1.2 由度量诱导的拓扑

Def.1 集合 X 上的一个度量 d 是指映射 $d: X\times X\to R$ 满足

（1） 正定性： $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$，

（2） 对称性：$d(x,y)=d(y,x)$， $\forall x,y\in X$ ；

（3） 三角不等式：

$d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$， $\forall x,y,z\in X$ 。

注：$\forall x,y\in X$ 有 $d(x,y)\ge 0$。事实上，取 $z=x$，则由

$$0=d(x,x)=d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)=2d(x,y)$$

即知

Def.2 若 d 满足定义 1，称（X,d）为一个**度量空间**，（X,d）有时也记作 X.

Ex.1 在 R^n 上规定 $d((x_1,\cdots,x_n),(y_1,\cdots,y_n))=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$，则 d 是一个度量，记 $E^n=(R^n,d)$，称为 n **维欧氏空间**。

Def.3 设 (X,d) 是一个度量空间，$x\in X,\varepsilon>0$，称 X 的子集 $B(x,\varepsilon)=\{y\in X\mid d(x,y)<\varepsilon\}$ 为以 x 为圆心、ε 为半径的**球形邻域**。

Lemma (X,d) 中的任意两个球形邻域的交集是若干球形邻域的并集。

证 设 $U=B(x_1,\varepsilon_1)\cap B(x_2,\varepsilon_2)$，则 $\forall x\in U$，

记 $\varepsilon_x=\min\{\varepsilon_1-d(x,x_1),\varepsilon_2-d(x,x_2)\}$，因 $\varepsilon_i-d(x,x_i)>0\ \ (i=1,2)$，故 $\varepsilon_x>0$，且 $B(x,\varepsilon_x)\subset U$ 。于是 $U=\bigcup\limits_{x\in U}B(x,\varepsilon_x)$。

Pro. 记 $\tau_d=\{U\mid U$是(X,d)若干球形邻域的并集$\}$，则 τ_d 是 X 上的一个拓扑。

注 我们称τ_d为由度量诱导的拓扑，常常将度量空间(X,d)看作是拓扑空间(X,τ_d)

Question 设(X,ρ)是度量空间，$\rho'(x,y)=\dfrac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$,问$(X,\rho')$是度量空间吗？

解 因为(X,ρ)是度量空间，故

(1) $\rho'(x,y)=\dfrac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}=0$当且仅当$\rho(x,y)=0$当且仅当$x=y$.

(2) $\rho'(x,y)=\dfrac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}=\dfrac{\rho(y,x)}{1+\rho(y,x)}=\rho'(y,x)$。

(3)因$f(x)=\dfrac{x}{1+x}$在$[0,+\infty)$上单调递增，而$\rho(x,z)\le\rho(x,y)+\rho(y,z)$

故$\rho'(x,z)=\dfrac{\rho(x,z)}{1+\rho(x,z)}\le\dfrac{\rho(x,y)+\rho(y,z)}{1+\rho(x,y)+\rho(y,z)}$

$$=\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)+\rho(y,z)}+\frac{\rho(y,z)}{1+\rho(x,y)+\rho(y,z)}$$

$$\le\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}+\frac{\rho(y,z)}{1+\rho(y,z)}=\rho'(x,y)+\rho'(y,z)$$

于是(X,ρ')也是度量空间。