引　言

（1 节课）（05.2.28 星期一第 4 节）

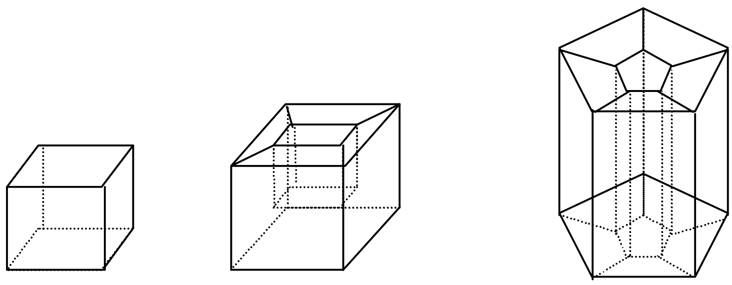
一、　　拓扑学中有趣而古老的例子（三个问题、一个定理）

- **一笔画问题**

  一笔画问题就是平面上由曲线段构成的一个图形能不能一笔画出使得每条线段上不重复．
- **七桥问题**
- **地图着色问题**
- **Euler 多面体定理**

　　设“多面体”P 的任何两个顶点都可由若干条棱连结起来,且表面上任何一条简单闭曲线分割其表面为两部分(同胚于球面)．若 v 为的 P 顶点数,e 为 P 的棱数,f 为 P 的面数，则 P 的“欧拉示性数”$v-e+f$ 为 2．

【评注】 欧拉示性数简称为欧拉数．下列左边两个多面形的欧拉数都为 2 ,而右边的多面形的欧拉数为 0．



　证 若凹多面形 P 与球面同胚,则 P 可以与凸多面形同胚．将凸多面体的表面向径投影到半径为 1 的球面上．考虑球面多边形．在半径为 R 的球面上,内角为 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 的球面三角形的面积 $S=R^2(\alpha+\beta+\gamma)$,不妨设 $R=1$ ．内角为 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_k$ 的球面 n 边形的面积为

$$(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k)-(n-2)\pi=(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k)-n\pi+2\pi\ .$$

球面上所有多边形的面积之和为 $2\pi v-2\pi e+2\pi f=4\pi$ (每个顶点处的角度总和为 2π ,每条棱两次),故

$$v-e+f=2\ .$$

【评注】(1)该定理说明欧拉数为 2 是与球面同胚的多面体的拓扑不变性，这样多面体的代表是球面．

　　（2）上图右边的多面体与环面同胚,欧拉数为 0 是环面的拓扑不变性,若将环面任意剖分成多面体,其欧拉数一定为 0．

- **广义欧拉定理** 同胚的多面体有相同的欧拉数．

  上述定理是现代拓扑学中的研究各种拓扑不变性的早期例子．

二、　　拓扑学的研究方法

- **点集拓扑学（也称一般拓扑学）：**用点集的方法，例如利用集合的运算
- **代数拓扑学：**用代数的方法，例如利用群、环、模等
- **微分拓扑学：**用微积分的方法，例如利用微分流形

- **几何拓扑学：**用几何的方法

三、 拓扑学的研究对象

- **点集拓扑学：**拓扑性质（几何图形的“同胚”不变的几何性质称为拓扑性质，即研究几何体在弹性变形之下的不变性质）
- **代数拓扑学：** 同调论、同伦论
- **微分拓扑学：** 微分流形
- **几何拓扑学：**几何图形的特殊性

四、 拓扑学的地位

- **点集拓扑学：**现代几何学的基础语言，本科生三门现代基础课之一（拓扑学、泛函分析、抽象代数）
- **代数拓扑学：**研究生三门现代基础课之一（拓扑学、泛函分析、抽象代数）

五、 什么是拓扑学

“拓扑”是英文“topology”的译音．江泽涵先生把 topology 译为橡皮几何学。前缀‘topo-’有形状和地形的含义， 可以认为 topology 是有关形状和地形的学科．前缀‘top-’的含义是“顶端”、“顶上”、“首位”等许多意思，后缀-ology 是指学科，也可以认为 topology 是顶上的学科（其实拓扑学“topology”是二十世纪数学中内容最具丰富的学科）．

拓扑学是研究几何图形的，拓扑学所研究的并不是大家最熟悉的普通的几何性质，而是图形的一类特殊性质，即所谓的拓扑性质.尽管拓扑性质是图形的一种很基本的性质，它也具有很强的几何直观，但也很难用简单通俗的语言来准确的描述.从某种意义上来说，点集拓扑学研究图形之间的一种较强的连续变换，即拓扑变换．当然点集拓扑学也研究拓扑变换的不变量．

六、 参考书目

- 江泽涵，拓扑学引论
- Armstrong,M.A. ，Basic Topology，孙以丰译
- 熊金城，点集拓扑讲义
- 李孝传，陈玉清，一般拓扑学
- Sidneya.Morris，Topology without Tears，
- Kelley.J.L. ，General Topology

预备知识 集合

（1 节课）（05.2.28 星期一第 5 节）

1. **集合论分为①朴素集合论②公理集合论**
   - 朴素集合论只给出描述性的含义，不给出定义.否则产生悖论，例如

     若把 A $=\{A \mid A是集合\}$ 当作一个集合，会产生悖论.事实上，

B $=\{A \mid A$是集合，$A \notin A\} \subset$ A ，这时B $\in$B 和B $\notin$B 都不成立.

- 公理集合论（有 8 个公理和一个公理图式）

1） 外延公理 $x=y \Leftrightarrow "z \in x \Leftrightarrow z \in y"$，

（ Axiom of extent For each x and each y it is true that $x=y$ if and only if for each z， $z \in x$ when and only when $z \in y$. ）

2） **子集族存在性公理** 若x是一个集，则存在一个集y使得$\forall z \subset x$，都有$z \in y$.

【评注】 $y \supset 2^x$

（ **Axiom of subsets** If x is a set，there is a set y such that for each z , if $z \subset x$ then $z \in y$.）

3) **有限并存在性公理** 若x和y都是集，则$x \cup y$也是集.

（ **Axiom of union** If x is a set and y is a set ，so is $x \cup y$. ）

4) **代换公理** 若f是一个函数且f的定义域是一个集，则f的值域是一个集.

（ **Axiom of substitution** If f is a function and domain f is a set, then range f is a set.）

5） **集族的并的存在性公理** 若x是一个集，则$\bigcup x$也是一个集.

【评注 1】 $\bigcup x$的定义为$\bigcup x=\{z \mid \exists y使得z \in y且y \in x\}$

【评注 2】 这里的并$\bigcup x$是集族的并

（ Axiom of amalgamation If x is a set，so is $\bigcup x$.）

6） **正则性公理** 若$x \neq \phi$，则存在x的成员y使得$x \cap y=\phi$.

【评注】 由正则性公理可以证明$x \notin x$

（ **Axiom of regularity** If $x \neq \phi$, there is a member y of x such that $x \cap y=\phi$.）

7） **无限性公理** 存在一个集合y使得$\phi \in y$，且只要$x \in y$就有$x \cup\{x\} \in y$.

（ **Axiom of infinity** For some y , y is a set, $\phi \in y$ and $x \cup\{x\} \in y$ whenever $x \in y$. ）

8） **选择公理** 存在一个以A $\sim\{\phi\}$为定义域的选择函数c

[注]选择函数c是指c是一个函数，并且对于**函数**c的定义域中的每个元x，都有$c(x) \in x$

（ **Axiom of choice** There is a choice function c whose domain is A $\sim\{\phi\}$）

9） **分类公理图式** 在一个公理的公式中，若‘ α ’和‘ β ’ 用若干个变元来替换 ，‘ A ’用一个公式A 来替换，且公式‘ B ’是将A **中的曾代替**α的每一个变元

都换成相应代替β的变元，即$\forall\beta$， $\beta\in\{\alpha\mid A\}$ $\Leftrightarrow\beta$是集且B

【评注 1】 分类公理图式可以安排在外延公理与**子集族存在性公理之间**

【评注 2】（公式的定义）设

（a） **1.**将公式$\alpha=\beta$中的‘α’或‘β’用一个变元来替换是一个公式；

2. 将公式$\alpha\in\beta$中的‘α’或‘β’用一个变元来替换是一个公式；

（b） 允许下列十个构造中的公式‘**A**’或公式‘**B**’ 用其它公式来替换，允许下列十个构造中的‘α’或‘β’ 用一个变元来替换：

[构造 1] $A\Rightarrow B$；
[构造 2] $A\Leftrightarrow B$；
[构造 3] A不真；
[构造 4] A与B；
[构造 5] A或B；
[构造 6] $\forall\alpha$，都有A；
[构造 7] $\exists\alpha$使得A；
[构造 8] $\beta\in\{\alpha\mid A\}$；
[构造 9] $\{\alpha\mid A\}\in\beta$；
[构造 10] $\{\alpha\mid A\}\in\{\beta\mid B\}$

则从（a）中的原始公式开始，按（b）中所允许的构造，递归地构造出来的东西叫公式.

（**Classification axiom-scheme** An axiom results if in the following‘α’and ‘β’are replaced by variables，‘A’ by a formula A and ‘B’ by the formula obtained from A by replacing each occurrence of the variable which replaced α by the variable which replaced β：

For each β， $\beta\in\{\alpha\mid A\}$ if and only if β is a set and B ）

2． 笛卡尔积

- $\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$

  $\{a,b,c\}\times\{0,1\}=\{(a,0),(a,1),(b,0),(b,1),(c,0),(c,1)\}$

- $A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}$（两个因子的笛卡尔积）

- $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid a_i\in A_i\}$（n 个因子的笛卡尔积），记作$\prod_{i=1}^{n}A_i$

- $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times \cdots = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots) \mid a_i \in A_i\}$（可数个因子的笛卡尔积），记作$\prod_{i=1}^{\infty} A_i$

  $A_1 \times A_2 \times \cdots = \{(a_1, a_2, \cdots) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \cdots\}$（与上式完全相同），记作$\prod_{i=1}^{\infty} A_i$

- $\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \mid a_\lambda \in A_\lambda\}$（任意个因子的笛卡尔积的一个直观定义）

  $\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \mid a_\lambda \in A_\lambda\}$（任意个因子的笛卡尔积的另一个直观定义）

  $\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{f \mid f : \Lambda \to \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda, f(\lambda) \in A_\lambda\}$（任意个因子的笛卡尔积的一个等价定义

【评注】 若$A_\lambda = Y$，$\Lambda = X$，则$\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = Y^X$，这里$Y^X = \{f \mid f : X \to Y\}$

3． 幂集

- $\{A \mid A \subset \{a,b,c\}\} = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{b,c\}, \{a,c\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}\}$（$2^3$个元素）

- $\{A \mid A \subset \{1, 2, \cdots, n\}\}$（$2^n$ 个元素）

- 集合 X 的幂集是指集合 X 的所有子集$\{A \mid A \subset X\}$，记作2^X，因此$2^X = \{A \mid A \subset X\}$

4． 拓扑空间的定义

点集拓扑学主要是探讨拓扑性质。 为了定义拓扑性质，先给出拓扑空间的定义

定义 设 X 是一个集合,若$\tau \subset 2^X$.且满足

(1) $\Phi,\ X \in \tau$

(2) 若$A, B \in \tau$，则$A \cap B \in \tau$ （有限交运算封闭）

(3)若$A_i \in \tau \quad (i \in I)$,则$\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$ （任意并运算封闭）

则称τ为 X 的**一个拓扑**，称(X, τ)为**拓扑空间**,称τ中的元素为拓扑空间 X 中的$\tau-$开集，简称为开集.