§1 开集、邻域、闭集、闭包、内部的特征性质

2005.3.8 第1、2节课

一、 开集的特征性质

(1) $\Phi,\ X\in\tau$ （空集和全空间是开集）；

(2) 若 $A,B\in\tau$，则 $A\cap B\in\tau$ （有限个开集的交是开集）；

(3) 若 $A_i\in\tau\ \ (i\in I)$,则 $\bigcup_{i\in I}A_i\in\tau$ （任意个开集的并是开集）.

二、 闭集的特征性质

- **定理**

(1) 空集和全空间是闭集；

(2) 有限个闭集的并是闭集；

(3) 任意个闭集的交是闭集.

- De Morgan 公式
  1) 交的余等于余的并；
  2) 并的余等于余的交.

三、 邻域的特征性质

- **定理**

(1) 若 $U\in \mathrm{N}_x$，$U\subset V$，则 $V\in \mathrm{N}_x$；

(2) 若 $U_1,U_2\in \mathrm{N}_x$，则 $U_1\cap U_2\in \mathrm{N}_x$；

(3) 若 $U\in \mathrm{N}_x$，则 $x\in U$ ；

(4) 若 $V\in \mathrm{N}_x$，则存在 $W\in \mathrm{N}_x$ 使得 $\forall y\in W$，都有 $V\in \mathrm{N}_y$.

四、 闭包的特征性质

- **定理**

(1) $\overline{\phi}=\phi$ ；

(2) $\overline{A}\supset A$ ；

(3) $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$ ；

(4) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

注：只证（3）和（4）

五、 内部的特征性质

- **定理**

(1) $X=X^{\circ}$ ；

(2) $A \supset A^{\circ}$；

(3) $A^{\circ\circ} = A^{\circ}$；

(4) $(A \cap B)^{\circ} = A^{\circ} \cap B^{\circ}$

注：只证（3）和（4）

六、 序列和收敛序列

- 称映射 $f: \mathbb{Z}^{+} \to X$ 为 X 中的一个序列（或点列），

- 序列 $f: \mathbb{Z}^{+} \to X$ 记作 $\{f(n)\}$ 或 $\{x_n\}$ 或 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}^{+}}$，这里 $x_n = f(n)$．

- 设 (X,τ) 是拓扑空间，$\{x_n\}$ 是 X 中的点列，若存在 $x \in X$，满足下列条件：

只要 U 是 x 的邻域，一定存在正整数 N，使得当 $n > N$，必有 $x_n \in U$

则称点列 $\{x_n\}$ 收敛．

七、 子空间

- 度量空间的子空间

 度量空间 (X,d) 的子空间 $(A, d|_{A\times A})$ 是指 $A \subset X$，且 $d_{|A\times A}: A \times A \to \mathbb{R}$ 是 $d: X \times X \to \mathbb{R}$ 的限制．

- 拓扑空间的子空间

 拓扑空间 (X,τ) 的子空间 $(A, \tau|_A)$ 是指 $A \subset X$，且 $\tau|_A = \{G \cap A \mid G \in \tau\}$

- 子空间 $(A, \tau|_A)$ 的开集 V 是拓扑空间 (X,τ) 的某个开集 U 与 A 的交集．

- 子空间 $(A, \tau|_A)$ 的闭集 F 是拓扑空间 (X,τ) 的某个闭集 F_1 与 A 的交集．

习 题

1. 在实数空间 $\mathbf{R}$ 中，$\mathbf{Q}' = ?$，$\overline{\mathbf{Q}} = ?$．
2. 设 X 为拓扑空间，$A, B \subset X$．证明 若 $A' \subset B \subset A$，则 B 为闭集．
3. 设 X 为拓扑空间，$A \subset X$．证明 若 $x \in A'$，则 $x \in (A - \{x\})'$．
4. 证明度量空间中的单点集为闭集，且每个子集的导集为闭集．