i\}$是它的一个基底，$\{\delta^i\}$是其对偶基底，则下列$\binom{n}{r}$个r次外形式

$$\delta^{i_1}\wedge\cdots\wedge\delta^{i_r},\quad 1\le i_1<\cdots<i_r\le n$$

构成r次外形式空间$\wedge^r V^*$的基底，由此可见，$\dim\wedge^r V^*=\binom{n}{r}$。

推论 5　设$\{\delta_i\}$是向量空间V的一个基底，ξ是V上的r次外形式，则对于任意的$u_1,\cdots,u_r\in V$有

$$\xi(u_1,\cdots,u_r)=\xi_{i_1\cdots i_r}u_1^{i_1}\cdots u_r^{i_r}$$
$$=\sum_{1\le i_1<\cdots<i_r\le n}\xi_{i_1\cdots i_r}\begin{vmatrix} u_1^{i_1}\cdots u_r^{i_1}\\ \vdots \qquad \vdots \\ u_1^{i_r}\cdots u_r^{i_r}\end{vmatrix}$$

其中$\xi_{i_1\cdots i_r}=\xi(\delta_{i_1},\ldots,\delta_{i_r}),u_\alpha=u_\alpha^i\delta_i$。

定义 5 设$f:V\to W$是从向量空间V到向量空间W的一个线性映射,则f诱导出外形式空间之间的线性映射$f^*:\wedge^r W^*\to\wedge^r V^*$,其定义是：对于任意的$\alpha\in\wedge^r W^*$及$u_1,\cdots,u_r\in V$有

$$(f^*\alpha)(u_1,\cdots,u_r)=\alpha(f(u_1),\cdots,f(u_r))。$$

f^*称为f的诱导映射。

定理 6 设$f:V\to W$是线性映射，$f^*:\wedge^r W^*\to\wedge^r V^*$是诱导映射$(r=1,2,\cdots)$，则对于任意的$\alpha\in\wedge^r W^*$，$\beta\in\wedge^s W^*$有

$$f^*(\alpha\wedge\beta)=f^*\alpha\wedge f^*\beta。$$

定理 7 1 次形式$\xi^1,\cdots,\xi^r\in V^*$线性相关的充要条件是

$$\xi^1\wedge\cdots\wedge\xi^r=0。$$

定义 6 设$\xi^1,\cdots,\xi^r\in V^*$是$r$个 1 次形式，$\Omega$是$p$次外形式。如果存在$r$个$p-1$次外形式$\varphi_1,\cdots\varphi_r$使得$\Omega=\xi^1\wedge\varphi_1+\cdots+\xi^r\wedge\varphi_r$，则记

$$\Omega\equiv 0 \bmod(\xi^1,\cdots,\xi^r)。$$

特别当$\Omega=\xi^1\wedge\varphi_1$时，称$\Omega$可被 1 次形式$\xi^1$除尽，记作$\Omega\equiv 0\bmod\xi^1$。

定理 8 设$\xi^1,\cdots,\xi^r$是r个线性无关的 1 次形式，Ω是p次外形式，则$\Omega\equiv 0\bmod(\xi^1,\cdots,\xi^r)$的充分必要条件是

$$\xi^1 \wedge \cdots \wedge \xi^r \wedge \Omega = 0。$$

定理9 设$\xi^1,\cdots,\xi^r$是r个1次形式,用W表示$\xi^1,\cdots,\xi^r$的零化子空间,即

$$W = \{u \in V : \xi^\lambda(u) = 0, 1 \le \lambda \le r\},$$

则$\Omega \equiv 0 \bmod(\xi^1,\cdots,\xi^r)$当且仅当$\Omega|_W = 0$。

定理 10 （Cartan 引理）设$\alpha^1,\cdots,\alpha^r,\beta_1,\cdots,\beta_r$是$2r$个 1 次形式，其中$\alpha^1,\cdots,\alpha^r$是线性无关的，并且

$$\sum_{\lambda=1}^r \alpha^\lambda \wedge \beta_\lambda = 0，则$$

$$\beta_\lambda = \sum_{\mu=1}^r a_{\lambda\mu}\alpha^\mu,$$

并且

$$a_{\lambda\mu} = a_{\mu\lambda}。$$

定义 7 设$\xi \in \wedge^r V^*$，能用于外积表示ξ的线性无关的 1-形式的最小个数称为外形式ξ的秩。

定理 11 一个非零r次外形式的秩是r，当且仅当它能写成r个 1-形式的外积。

作业：P.52 Ex47、Ex48