

### 第三章 商空间与闭曲面

#### 第二节 商空间与商映射

##### 商拓扑

在第一节中，我们曾提出过如下问题：

**问题 4** 设  $(X, \tau)$  是拓扑空间， $(X, \sim)$  是等价关系，则如何给出商集  $X/\sim$  上的拓扑结构？（商拓扑）

当然  $X/\sim$  上的拓扑结构也有很多，我们要找满足一定条件或者说有一定实际意义的拓扑。

考虑投射  $p: X \rightarrow X/\sim$ ，这样定义  $x \mapsto [x]$ ，我们要在  $X/\sim$  上定义拓扑  $\tau/\sim$ ，使得投射连续且最大。

**Def.:** 设  $(X, \tau)$  是拓扑空间， $\sim$  是  $X$  上的一个等价关系。规定商集  $X/\sim$  上的子集族

$$\tau/\sim = \{V \subset X/\sim \mid p^{-1}(V) \in \tau\}$$

则  $\tau/\sim$  是  $X/\sim$  上的一个拓扑，称为  $\tau$  在  $\sim$  下的商拓扑，称  $(X/\sim, \tau/\sim)$  是  $(X, \tau)$  关于  $\sim$  的商空间。

（商拓扑的证明作为练习题。）

**Th3.1:** 设  $X, Y$  是两个拓扑空间， $\sim$  是  $X$  上的一个等价关系， $g: X/\sim \rightarrow Y$  是映射，则  $g$  连续  $\Leftrightarrow g \circ p$  连续。

##### 思考题：

叙述乘积拓扑和商拓扑的定义。

**答：**乘积拓扑是使得投射连续的最小拓扑，商拓扑是使得投射连续的最大拓扑。

或者直接把拓扑写出来。