5.1 道路

定义 2.9 设 X 是拓扑空间，从单位闭区间 $I=[0,1]$ 到 X 的一个连续映射 $\alpha:I\to X$ 称为 X 上的一条道路，把点 $\alpha(0)$ 和 $\alpha(1)$ 分别称为 α 的起点和终点，统称端点

定义 2.10 一条道路 $\alpha:I\to X$ 的逆也是 X 上的道路，记作 $\overline{\alpha}$，规定 $\overline{\alpha}(t)=\alpha(1-t)$，$\forall t\in I$。

5.2 道路连通空间

定义 2.11 拓扑空间 X 称为**道路连通**的，如果 $\forall x,y\in X$，存在 X 中分别以 x 和 y 为起点和终点的道路。

命题 2.27 道路连通空间一定连通。

命题 2.28 道路连通空间的连续映像是道路连通的。

5.3 道路连通分支

定义 2.12 拓扑空间在等价关系 ~ 下分成的等价类称为 X 的**道路连通分支**，简称**道路分支**。

命题 2.29 拓扑空间的道路分支是它的极大道路连通子集。

5.4 局部道路连通

定义 2.13 拓扑空间 X 称为**局部道路连通**的，如果 $\forall x\in X$，x 的道路连通邻域构成 x 的邻域基。

引理 如果拓扑空间 X 的每一点 x 有邻域 U_x，使得 x 与 U_x 中每一点都可用 X 上道路连接，则

（1） X 的道路分支都是既开又闭；

（2） X 的连通分支就是道路分支。

定理 2.9 局部道路连通空间 X 的道路分支就是连通分支，它们是既开又闭的；当 X 连通时，它一定道路连通。

例题 1：证明欧氏平面除去可数个点后仍是道路连通的。

证 设 X 是 R^2 除去可数个点后所得到的空间,

$\forall x,y\in X$，若 $x\neq y$, 设 L 是线段 xy 的中垂线。

设 $z\in L$,用(x,z,y) 表示连接 x,z,y 的折线, 由于这样的折线有不可数多条, 而 X 的余集 Y 是可数集, 所以至少有一条折线(x, z, y)不含 Y 中的点, 这表明 X 是道路连通的。

例题 2：证明至少有两个点的连通的 T_4 空间一定是不可数集。

证 设 X 是至少有两个点的连通的 T_4 空间，设 x, y 是 X 中的两个不同点，令 $A=\{x\}$，$B=\{y\}$，则 A 和 B 是 X 中的两个非空不相交的闭集，故由乌里松引理知，存在连续函数 $f: X\to[0,1]$ 使得 $f(x)=0$，$f(y)=1$，又因 X 是连通的，故 $f(X)$ 是 $[0,1]$ 中的连通集，而 $0,1\in f(X)$，因此 $f(X)=[0,1]$，于是 X 一定是不可数集。

例题 3：举例说明连通空间不一定为道路连通空间。

[解] R^2 的子空间

$$X=\{(x,\sin\frac{1}{x})\,|\,0<x\}\cup\{(x,y)\,|\,x=0,-1\le y\le 1\}$$

是连通空间但不是道路连通空间。

事实上，设 $A=\{(x,\sin\frac{1}{x})\,|\,0<x\}$，则 A 与 $(0,+\infty)$ 同胚，从而由 $(0,+\infty)$ 连通得到 A 连通。而 A 的闭包为 X，因此 X 连通。下面用反证法证明 X 不是道路连通空间。假如 X 是道路连通空间，则存在连续映射 $f:[0,1]\to X$ 使 $f(0)=(0,0)$，$f(1)=(1,0)$

令 $B=f^{-1}\{(0,0)\}$，下证在 $[0,1]$ 中是既开又闭的，由于 B 显然是闭的，所以只需证明 B 是开集． $\forall t_0\in B$，令

$$U=\{(x,y)\,|\,\sqrt{x^2+y^2}<\frac{1}{2}\}\cap X$$

则因$f:[0,1]\to X$连续，故存在$V=(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)\bigcap[0,1]$，使$f(V)\subset U$，

易见$f(V)$连通．下面用反证法证明$V\subset B$．

若不然，则$\exists t\in V$使$f(t)\neq(0,0)$，且$f(t)=(x_{1,}y_1)$，其中

$\alpha<x_1<\beta$，这里$\alpha=(\frac{1}{2}\pi+k\pi)^{-1}$， $\beta=(\frac{1}{2}\pi+k\pi+\pi)^{-1}$

令$C=\{(x,y)\in f(V)\mid x<\alpha\}$，$D=\{(x,y)\in f(V)\mid x>\alpha\}$

则$(0,0)\in C$，$f(t)\in D$，这表明C、D是非空开集，且

$f(V)=C\bigcup D$，这与$f(V)$连通矛盾。

例题4：证明道路连通空间定为连通空间。

证明：设X是道路连通空间，并且设A为X的一个既开又闭的非空集合。 若A不是整个X，选取$x\in A, y\in X-A$，并且用X的道路γ连结x到y，则$\gamma^{-1}(A)$是区间[0，1]内的一个非空真子集，并且，由于γ的连续性，它既开又闭的。这就与[0，1]连通的事实矛盾。因此，$A\neq X$的前提不能成立，我们有A=X，这正是所需要的。

作业：P71 Ex5