第二讲　　连续性

定理： 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，则 $\forall(\alpha,\beta)\subset[a,b](a\le\alpha<\beta\le b)$，$\exists x_0\in(\alpha,\beta)$ 使 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续。

证明： 作分划 $\Delta:\alpha=x_0<x_1=x_0+\dfrac{\beta-\alpha}{n}<\cdots<x_n=\beta$。因 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，取 $\varepsilon_1=\dfrac{\beta-\alpha}{2}>0$，存在 $n_1\ge 4$，使

$$\sum_{i=1}^{n_1}(M_i^{(1)}-m_i^{(1)})\frac{\beta-\alpha}{n_1}<\frac{\beta-\alpha}{2}$$

（其中 $M_i^{(1)}=\sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\},m_i^{(1)}=\inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\}$，以下类似定义。）

所以 $\sum_{i=1}^{n_1}(M_i^{(1)}-m_i^{(1)})<\dfrac{n_1}{2}\le n_1-2$，因此至少有三个 i，使 $M_i^{(1)}-m_i^{(1)}<1$。取 $0<i_1<n_1$，使 $M_{i_1}^{(1)}-m_{i_1}^{(1)}<1$。作区间 $[\alpha_1,\beta_1]=[x_{i_1-1},x_{i_1}]$，则 $f(x)$ 在 $[\alpha_1,\beta_1]$ 上 Riemann 可积。取 $\varepsilon_2=\dfrac{\beta_1-\alpha_1}{2^2}>0$，存在 $n_2\ge 4$，使

$$\sum_{i=1}^{n_1}(M_i^{(2)}-m_i^{(2)})\frac{\beta_1-\alpha_1}{n_2}<\frac{\beta_1-\alpha_1}{4}$$

于是 $\sum_{i=1}^{n_2}(M_i^{(2)}-m_i^{(2)})<\dfrac{n_2}{4}\le\dfrac{n_2-2}{2}$，因此至少有三个 i，使 $M_i^{(2)}-m_i^{(2)}<\dfrac{1}{2}$。

取$0<i_2<n_2$,使$M_{i_2}{}^{(2)}-m_{i_2}{}^{(2)}<\frac{1}{2}$。如此继续可以得到一个闭区间套

$$[\alpha,\beta]\supset[\alpha_1,\beta_1]\cdots\supset[\alpha_n,\beta_n]\supset\cdots$$

使得（1）$\beta_n-\alpha_n\le\frac{\beta-\alpha}{4^n}$；（2）$f(x)$在$[\alpha_n,\beta_n]$上的上下确界满足$M_i{}^{(n)}-m_i{}^{(n)}<\frac{1}{n}$。由闭区间套定理知$\bigcap_{n=1}^{\infty}[\alpha_n,\beta_n]=\{x_0\}$。下证$f(x)$在$x=x_0$处连续。

事实上,$\forall\varepsilon>0,\exists n_0=[\frac{1}{\varepsilon}]+1,$有$\frac{1}{n_0}<\varepsilon$。而由上述构造过程知，$\exists\delta>0,$有$(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset[\alpha_{n_0},\beta_{n_0}]$，
此时

$$\left|f(x)-f(x_0)\right|\le\left|M_i{}^{(n_0)}-m_i{}^{(n_0)}\right|<\frac{1}{n_0}<\varepsilon$$

故$f(x)$在$x=x_0$处连续。

例 1　设函数$f(x)$在$[a,b]$上 Riemann 可积，且$\int_a^b f(x)dx<0$。试证明：存在闭区间$[\alpha,\beta]\subset[a,b]$，使得当$x\in[\alpha,\beta]$时，$f(x)<0$。

[分析] 只需在$[a,b]$区间上找一个连续点x_0，使得$f(x_0)<0$。利用定积分的定义，分点取连续点（上述定理保证存在连续点）即可。

例 2　若$f(x)$可积，则$\int_a^b f^2(x)dx=0\Leftrightarrow f(x)$在连续点处恒等于 0。

证 **（必要性）** 若$\exists x_0, f(x)$在x_0连续，但$f(x_0)\neq 0$

$\exists x_0 \in (\alpha,\beta)\subset(a,b)$有$\forall x\in(\alpha,\beta), f(x)>0$，于是

$$\int_a^b f^2(x)dx \geq \int_\alpha^\beta f^2(x)dx > 0，矛盾。$$

（充分性） $\int_a^b f^2(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^n f^2(\xi_i)\dfrac{b-a}{n} = 0$（$\xi_i$取连续点）。

例 3 若一族开区间$\{I_\alpha \mid \alpha\in\Gamma\}$覆盖了闭区间$[0,1]$，则必存在一个正数$\delta>0$，使得$[0,1]$中的任意两点$x_1,x_2$满足$|x_1-x_2|<\delta$时，$x_1,x_2$必属于某个开区间$I_\beta\in\{I_\alpha\}$。

证 不妨设每个开区间都是有限区间。

(1) 作函数$f:[0,1]\to\mathbb{R}$，$x\mapsto \sup\{d(x,I_\alpha{}^C)\mid\alpha\in\Gamma\}$。

(2) f连续，且$f(x)>0$。而闭区间上的连续函数一定有最小值，

令$\delta=\dfrac{1}{2}\min\{f(x)\mid x\in[0,1]\}$。

(3) 连续性的证明：

$\forall x,y\in[0,1]$，$d(x,I_\alpha{}^C)=\inf\{d(x,a)\mid a\in I_\alpha{}^C\}\leq$

$\inf\{d(x,y)+d(y,a)\mid a\in I_\alpha{}^C\}=d(x,y)+$

$\inf\{d(y,a)\mid a\in I_\alpha{}^C\}=d(x,y)+d(y,I_\alpha{}^C)$，取上确界得

$$\sup\{d(x,I_\alpha{}^C)\mid\alpha\in\Gamma\}\leq d(x,y)+\sup\{d(y,I_\alpha{}^C)\mid\alpha\in\Gamma\}$$

即$f(x)-f(y)\leq d(x,y)$，同理$f(y)-f(x)\leq d(x,y)$，于是

$|f(x)-f(y)|\leq d(x,y)$，故$\forall\varepsilon>0,$取$\delta=\varepsilon$，当$|x-y|<\delta$时，

$\left|f(x)-f(y)\right|<\varepsilon$，所以 $f(x)$是$[0,1]$上的连续函数。

(4) $\forall x\in[0,1]$，$0<\delta<f(x)$，因此存在I_α，使得$d(x,{I_\alpha}^C)>\delta$，从而$(x-\delta,x+\delta)\subset I_\alpha$。

(5) 而满足$\left|x_1-x_2\right|<\delta$的点$x_1,x_2$必在某个$(x-\delta,x+\delta)$中(事实上取$x=\dfrac{\left|x_1-x_2\right|}{2}$即可)，从而命题得证。

例 4．求连续函数 $f(x)$，使得 $f(x)>0$且

$$f^2(x)=\int_0^x f(t)\frac{\sin t}{\cos t}dt+1。$$

（答案： $f(x)=-\dfrac{1}{2}\ln\left|\cos x\right|+1$。）

例 5．问α取什么值时函数

$$f(x)=\begin{cases}x^\alpha\sin\dfrac{1}{x},x\neq 0\\0,x=0\end{cases}$$

（1）处处连续；（2）处处可导；（3）导函数连续？

（答案：（1） $\alpha>0$；（2） $\alpha>1$；（3） $\alpha>2$。）

例 6．设函数 f 连续， $a<b$，且$\int_a^b\left|f\left(x\right)\right|dx=0$，试证明：$f\left(x\right)\equiv 0$， $x\in\left[a,b\right]$。

证 若存在$x_0\in\left[a,b\right]$，有 $f\left(x_0\right)\neq 0$，不妨设 $f\left(x_0\right)>0$。因 f 连续，故存在 x_0 的闭邻域$\left[c,d\right]\subset[a,b]$，使得$\forall x\in\left[c,d\right]$有 $f\left(x\right)>0$且 $d-c>0$，从而$\int_a^b\left|f\left(x\right)\right|dx\geq\dfrac{1}{2}\int_c^d\left|f\left(x_0\right)\right|dx=\dfrac{d-c}{2}f\left(x_0\right)>0$，这

与$\int_a^b \left|f\left(x\right)\right|dx=0$矛盾。因此$f\left(x\right)\equiv 0$，$x\in\left[a,b\right]$。

例 7. 已知$f(x)$在[0，1]上连续，$\int_0^1 f(x)dx=0,\int_0^1 xf(x)dx=1$。

求证：$\exists\xi\in$[0，1]使得$\left|f(\xi)\right|>4$。

证明：假设命题不成立，即$\forall x\in[0,1]$,有$\left|f(x)\right|\le 4$，由已知易得

$$\int_0^1 (x-\frac{1}{2})f(x)dx=1。$$

（1）当$\left|f(x)\right|\equiv 4$时，与$f(x)$在[0，1]上连续，$\int_0^1 f(x)dx=0$矛盾。

（2）当$\left|f(x)\right|$不恒等于 4 时，即有这样的点使$f(x)<4$，那么

$$\int_0^1 (x-\frac{1}{2})f(x)dx\le\int_0^1 |(x-\frac{1}{2})f(x)|dx=\int_0^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}-x)|f(x)|dx+$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 (x-\frac{1}{2})|f(x)|dx<\int_0^{\frac{1}{2}}4(\frac{1}{2}-x)dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 4(x-\frac{1}{2})|dx=1$$，矛盾。

所以命题成立，即$\exists\xi\in$[0，1]使得$\left|f(\xi)\right|>4$。

例 8．设函数$f\left(x\right)$在$\left[0,1\right]$上连续，证明：

$$\left(\int_0^1 \frac{f\left(x\right)}{t^2+x^2}dx\right)^2\le\frac{\pi}{2t}\int_0^1\frac{f^2\left(x\right)}{t^2+x^2}dx，\left(t>0\right)。$$

证 $\left(\int_0^1 \frac{f\left(x\right)}{t^2+x^2}dx\right)^2$

$$=\left(\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^2+x^2}}\frac{f\left(x\right)}{\sqrt{t^2+x^2}}dx\right)^2\le\int_0^1\frac{1}{t^2+x^2}dx\int_0^1\frac{f^2\left(x\right)}{t^2+x^2}dx$$

$$\le\left[\frac{1}{t}\arctan\frac{x}{t}\right]_0^1\int_0^1\frac{f^2(x)}{t^2+x^2}dx$$

$$=\frac{1}{t}\arctan\frac{1}{t}\int_0^1\frac{f^2(x)}{t^2+x^2}dx$$

$$\le\frac{\pi}{2t}\int_0^1\frac{f^2(x)}{t^2+x^2}dx\text{。}$$

作业：

练习 1　设 $f(x)$连续，且当$x>-1$时，

$$f(x)[\int_0^x f(t)dt+1]=\frac{xe^x}{2(1+x)^2}\text{，求 } f(x)\text{。}$$

练习 2　设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，且$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$，$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=0$，……，$\int_0^1 x^{n-1}f(x)\mathrm{d}x=0$，$\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x=1$，证明：存在$\xi\in[0,1]$，使$|f(\xi)|\ge 2^n(n+1)$。

练习 3　$f(x)$在$(-\infty，+\infty)$上连续，证明 $g(x)=\int_a^b f(x+t)\cos t dt$　在$(-\infty，+\infty)$上有连续函数,并求$g'(x)$。

练习 4 已知 $f(x,y)$在$[a,b;a,b]$上有定义，除正方形 $[a,b;a,b]$ 上一条连续曲线 $y=\phi(x)$ 以外的点都连续。问：$F(x)=\int_a^b f(x,y)dy$是否在(a,b)上连续？

练习 5　讨论连续性

1)　$f(x)=\sin\frac{1}{x}$　　$x\in(0,1)$，不一致连续；

2) $f(x)=x^{\alpha}\sin\frac{1}{x}$ ，当 $\alpha>0$ 一致连续；

3) 证明：对函数 $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$，不存在统一的 $\mathrm{M}>0$，使得对 $[0,1]$ 上任意 x,y 满足 $|f(x)-f(y)|\le \mathrm{M}|x-y|$。

练习 6 考虑 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{n}, x=\frac{m}{n}\text{（m,n互质）有理数}\\ 0, x\text{为无理数}\end{cases}$ 的连续性。

练习 7 已知 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续，$f(f(x))=x$。

证明：存在 $x_0\in\mathbb{R}$，使得 $f(x_0)=x_0$。