子空间拓扑、积拓扑和商拓扑

子空间拓扑

1．设A是拓扑空间(X,τ)的一个非空子集，则A的子集族

$$\tau_A=\{U\cap A\,|\,U\in\tau\}$$

是A上的一个拓扑。

2．称A的子集族$\tau_A=\{U\cap A\,|\,U\in\tau\}$为由$\tau$导出的**子空间拓扑**，称$(X,\tau_A)$为$(X,\tau)$的**子空间**。

$A\subset X, A\neq\varnothing$，$(X,\tau)$和$(A,\tau')$是拓扑空间，

$i:A\to X, x\mapsto x$。

注：若i连续，则$\tau_A\subset\tau'$中，于是子空间拓扑是使得包含映射i连续的最小拓扑。

3．设X是拓扑空间，$B\subset A\subset X$，则C是子空间A的闭集$\Leftrightarrow C$是A与X的某一个闭集的交集。

4．设X是拓扑空间，$B\subset A\subset X$，则

（1）若B是X的开（闭）集，则B也是A的开（闭）集；

（2）若A是X的开（闭）集，B是A的开（闭）集，则B也是X的开（闭）集。

积拓扑

在第一章第一节中，我们曾提出过如下问题：

问题 3 设(X_1,τ_1)和(X_2,τ_2)都是拓扑空间，则如何给出$X_1\times X_2$上的拓扑结构τ？（**乘积拓扑**）

当然$X_1\times X_2$上的拓扑结构有很多，我们要找满足一定条件或者说有一定实际意义的拓扑。先给出几个概念：

投射：规定 $j_i:X_1\times X_2\to X_i$ 为 $j_i(x_1,x_2)=x_i(i=1,2)$，称 j_i 为$X_1\times X_2$到X_i的投射。当$A_i\subset X_i,B_i\subset X_i(i=1,2)$时，显然有

$$(A_1\times A_2)\bigcap(B_1\times B_2)=(A_1\bigcap B_1)\times(A_2\bigcap B_2)$$

注：τ是满足这两个投射都连续的最小拓扑。

生成的子集族：设Γ是X的一个子集族，规定新的子集族

$\bar{\Gamma}=\{U\subset X\,|\,U$是$\Gamma$中若干成员的并集$\}$

$=\{U\subset X\,|\,\forall\in U$，存在$B\in\Gamma$，使得$x\in B\subset\Gamma$ $\}$

称$\bar{\Gamma}$为由Γ生成的子集族。

若$U_i\in\tau_i$，则

$U_1\times U_2=(U_1\times X_2)\bigcap(X_1\times U_2)=j_1^{-1}(U_1)\bigcap j_2^{-1}(U_2)\in\tau$。

构造$X_1\times X_2$上的子集族$\Gamma=\{U_1\times U_2\,|\,U_i\in\tau_i\}$，根据拓扑公理$\tau$一定包含$\bar{\Gamma}$，因此$\tau$是包含$\bar{\Gamma}$的最小拓扑。

$\bar{\Gamma}$是$X_1\times X_2$上的一个拓扑。

称$\bar{\Gamma}$为$X_1\times X_2$上的**乘积拓扑**，称（$X_1\times X_2$，$\bar{\Gamma}$）为(X_1,τ_1)和(X_2,τ_2)的乘积空间。简记为$X_1\times X_2$。

类似地，可以给出有限个拓扑空间的乘积空间。

任意多个集合的笛卡尔积

$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda = \{ f \mid f : \wedge \to \bigcup_{\lambda\in\wedge} X_\lambda 且 f(\lambda)\in X_\lambda \}$。

无限个拓扑空间的乘积空间定义比较麻烦，一般有两种：

由 $\Gamma_1 = \{\prod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \mid U_\lambda \in \tau_\lambda\}$ 和 $\Gamma_2 = \{\prod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \mid U_\lambda \in \tau_\lambda$, 且除去有限个 λ 外，$\mathrm{U}_\lambda = \mathrm{X}_\lambda$ }所生成。

定理：对于任意拓扑空间 Y 和映射 $f : Y \to X_1 \times X_2$， f 连续 $\Leftrightarrow$ f 的分量都连续。

商拓扑

在第一章第一节中，我们曾提出过如下问题：

问题 4 设 (X,τ) 是拓扑空间，$(X,\sim)$ 是等价关系，则如何给出商集 $X/\sim$ 上的拓扑结构？（**商拓扑**）

当然 $X/\sim$ 上的拓扑结构也有很多，我们要找满足一定条件或者说有一定实际意义的拓扑。

考虑投射 $p : X \to X/\sim$，这样定义 $x \mapsto [x]$，我们要在 $X/\sim$ 上定义拓扑 $\tau/\sim$，使得投射连续且最大。

设 (X,τ) 是拓扑空间，$\sim$ 是 X 上的一个等价关系。规定商集 $X/\sim$ 上的子集族

$$\tau/\sim = \{V \subset X/\sim \mid p^{-1}(V) \in \tau\}$$

则 $\tau/\sim$ 是 $X/\sim$ 上的一个拓扑，称为 τ 在 $\sim$ 下的**商拓扑**，称 $(X/\sim, \tau/\sim)$

是(X,τ)关于$\sim$的商空间。

定理 设X,Y是两个拓扑空间，$\sim$是X上的一个等价关系，$g:X/\sim\to Y$是映射，则g连续$\Leftrightarrow g\circ p$连续。