

文章编号: 1004- 4574( 2010) 04- 0048- 06

# 波动数值模拟中人工透射边界的实现技术

李 帆<sup>1, 2</sup>, 肖成志<sup>2</sup>, 李雨润<sup>2</sup>, 巴振宁<sup>1</sup>

(1. 天津大学 建工学院, 天津 300072; 2 河北工业大学 土木学院, 天津 300401)

**摘 要:** 对局部场地动力反应的有限元方法及其边界问题的处理技术进行了研究, 基于 ABAQUS 有限元软件开发了用于局部场地反应数值模拟的人工透射边界的子程序, 通过对均匀半空间的波动问题的分析, 验证了局部场地动力反应分析模型和边界处理技术的可行性。算例结果表明, 基于 ABAQUS 有限元软件建立的地震波输入方式和透射边界的用户子程序对于局部场地动力反应分析具有良好的适用性。所提方法可用于二维局部不规则、不均匀和非线性场地的地震波散射问题。

**关键词:** 局部场地; 有限元法; 透射边界; 人工边界; ABAQUS 软件

中图分类号: TU 443

文献标识码: A

## Implementation of artificial transmitting boundary in numerical simulation of wave motion

LI Fan<sup>1, 2</sup>, Xiao Cheng-zhi<sup>2</sup>, Li Yu-run<sup>2</sup>, Ba Zhen-ning<sup>1</sup>

(1. School of Civil Engineering Tianjin University, Tianjin 300072, China

2 School of Civil Engineering Hebei University of Technology, Tianjin 300401, China)

**Abstract** Numerical simulation of local site dynamic response was studied by finite element method considering on transmitting artificial boundary condition in this paper. A new program used for seismic response of two-dimension local uneven field is developed based on ABAQUS finite-element software. Wave motion problem of homogeneous half space was analyzed. It proves that the analysis model and boundary processing used in local site dynamic response developed in this paper are feasible. The user subroutine for transmitting boundary condition is excellent to solve the dynamic response by the simulation of the infinite field effect. The numerical examples show that the incident style of earthquake waves and the subroutine of transmitting boundary condition based on ABAQUS can be efficiently applied to local site dynamic analysis. The method can be applied to scattering of earthquake waves of 2-D irregular, uneven and nonlinear local site.

**Key words** local site; finite element method; transmitting boundary; artificial boundary; software ABAQUS

局部地形对波的散射问题一直是地震工程学中颇为引人注目的课题之一。由于局部区域可能具有不规则形状或由非均匀介质组成, 这类问题一般需要通过数值模拟加以研究。在无限介质或半无限介质中, 常需要引入人工边界以获得有限模型, 人工引入这种边界可能在边界上产生假反射, 因此, 需建立适当的人工边界条件以消除假反射。人工边界条件的研究始自 20 世纪 60 年代末<sup>[1]</sup>。近年来, 离散方法如有限元法、边界

收稿日期: 2009- 11- 21; 修订日期: 2010- 04- 23

基金项目: 天津市应用基础研究重点项目(编号 07JCZDJC10100); 河北省教育厅科研项目(编号 Z20009313)

作者简介: 李帆(1975- ), 女, 讲师, 博士, 主要从事城市防灾减灾及工程抗震研究. E-mail: jinfannuz@163.com

通讯作者: 巴振宁, 男, 讲师, 博士. E-mail: bazhenningoo@163.com

元法在波动问题中的应用有了很大进展<sup>[2-4]</sup>。20 世纪 80 年代初廖振鹏院士<sup>[2]</sup>提出了基于透射理论和多次透射公式的人工边界, 以实现近场波动的有限元模拟, 多次透射人工边界具有很好的计算精度。为了充分利用通用有限元软件的强大求解器和前后处理功能, 更方便地计算和分析局部场地动力响应问题, 本文结合国际通用有限元分析软件 ABAQUS 平台, 利用 ABAQUS 子程序接口, 开发了多次透射人工边界条件子程序, 为局部场地有限元分析提供了可选用的人工透射边界。

## 1 模 型

### 1.1 局部场地动力有限元模型

考虑到空间中局部场地动力反应通常可看作平面应变问题, 取局部场地的动力模型如图 1 所示。在均匀弹性半空间存在不规则地形, 波源可以是计算区内的震源(如动力基础), 也可以是无限域传来的地震波。引入平行于坐标轴的人工边界以从无限介质区内取出包括不规则地形在内的有限区域, 人工边界区的自由表面为水平面, 左右两侧边界区的地面高程可以不相等。

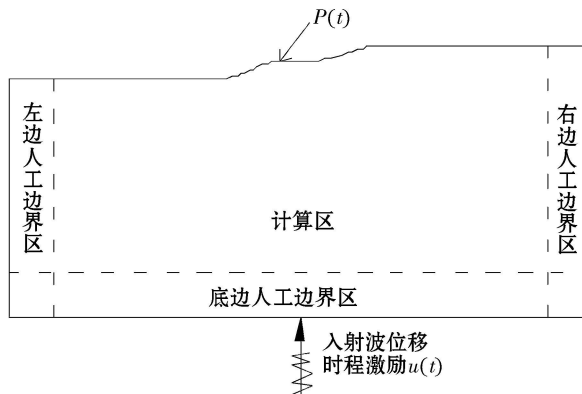


图 1 局部场地动力分析模型示意图

Fig. 1 Model of local site dynamic analysis

将图 1 中所示力学模型离散化处理, 划分网格形成有限元离散模型。网格划分时在人工边界区内采用矩形单元, 计算区内主要采用 ABAQUS 软件中提供的平面等参四节点四边形单元 (CPE4), 并允许出现三角形单元。为了保证离散的精度, 单元尺寸的选取是十分重要的, 单元尺寸的选择准则一般以单元尺寸与谐波分量波长之比  $\Delta x / \lambda$  来表示, 文献 [2] 建议取  $\Delta x / \lambda = 1/8 \sim 1/10$ 。

### 1.2 运动方程

场地动力反应时域内的运动方程为:

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = F \quad (1)$$

式中:

$M$ ,  $C$ ,  $K$  分别为计算体系的总质量矩阵, 阻尼矩阵, 刚度矩阵;  $u$ ,  $\dot{u}$ ,  $\ddot{u}$  分别为计算节点相对于基岩的位移、速度和加速度矢量;  $F$  为网格点上的外力矢量。

给出边界条件并对上述方程数值求解可得模型各节点的位移、速度和加速度。

### 1.3 边界条件的处理技术

设置的人工边界应保证波在人工边界处的传播特性与在原连续介质中的一致, 使得波通过人工边界时无反射效应, 发生完全透射, 以实现原连续介质的精确模拟。

廖振鹏<sup>[2]</sup>通过引入一个假定的外行人工波速的概念建立了多次透射边界, 透射理论的要点如下: 第一, 给出穿过人工边界上一点并沿边界外法线方向传播的单向波动的一般表达式, 即将单向波动表示成一系列外行平面波的叠加。这是一般表达式, 因为这些平面波沿该法线传播的速度及其波形均不作具体限制, 对该边界点邻近区域内的运动微分方程和物理边界条件亦不作具体限定。第二, 利用多次透射技术模拟上述一般表达式, 首先假定所有单向波动以同一人工波速沿法线方向从边界透射出去, 由此得到一次透射公式;

然后证明了一次透射的误差也是具有相同外行性质的单向波动, 由此建立了阶多次透射公式 (multi-transmitting formula MTF), MTF 可写成:

$$u_0^{p+1} = \sum_{j=1}^N (-1)^j C_j^N u_j^{p+1-j} \tag{2}$$

式中:  $C_j^N$  为二项式系数;  $u_j^p$  为离散位移, 由下式定义:

$$u_j^p = u(p \Delta t - j c_a \Delta t) \tag{3}$$

式中:  $u(t, x)$  为空间坐标  $x$  和时间  $t$  的函数,  $x$  轴为以考虑的边界点为原点的边界外法线 (见图 2),  $c_a$  为人工波速,  $N$  为透射阶数,  $p$  为整数,  $\Delta t$  和  $\Delta x$  分别为假定的时间和空间步距, 对于式 (2) 或式 (3) 定义的  $u_j^p$ , 式 (1) 的数值实现是不同的。

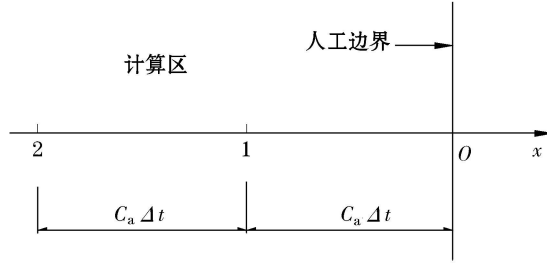


图 2 多次透射公式的几何关系

Fig 2 Geometric relation of MTF

一般意义上, 式中  $u_j^p$  应理解为入射波总位移矢量或此矢量的一个位移分量在计算点  $x = -j c_a$  和时刻  $t = p \Delta t$  的取值。多次透射公式的显著特征是它完全由一个可以调节的参数 (人工波速  $c_a$ ) 控制, 而与入射波表达式的具体细节无关。多次透射公式是用计算点的位移表示的, 但计算点  $x = -j c_a \Delta t$  与有限元的离散节点  $x = -n \Delta x$  一般不重合, 为了使多次透射公式直接用于有限元计算, 需要将计算点位移用节点位移表示出来, 完成多次透射公式的数值实现。

透射边界是用于模拟由计算区内部向外传播的波动, 因此在应用透射公式计算人工边界点位移时, 必须首先从总位移波场中扣除内行波场或平行于人工边界传播的非外行波场, 以获得外行波场。多次透射公式可以模拟标量波的传播, 也可以模拟向量波的传播。对应向量波情形, 多次透射公式中  $u_j^p$  的可以理解为位移向量的一个分量。人工波速  $c_a$  允许在一定范围内变动, 数值计算结果对此变动不甚敏感, 通常取  $c_a = c_s$  ( $c_s$  为剪切波速)。

MTF 在近场波动数值模拟中的稳定实现是实际应用这一人工边界条件的关键问题。在近场波动数值模拟中 MTF 导致的数值失稳现象可归纳为两类: 高频振荡失稳和零频漂移失稳。文献 [5] 中给出了消除这两类数值失稳现象的稳定实施措施:

(1) 高频振荡的消除措施: 采用分布阻尼技术, 在全部内节点运动方程中加上用单元阻尼阵  $c^e$  所表示的阻尼力

$$c^e = \frac{\gamma_1}{\omega^*} k^e \tag{4}$$

式中  $k^e$  为单元刚度阵,  $\omega^*$  为参考角频率, 其取值可大于波动数值模拟有意义频段的上限,  $\gamma_1$  为无量纲小正数。在 ABAQUS 软件中, 可以利用设置瑞利阻尼实现此阻尼力,  $C = \alpha M + \beta K$ , 取  $\alpha = 0$   $\beta = \frac{\gamma_1}{\omega^*} = \frac{2\xi}{\omega^*}$ , 其中  $\xi$  是阻尼比。

(2) 防止零频漂移失稳的办法: 在实施 MTF 时, 在 MTF 公式中增添一个  $\gamma_2$  为小正数的算子项, 在离散的数值计算中 MTF 改写成

$$u_0^{p+1} = \sum_{j=1}^2 \frac{1}{(1 + \gamma^2)^j} \sum_{n=0}^2 \gamma_{n,j} u_n^{p-j+1} \tag{5}$$

式中,  $u_n^p$  的下标  $n$  表示离散节点的编号;

$$y_{n,j} = (-1)^{j+1} C_j^n a_{n,p} \quad (6)$$

对于  $N = 2$  和  $S = \frac{c_a \Delta t}{\Delta x}$ , 有

$$\left. \begin{aligned} y_{2,1} &= S(S-1) & y_{1,1} &= 2S(2-S) & y_{0,1} &= (S-2)(S-1) \\ y_{2,2} &= S(1-2S) & y_{1,2} &= 4S(1-S) & y_{0,2} &= (1-S)(2S-1) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

## 2 基于 ABAQUS 软件透射边界的实现

### 2.1 ABAQUS 软件及其用户子程序

国际通用有限元分析软件 ABAQUS 具有强大的非线性求解能力和便捷的子程序接口及相应的二次开发功能<sup>[6]</sup>, 广泛应用于许多领域。在 ABAQUS 软件中对动力边界的处理通常采用无限元模拟或设置粘滞人工边界两种方法。为方便用户, ABAQUS 软件在 Standard 模块提供了边界条件的用户子程序接口 DISP<sup>[7]</sup>, 本文利用此接口实现透射边界的设置。

### 2.2 透射边界子程序的计算步骤

在工程上, 一般假设地震波为垂直入射的平面体波, 通常采用适当的处理方法将散射问题转化为等效的波源问题。我们在人工边界上直接输入地震波, 将人工边界区内节点的动力反应总位移场  $u$  分解为非外行位移场  $u_i$  和  $u_s$  外行位移场, 三者之间的关系为:

$$u_s = u - u_i \quad (8)$$

所谓非外行波场为由人工边界区外射向人工边界区的内行波场或平行人工边界传播的波场, 内行波场包括直接入射至人工边界区的入射波和由人工边界之外的水平自由表面及介质水平分界面反射向人工边界区的波场。底边界区非外行波取入射位移波, 左右边界区非外行波取自由场位移。

以二阶透射边界为例, 透射边界的用户子程序 DISP 中波动输入和边界节点  $(p+1)\Delta t$  时刻的位移计算的步骤为:

- (1) 给定边界点初始条件, 设  $t = -\Delta t$  和  $t = 0$  时刻, 各边界点位移赋值为 0
- (2) 设  $t = 0$  时入射波传至底边界的第一行节点, 用行波概念外推底边界区内以后各时刻第一至三行节点的入射位移;
- (3) 左右侧边界三列节点的自由场位移由频域方法计算得出并利用傅立叶变换转换到时域; 对于垂直体波入射情形, 左右边界区内同一高程各节点在同一时刻的自由场位移相同。
- (4) 由运动方程式 (1) 求解可得到计算区和边界区各节点的总位移场;
- (5) 已知  $(p-1)\Delta t$  和  $p\Delta t$  时刻底边界区三行节点的总位移场和入射位移场和左右边界区三列节点的总位移场和自由场, 由式 (5) 求得  $(p-1)\Delta t$  和  $p\Delta t$  时刻边界区各节点外行位移场;
- (6) 应用二阶透射公式计算边界节点  $(p-1)\Delta t$  时刻的外行位移场;
- (7) 将底边界节点  $(p-1)\Delta t$  时刻的外行位移场和已知的入射位移波场或自由位移场相叠加可得到  $(p-1)\Delta t$  时刻底边界节点的总位移波场; 将左右人工边界点  $(p-1)\Delta t$  时刻的外行位移场和自由位移场相叠加可得到  $(p-1)\Delta t$  时刻左右边界节点的总位移波场。

## 3 算例分析

为了验证本文在 ABAQUS 软件中建立的透射边界的有效性和计算精度, 对均匀弹性半空间在竖向简谐荷载作用下的动力反应进行了计算分析。直角坐标系  $Oxy$  的原点  $o$  设置在边长为  $b$  的矩形区域地面的中点, 有限元计算模型区域取水平方向  $b$  为 480m, 竖直方向  $h$  为 240m 的矩形区域。在地表  $(-\Delta b, b)$  范围内施加正弦均布荷载,  $\Delta b = 10\text{m}$ , 均布荷载集度  $q(t) = P_0 \sin(10\pi t)$ ,  $P_0 = 1000\text{N}$ , 如图 3。有限元网格采用平面等参四节点四边形单元 (CPE4),  $\Delta x$  为 1~2m, 如图 4 加载点附近区域单元尺寸取得小一些。

均匀弹性半空间采用的各向同性、均匀介质, 对应介质参数取值为:  $c_s = 200\text{m/s}$ ,  $\rho = 1800\text{kg/m}^3$ ; 计算中取  $\Delta t = 0.02\text{s}$ ,  $c_a = c_s$ ,  $\gamma_2 = 0.02$ ,  $\gamma_1 = 0.006$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0.003$ 。

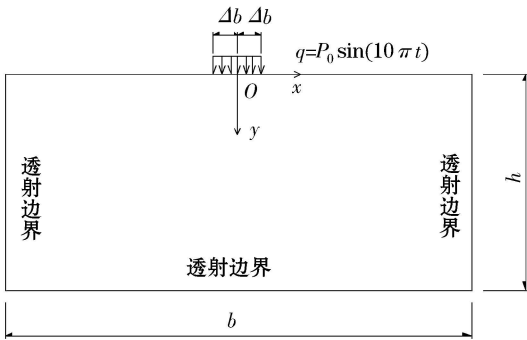


图 3 竖向简谐荷载作用下均匀弹性半空间波动问题示意图

Fig 3 Wave motion problem model of homogeneous elastic half space incident by vertical harmonic load

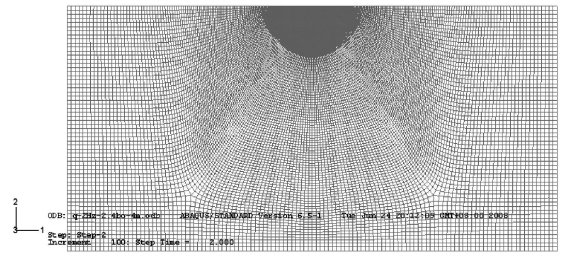


图 4 有限元网格

Fig 4 Finite element mesh

此问题的解析解利用 Wolf<sup>[8]</sup>关于二维情况下的半空间格林影响函数求得:

$$w(x, \Delta b) = \frac{2}{\pi} \left( \int_0^{\infty} \frac{\sin k \Delta b}{k} \times F_{ww}(k) \cos kx \cdot P_0 dk \right) \tag{9}$$

式中:  $w$  为地面点竖向位移;  $x$  为地面点水平坐标;  $F_{ww}(k)$  为柔度系数;  $k$  为波数。

为了分析透射边界与固定边界对局部场地动力分析问题的差别,同时对有限元区域大小相同且为固定边界的模型进行了计算。在图 5 中给出了透射边界模型地面点  $x$  坐标与地面点的竖向位移幅值的关系曲线,并与解析解和固定边界模型的结果进行了比较。

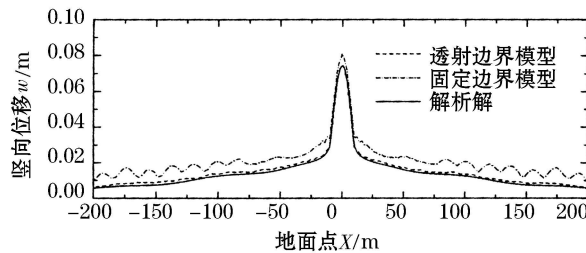


图 5 地面点的竖向位移幅值曲线

Fig 5 Vertical displacement amplitude curves of surface points from different models

可以看出,与固定边界模型相比,由于透射边界模型考虑了能量的透射,外行散射波可传入外部无限域。透射边界模型的模拟结果明显优于固定边界,与精确解符合良好,本文的透射边界是十分有效的。

### 4 结 论

本文采用人工透射边界模拟局部场地的散射波场作用和波场分离技术,并借助有限元软件 ABAQUS 实现了瞬态平面波(P波和 SV 波)垂直入射条件下的波动问题的数值模拟。该方法可以充分利用通用有限元软件的强大求解器和前后处理功能计算和分析局部场地动力响应问题;并基于 ABAQUS 软件,开发了局部场地动力反应分析透射边界的用户子程序;本文方法不仅适用于均匀半空间,也适用于水平成层弹性半空间,只需要把均匀半空间自由场替换为水平成层半空间的自由场;透射边界也可以应用于不规则、非均匀和非线性局部场地动力反应分析。

### 参考文献:

[ 1 ] Aki K, Richards P G. Propagation of Elastic Waves in Layered Media by Finite Difference Methods [ J ]. Bulletin of the Seismological Society of America, 1968, 58: 367-398

[ 2 ] 廖振鹏. 近场波动的有限元模拟 [ J ]. 地震工程与工程振动, 1984, 4(2): 1-14.

- [ 3 ] 廖振鹏. 工程波动理论导论 (第二版) [M]. 北京: 地震出版社, 2002
- [ 4 ] Givoli D. Numerical Methods for Problems in Infinite Domains [M]. Elsevier, Amsterdam, 1992
- [ 5 ] 廖振鹏, 周正华, 张艳红. 波动数值模拟中透射边界的稳定实现 [J]. 地球物理学报, 2002, 45 (4): 533 - 545
- [ 6 ] 庄茁. ABAQUS 非线性有限元分析与实例 [M]. 北京: 科学出版社, 2005.
- [ 7 ] ABAQUS Inc. ABAQUS User Subroutines Reference Manual [R]. 2008
- [ 8 ] Wolf J.P. Dynamic Soil-Structure Interaction [M]. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1985.