逆不变性的讨论

例 $f:(0,1)\to[0,1]$，$x\mapsto x$，则 f 连续，$[0,1]$是紧空间，但$(0,1)$不是紧空间。

定义 1 满连续映射 g:X→Y 称为完备映射，若 g 是闭映射，且对任意 y∈Y ，$g^{-1}(y)$是紧的。

定理 设 g:X→Y 是 X 到 Y 的完备映射，若 Y 是紧空间，则 X 也是紧空间。

证 设$\{U\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$是X的开覆盖，设y∈Y，令Ω={Uα | Uα ∩ $g^{-1}(y)\neq\Phi$}，则Ω是X的紧子空间$g^{-1}(y)$的开覆盖。由引理知，它有有限子覆盖，即存在Γ的有限子集B_y，有$g^{-1}(y)\subset\bigcup\limits_{\alpha\in B_y}U\alpha$。其中$\bigcup\limits_{\alpha\in B_y}U\alpha$是 X的开集，又g是闭映射，故 g(X−$\bigcup\limits_{\alpha\in B_y}U\alpha$）是 Y 的闭集。 令$G_y$=Y−g(X−$\bigcup\limits_{\alpha\in B_y}U\alpha$），则$G_y$开⊂Y且$g^{-1}(G_y)\subset\bigcup\limits_{\alpha\in B_y}U\alpha$。而Y⊂$\bigcup\limits_{y\in Y}G_y$，若Y是紧空间，则存在有限子集族 $\{G_{y_i}\}_{1\le i\le m}$ 使得 Y ⊂ $\bigcup\limits_{i=1}^{m}G_{y_i}$ 。于是 X = $g^{-1}(Y)\subset g^{-1}(\bigcup\limits_{i=1}^{m}G_{y_i})\subset\bigcup\limits_{i=1}^{m}(\bigcup\limits_{\alpha\in B_{y_i}}U\alpha)$。 而集合$\bigcup\limits_{i=1}^{m}B_{y_i}$是Γ的有限子

集，故X是紧空间。

定义 2　若 X 的每个可数开覆盖有一个有限子覆盖，则称 X 为可数紧空间。

定义 3　若 X 的每个开覆盖有一个可数子覆盖，则称 X 为 Lindelöf 空间。

显然 X 是紧空间当且仅当 X 是可数紧的 Lindelöf 空间。